

Г. Л. Дегтярев, А.В. Маханько, С.М. Чернявский, А.С. Чернявский

**ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ЮСТИРОВКИ СЕГМЕНТНОГО ЗЕРКАЛА ПО ФУНКЦИОНАЛАМ ИЗОБРАЖЕНИЯ ПРОТЯЖЕННОГО ИСТОЧНИКА**

Предлагается аппаратная реализация итерационного метода Ньютона в задаче модального восстановления и компенсации угловых aberrаций сегментного зеркала по функционалам изображения протяженного источника. Приведены результаты численного моделирования для 6-сегментного зеркала с учетом шумов измерения.

Рассматривается адаптивная оптическая система (АОС) с  $n$ -сегментным зеркалом, у которой функция aberrаций волнового фронта (ВФ)  $\Phi(\xi, \eta)$  на апертуре с достаточной точностью представляется отрезком ряда по некоторой линейно независимой системе функций  $\{\Phi_k(\xi, \eta)\}$ :

$$\Phi(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^N \zeta_k \Phi_k(\xi, \eta), \tag{1}$$

где  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N)$  – неизвестный вектор мод. В качестве линейно независимой системы функций использованы кусочно-линейные функции, для которых функция aberrаций в пределах  $k$ -го сегмента

$$\Phi_k(\xi, \eta) = (\alpha_k + \beta_k(\xi - \xi_k) + \gamma_k(\eta - \eta_k)) \delta(\xi - \xi_k, \eta - \eta_k),$$

где  $(\xi_k, \eta_k) = \mathbf{r}_k$  – координаты центра  $k$ -го сегмента;  $\beta_k, \gamma_k$  – локальные наклоны ВФ (угловые aberrации), нормированные на отношение  $(\lambda/a)$ ;  $\lambda$  – длина волны;  $a$  – характерный размер апертуры (радиус).

Предполагается, что АОС осуществляет компенсацию вектора мод  $\zeta$ , используя вектор управления  $\zeta_u = (\zeta_{u1}, \zeta_{u2}, \dots, \zeta_{uN})$ . В этом случае задача управления сводится к определению управления, при котором  $\zeta - \zeta_u \rightarrow 0$ .

Уравнение относительно вектора управления для точечного источника имеет вид

$$H(\mathbf{f}, z, \zeta_u) = J(\mathbf{f}, z, \zeta), \tag{2}$$

где  $H(\mathbf{f}, z, \zeta_u)$  – оптическая передаточная функция (ОПФ) на относительной пространственной частоте  $\mathbf{f} = (\xi, \eta)$  при заданной расфокусировке  $z$  и неизвестном векторе мод  $\zeta$ ;  $J(\mathbf{f}, z, \zeta)$  – измеренная ОПФ. С точностью до постоянного множителя [1]

$$H(\mathbf{f}, z, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi + \xi', \eta + \eta') G_0(\xi + \xi', \eta + \eta') \times G^*(\xi', \eta') G_0^*(\xi', \eta') \delta r', \tag{3}$$

где  $G_0(\xi, \eta) = P(\xi, \eta)e^{-iz(\xi + \eta)^2}$  – функция зрачка, содержащая aberrации, соответствующие заданной расфокусировке  $z$ ;  $P(\xi, \eta)$  – характеристическая функция зрачка;  $G = e^{i2\pi\Phi(\xi, \eta)}$  – функция зрачка с неизвестной функцией aberrаций; «\*» – символ комплексного сопряжения. Предлагается решать уравнение (2), исходя из итерационной схемы метода Ньютона:

$$\zeta_u^{n+1} = \left[ \frac{\partial H(\mathbf{f}, z; \zeta_u^n)}{\partial \zeta} \right]^{-1} \left[ J(\mathbf{f}, z; \zeta) - H(\mathbf{f}, z; \zeta_u^n) + \frac{\partial H(\mathbf{f}, z; \zeta)}{\partial \zeta} \zeta_u^n \right]. \tag{4}$$

Принимая начальное приближение  $\zeta_u^0 = 0$ , на первом шаге управление

$$\zeta_u^1 = \left[ \frac{\partial H(\mathbf{f}, z; 0)}{\partial \zeta} \right]^{-1} [J(\mathbf{f}, z; \zeta) - H(\mathbf{f}, z; 0)], \tag{5}$$

которое сразу обрабатывает АОС, и далее получаем схему (4), но уже с новой функцией  $J(\mathbf{f}, z; \zeta - \zeta_u^1)$ . В дальнейшем алгоритм переходит к новому шагу в соответствии с (5). Поэтому для точной аппаратной реализации схема (4) приобретает упрощенный вид

$$\frac{\partial H(\mathbf{f}, z; 0)}{\partial \zeta} \zeta_u^{n+1} = \Delta H(\mathbf{f}, z; \zeta), \tag{6}$$

где  $\Delta H(\mathbf{f}, z; \zeta) = J(\mathbf{f}, z; \zeta) - H(\mathbf{f}, z; 0)$ . Подробно аппаратная реализация алгоритма (6) рассмотрена в [2]. В [3] показано, что ОПФ в области малых пространственных частот, величина которых имеет смысл относительного смещения в плоскости зрачка на вектор  $\mathbf{f} = -(\xi, \eta)$  в формуле (3), принимает, с точностью до постоянного множителя, упрощенный вид, позволяющий анализировать матрицу производных:

$$H(\mathbf{f}, z; \zeta) = \sum_{k=1}^n e^{-iz\mathbf{f}\mathbf{r}_k} e^{i2\pi\mathbf{f}\zeta_k}. \tag{7}$$

На малых пространственных частотах влияние фазировки ничтожно мало, поэтому моды сегмента в

(7)  $\zeta_k = (\beta_k, \gamma_k)$ . Это означает, что на таких частотах задача юстировки отделяется от задачи фазировки. Кроме того, задача юстировки на малых пространственных частотах позволяет использовать итерационную схему (6), когда источник является протяженным [3], с помощью приближенного равенства

$$H(\mathbf{f}, z; \zeta) \approx [H(\mathbf{f}, 0; 0) + i2\pi S \mathbf{f} \zeta_m] J(\mathbf{f}, z; \zeta) / J(\mathbf{f}, 0; \zeta), \quad (8)$$

где  $S$  – площадь апертуры зрачка;  $\zeta_m$  – средний наклон ВФ, определяемый моментами первого порядка от распределения интенсивности  $I(x, y)$  в изображении:

$$\zeta_m = \left( \frac{M_{10}}{M_{00}}, \frac{M_{01}}{M_{00}} \right);$$

$$M_{st} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(x, y) x^s y^t dx dy,$$

и может быть измерен. Отметим, что измерение ОПФ в (8) ведется в двух плоскостях, соответствующих  $z \neq 0$  и  $z = 0$ .

В работах [2, 3] задача определения вектора мод сводилась к решению системы уравнений

$$\frac{\partial H(f_j, z; 0)}{\partial \zeta_u} \zeta_u^{n+1} = \Delta H(f_j, z; \zeta), \quad j = \overline{1, N}, \quad (9)$$

получаемых из (6) выбором  $N$  частот, обеспечивающих наилучшую обусловленность матрицы производных, элементы которой легко получить из (7):

$$\frac{1}{i2\pi} \left\{ \frac{\partial H(\mathbf{f}, z; 0)}{\partial \zeta} \right\}_{N \times n} = \{ \mathbf{f} e^{-izr_k} \}_{N \times n}.$$

Задача выбора частот  $f_j$ , имеющая размерность  $2N$ , решалась методом подбора и сильно усложнялась с увеличением числа сегментов. Аналитическое решение было найдено только для трехсегментного зеркала.

В данной статье предлагается определение управления  $\zeta_u$  по функционалам изображения точечного источника с помощью итерационной схемы (6) в следующем виде:

$$\frac{\partial \Re_j [H(\mathbf{f}, z; 0)]}{\partial \zeta} \zeta_u^{n+1} = \Re_j [\Delta H(\mathbf{f}, z; \zeta)], \quad j = \overline{1, N}, \quad (10)$$

где  $\Re_j$  – линейные функционалы от  $H$  как функции пространственной частоты. Такой метод позволяет выбрать функционалы  $\Re_j$  так, чтобы матрица производных в уравнении (10) имела заданные свойства, и, кроме того, использование всей области малых частот исключает опасность отсутствия выборочных частот  $f_j$  в источнике излучения, наличие которых является необходимым условием работы итерационной схемы (9). Условие для определения функционала запишем в виде

$$\int_{\theta(\mathbf{f})} \frac{\partial H(\mathbf{f}, z; 0)}{\partial \zeta_k} F_j(\mathbf{f}) d\mathbf{f} = \delta_{jk}, \quad k = \overline{1, N}, \quad (11)$$

где  $\delta_{jk}$  – символ Кронекера;  $\theta(\mathbf{f})$  – область малых частот интегрирования. Неизвестную скалярную функцию  $F_j(\mathbf{f})$  рассмотрим как

$$F_j(\mathbf{f}) = \sum_{s=1}^n \left[ \frac{\partial H(\mathbf{f}, z; 0)}{\partial \zeta_s} \right]^* \lambda_{js}. \quad (12)$$

Таким образом, определение функционала свелось к выбору вектора  $\lambda_j$ . Подстановка (12) в (11) дает систему уравнений для  $\lambda_j$

$$i2\pi \sum_{s=1}^n \left[ \int_{\theta(\mathbf{f})} \frac{\partial H(\mathbf{f}, z; 0)}{\partial \zeta_k} \left( \frac{\partial H(\mathbf{f}, z; 0)}{\partial \zeta_s} \right)^* d\mathbf{f} \right] \lambda_{js} = \delta_{jk},$$

$$k = \overline{1, n},$$

или

$$j2\pi \Gamma \lambda_j = \mathbf{c}_j, \quad (13)$$

где  $\Gamma$  – ганкелева матрица размером  $n \times n$  с блочными элементами

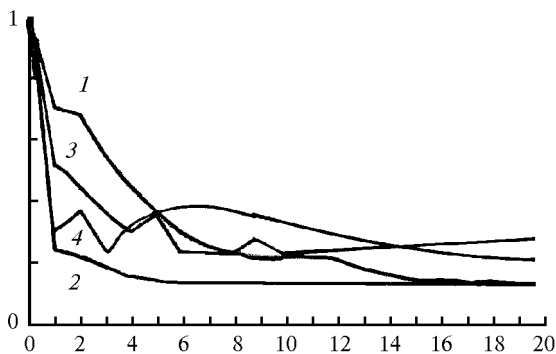
$$\Gamma_{ks} = \int_{\theta(\mathbf{f})} \frac{\partial H(\mathbf{f}, z; 0)}{\partial \zeta_k} \left[ \frac{\partial H(\mathbf{f}, z; 0)}{\partial \zeta_s} \right]^* d\mathbf{f} = \mathbf{f}^T \mathbf{f} \int_{\theta(\mathbf{f})} e^{-iz\mathbf{f}(r_k - r_s)} d\mathbf{f};$$

$\mathbf{c}_j$  – вектор с нулевыми элементами, кроме  $c_{jk} = 1$ . Элементы вектора производных  $dH(\mathbf{f}, z; 0)/d\zeta$  являются линейно независимыми функциями, поэтому решение системы (13) для  $\lambda_j$ ,  $j = \overline{1, N}$ , существует. Такой выбор векторов  $\mathbf{c}_j$  определяет единичную матрицу левой части (10), поэтому итерационная схема принимает вид

$$\zeta_u^{n+1} = \Re_j [\Delta H(\mathbf{f}, z; \zeta)], \quad j = \overline{1, N}. \quad (14)$$

Выбранные функционалы решают вопрос осциллируемости итерационной схемы, остается обеспечить ее сходимость. Этого можно достичь подбором параметров оптической системы. Параметрами являются: координата плоскости регистрации изображения  $z$ , область измерения и параметр тихоновской регуляризации.

Решение системы (14) проводилось для функционалов (11), где интегрирование осуществлялось в круге радиусом  $|\mathbf{f}| = 0,15$  для мод аббераций порядка  $w = 0,64$  при расфокусировке  $z = 5$ . В принятых относительных координатах  $w = 0,61$  соответствует смещению центрального луча сегмента на радиус кружка Эйри. Первоначальное распределение мод полагалось равным  $\pm w$ .



Моделирование алгоритма юстировки сегментного зеркала проводилось в предположении, что измерение  $J(\mathbf{f}, z; \zeta)$  известно в одной плоскости  $z = 0$  в области  $\theta(\mathbf{f})$ , если источник точечный, и в плоскостях  $z \neq 0$  и  $z = 0$ , если источник протяженный и неизвестный. Отношение  $J(\mathbf{f}, z; \zeta)/J(\mathbf{f}, 0; \zeta)$  для (9) моделировалось как искаженный вариант отношения  $H(\mathbf{f}, z; \zeta)/H(\mathbf{f}, 0; \zeta)$ . Шум рассматривался как нормальная случайная величина с заданным стандартным отклонением, при котором максимальная ошиб-

ка в вычислении  $\zeta$  по схеме (15) не превышает 5% от максимальной координаты  $|\zeta| = w$ .

На рисунке для 6-сегментного зеркала приведены относительные нормы изменения  $\|\zeta_s\|/\|\zeta_{\max}\|$  вектора скорректированных угловых наклонов ВФ. Кривыми 1 и 2 показана сходимость алгоритма для точечного и протяженного источников соответственно. Видно, что итерационный процесс сходится не к нулю, а к некоторой величине. Алгоритм компенсирует только те aberrации ВФ, которые описываются низкочастотными составляющими, что является следствием ограничения измерения ОПФ малыми пространственными частотами. Кривыми 3 и 4 показан итерационный процесс с учетом шума, накладываемого на измерение. Процесс является колебательным около некоторой величины.

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970. 527 с.
2. Дегтярев Г.Л., Маханько А.В., Чернявский А.С. // Оптика атмосферы и океана. 1996. Т. 9. N 3. С. 402–405.
3. Дегтярев Г.Л., Маханько А.В., Чернявский А.С. // Оптика атмосферы и океана. 1995. Т. 8. N 3. С. 388–392.

Казанский государственный технический университет  
им. А.Н. Туполева

Поступила в редакцию  
4 августа 1998 г.

*G.L. Degtyarev, A.V. Makhan'ko, S.M. Chernyavskii, A.S. Chernyavskii.* **Iteration Method for Segment Mirror Adjustment using Functionals of Extended Source Image.**

An apparatus realization of Newton iteration method is proposed for the problem of modal reconstruction and compensation of a segment mirror angular aberrations using functionals of an extended source image. The results of numerical simulation are presented for 6-segment mirror accounting for measurement noises.