

ОПТИКА И ФИЗИКА СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

УДК 551.511.6:621.371

Экспериментальная проверка модельной зависимости турбулентного числа Прандтля от градиентного числа Ричардсона

В.А. Банах[✉], И.Н. Смалихо, И.В. Залозная*

Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634055, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1

Поступила в редакцию 18.06.2024;
после доработки 29.08.2024;
принята к печати 04.09.2024

Получена формула, связывающая структурную характеристику флуктуаций температуры со скоростью диссипации кинетической энергии турбулентности не через коэффициент турбулентной теплопроводности, а через вертикальные градиенты средней скорости ветра и температуры и турбулентное число Прандтля. Для оценки структурной характеристики температуры по этой формуле предложена модель, основанная на обобщении известных данных о турбулентном числе Прандтля как функции градиентного числа Ричардсона. Экспериментально показано, что временные ходы структурной характеристики температуры, рассчитанной по предложенной формуле и независимо найденной из спектров флуктуаций температуры по данным измерений скорости ветра и температуры акустическими анемометрами на двух высотных уровнях, согласуются между собой. Это подтверждает правильность теоретических построений, на обобщении результатов которых основана используемая в работе модель зависимости турбулентного числа Прандтля от градиентного числа Ричардсона, и открывает возможность дистанционного определения структурной характеристики температуры из измерений скорости ветра и температуры.

Ключевые слова: структурная характеристика флуктуаций температуры, скорость диссипации кинетической энергии турбулентности, турбулентное число Прандтля, градиентное число Ричардсона; structural constant of temperature fluctuations, dissipation rate of the kinetic energy of turbulence, turbulent Prandtl number, gradient Richardson number.

Введение

Теория подобия Монина–Обухова [1] – общепризнанный инструмент описания турбулентности в приземном слое стратифицированного пограничного слоя атмосферы. В теории подобия вводится масштаб длины (масштаб Обухова [2]):

$$L = \frac{u_*^2}{\kappa_K^2 \frac{gT_*}{T_0}} \quad (1)$$

и параметр устойчивости

$$\zeta = z/L, \quad (2)$$

характеризующий термическую стратификацию атмосферы ($\zeta = 0$ – нейтральная, $\zeta > 0$ – устойчивая, $\zeta < 0$ – неустойчивая). Здесь z – высота над подстилающей поверхностью; u_* – скорость трения; $\kappa_K = 0,4$ – постоянная Кармана; g – ускорение

силы тяжести; T_0 – абсолютная температура; T_* – масштаб температуры.

Для характеристики термической стратификации используются также градиентное

$$Ri = \frac{g}{T_0} \frac{\partial T_p}{\partial z} \left(\frac{dU}{dz} \right)^{-2} \quad (3)$$

и энергетическое

$$Ri_f = Ri / Pr_T \quad (4)$$

числа Ричардсона ($Ri = 0$ – нейтральная, $Ri > 0$ – устойчивая, $Ri < 0$ – неустойчивая стратификация). Здесь T_p – средняя потенциальная температура воздуха; \mathbf{U} – вектор средней горизонтальной скорости ветра; $Pr_T = K/K_T$ – турбулентное число Прандтля; K – коэффициент турбулентной вязкости; K_T – коэффициент турбулентной теплопроводности. Турбулентное число Прандтля зависит от ζ [3].

Несмотря на продолжительную историю, исследования турбулентности в стратифицированной атмосфере сохраняют актуальность и активно проводятся в настоящее время. В частности, в [4] найдены

* Виктор Арсентьевич Банах (banakh@iao.ru); Игорь Николаевич Смалихо (smalikho@iao.ru); Ия Викторовна Залозная (iya@iao.ru).

критические значения Ri и Ri_f , определяющие пределы применимости теории подобия Монина–Обухова для описания турбулентности при устойчивой стратификации. В [5] построена теория турбулентного замыкания, а в [6, 7] создана трехпараметрическая модель турбулентности и на ее основе получены результаты численного моделирования, показывающие, что турбулентность может поддерживаться за счет энергии сдвига скорости ветра при любом значении Ri в условиях устойчивой стратификации. Одним из следствий построений [5, 6] является возрастающий тренд Pr_T с увеличением термической устойчивости в атмосфере. Этот тренд подтверждается результатами модельных и атмосферных экспериментов и численного моделирования (см. ссылки в [5, 6]). В работе [3] дан обзор существующих экспериментальных результатов и теоретических моделей зависимости Pr_T от ζ .

Известно соотношение [8]:

$$C_T^2 = a^2 \varepsilon^{-1/3} K_T \left(\frac{\partial T_p}{\partial z} \right)^2, \quad (5)$$

связывающее структурную характеристику турбулентных флуктуаций температуры C_T^2 со скоростью диссипации кинетической энергии турбулентности ε через K_T и вертикальный градиент средней потенциальной температуры, где a – числовая константа порядка единицы. Основываясь на соотношении (5), C_T^2 можно выразить через скорость диссипации ε , Ri и Pr_T . Это позволяет, воспользовавшись зависимостью $Pr_T(Ri)$, найденной по результатам [3–6], определять C_T^2 из измерений скорости диссипации ε , вертикальных градиентов средней горизонтальной скорости ветра и средней потенциальной температуры.

Цель работы – экспериментально проверить возможности определения C_T^2 по формуле (5) путем сопоставления получаемых результатов с прямыми оценками C_T^2 из спектров флуктуаций температуры. Согласие между сопоставляемыми данными может служить обоснованием возможности определения C_T^2 из измерений ε и градиентов средней скорости ветра и температуры воздуха, а также рассматриваться как еще одно подтверждение результатов

теоретических построений [5, 6] и моделей $Pr_T(\zeta)$, представленных в [3].

1. Основные соотношения

В градиентном приближении теории турбулентного замыкания ε в режиме равновесной (стационарной) турбулентности определяется уравнением [9]:

$$\varepsilon = K \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 - K_T \frac{g}{T_0} \frac{\partial T_p}{\partial z}. \quad (6)$$

Уравнение (6) можно представить в виде

$$\varepsilon = K \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 \left(1 - \frac{Ri}{Pr_T} \right). \quad (7)$$

Подставив (7) в (5), после преобразований получаем

$$C_T^2 = a^2 \frac{T_0}{g} \cdot F(Ri) \cdot \frac{\partial T_p}{\partial z} \cdot \varepsilon^{2/3}, \quad (8)$$

где

$$F(Ri) = \left(\frac{Pr_T}{Ri} - 1 \right)^{-1}. \quad (9)$$

На рис. 1 обобщены результаты работ [5, 6] и модельные зависимости Pr_T от Ri при неустойчивой стратификации [10–12], построенные по приведенным в [3] моделям $Pr_T(\zeta)$. Для перехода от $Pr_T(\zeta)$ к $Pr_T(Ri)$ использовалось соотношение $Ri = \zeta \varphi_T(\zeta) / \varphi_U^2(\zeta)$, где универсальные функции средней горизонтальной скорости φ_U и потенциальной температуры φ_T [1] рассчитывались по формулам [13]:

$$\varphi_U(\zeta) = \begin{cases} 1 + 5\zeta, & \zeta \geq 0, \\ (1 - 15\zeta)^{-1/3}, & \zeta < 0, \end{cases}$$

$$\varphi_T(\zeta) = \begin{cases} 0,7 + 7,75\zeta, & 0,2 \leq \zeta, \\ 0,95 + 5,24\zeta + 6,3\zeta^2, & 0 \leq \zeta < 0,2, \\ 0,95 + 5,24\zeta + 6,36\zeta^2, & -0,1 \leq \zeta < 0, \\ 0,274(-\zeta)^{-1/3}, & \zeta < -0,1. \end{cases}$$

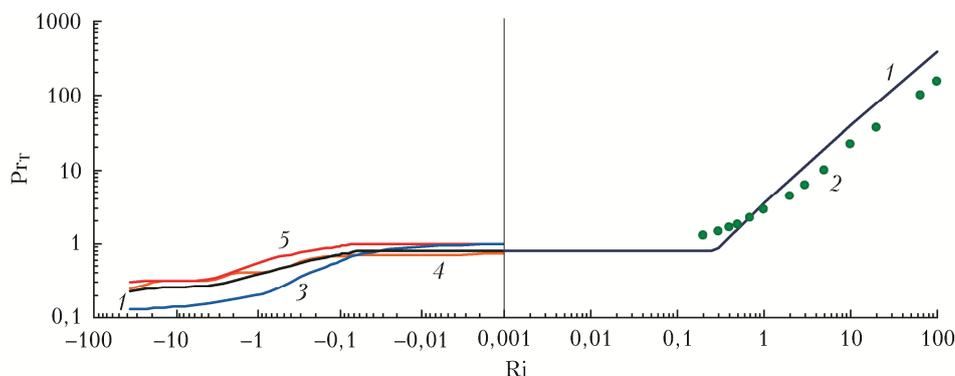


Рис. 1. Турбулентное число Прандтля как функция градиентного числа Ричардсона: кривая 1 при $Ri > 0$ – зависимость $Pr_T(Ri)$ из [6], при $Ri < 0$ – результат усреднения модельных зависимостей (3)–(5); кривая 2 – результаты моделирования [7]; кривая 3 – коспектрально-бюджетная модель [10]; кривая 4 – модель, предложенная в [11]; кривая 5 – феноменологическая модель [12] (см. цветные рисунки на сайте <http://iao.ru/ru/content/vol.37-2024/iss.11>)

Представленные на рис. 1 данные позволяют рассчитать функцию $F(Ri)$. Результаты расчета с использованием зависимости $R_{ГТ}$ от Ri в виде кривой 1 на рис. 1 показаны на рис. 2.

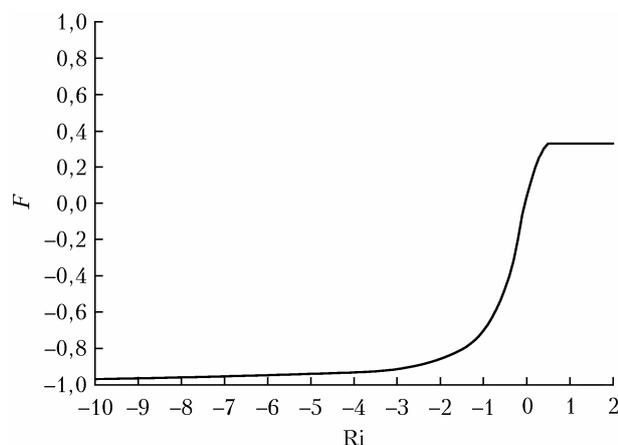


Рис. 2. Функция $F(Ri)$

Из рис. 2 видно, что при неустойчивой стратификации, когда ∂T_p и Ri отрицательны, функция $F(Ri)$ принимает отрицательные значения и с увеличением абсолютной величины Ri медленно стремится к -1 , определяя переход в режим конвективной турбулентности (формула (48) в [14]). При $Ri > 0$ функция $F(Ri)$ выходит на постоянный уровень, равный $1/3$, что в соответствии с результатами [5, 6] свидетельствует о сохранении турбулентных флуктуаций температуры при усилении термической устойчивости.

2. Эксперимент

Для верификации соотношения (8) мы воспользовались исходными данными совместных измерений двух акустических анемометров АМК-03 («Сибаналитприбор», Россия) на высотах 10 и 42 м. Измерения были проведены на Базовом экспериментальном комплексе (БЭК) ИОА СО РАН (56°06'51" с.ш., 85°06'03" в.д.) непрерывно в течение 2 сут и 8 ч начиная с 19:45 по местному времени 20.05.2020 г. Выбор этих данных объясняется тем, что в течение указанного выше промежутка времени не было ни одного технического сбоя в работе обоих акустических анемометров, наблюдалась безоблачная (ясная) погода, реализовались условия устойчивой, нейтральной и неустойчивой температурной стратификаций.

Из временных рядов скорости ветра и температуры воздуха, измеренных акустическими анемометрами, рассчитывались средние значения U и T , вертикальные градиенты dU/dz и $\partial T_p/\partial z$ и односторонние функции спектральных плотностей скорости ветра $S_U(f)$ и температуры $S_T(f)$ с использованием 30-минутного усреднения измеряемых данных. Из получаемых экспериментальных оценок спектров $S_U(f)$ и $S_T(f)$ в пределах частотного ин-

тервала от 0,1 до 2 Гц определялись ε и C_T^2 путем подгонки к экспериментальным спектрам « $-5/3$ » зависимостей от частоты f в виде

$$S_U(f) = A\varepsilon^{2/3}f^{-5/3}, \quad (10)$$

$$S_T(f) = BC_T^2f^{-5/3}, \quad (11)$$

где числовые константы $A = 0,15$ и $B = 0,037$. Рис. 3 иллюстрирует процедуру определения ε и C_T^2 из измеренных спектров $S_U(f)$ и $S_T(f)$.

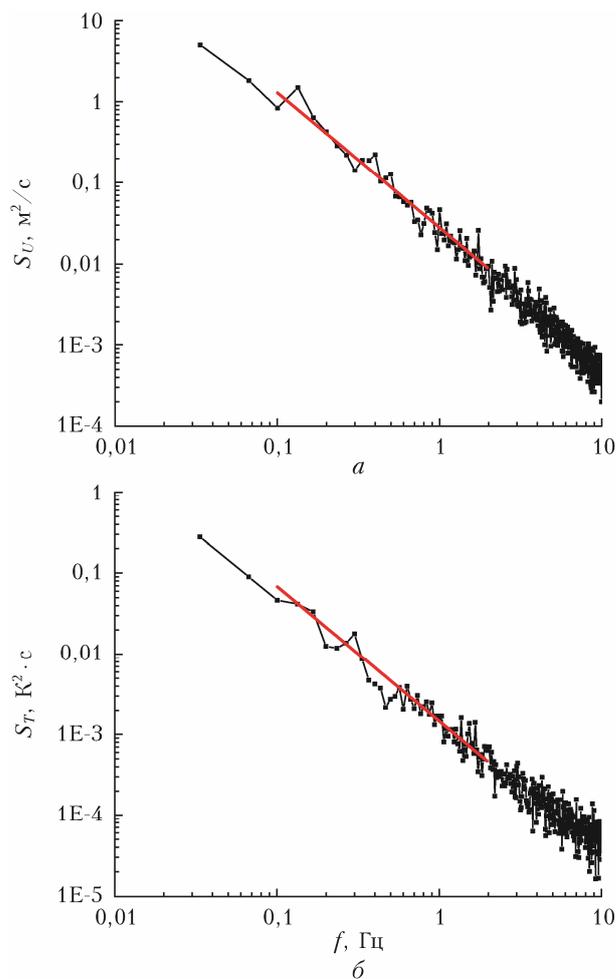


Рис. 3. Спектральные плотности скорости ветра (а) и температуры воздуха (б), полученные из измерений акустическим анемометром на высоте 42 м 21.05.2020 г. в 04:00 по местному времени (черные кривые с квадратами) и рассчитанные по формулам (10) и (11) в частотном интервале от 0,1 до 2 Гц с использованием подогнанных под экспериментальные спектры значений ε и C_T^2 (красные линии)

Отметим, что в течение всего эксперимента (2 сут и 8 ч) не было ни одного случая, чтобы среднеквадратическое отклонение измеренной спектральной плотности от подогнанной « $-5/3$ » частотной зависимости превысило статистическую погрешность оценивания спектральной плотности.

На рис. 4 представлены временные вариации параметров U , T , ε и C_T^2 , полученных из измерений

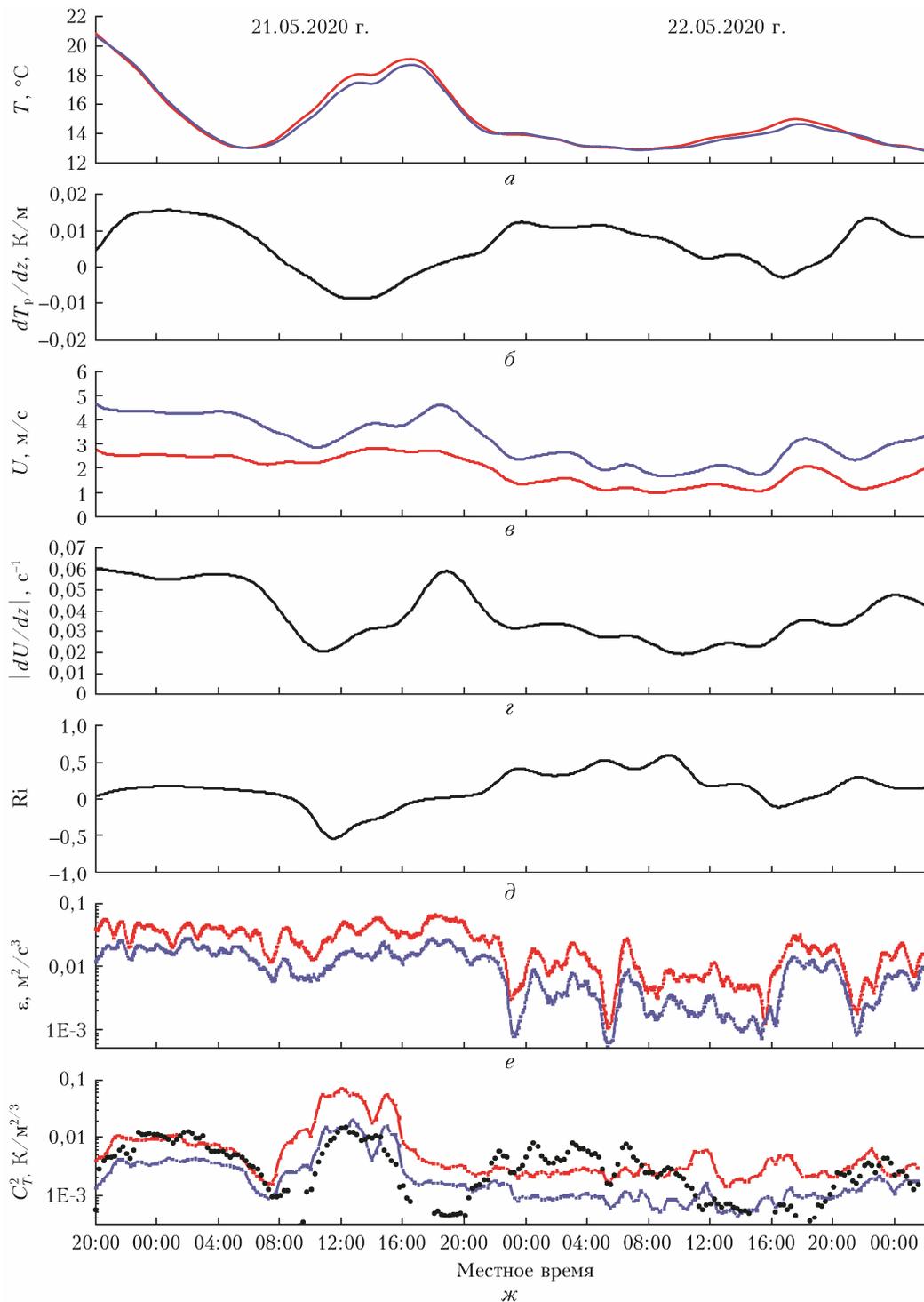


Рис. 4. Временные вариации средней температуры (а); производной от потенциальной температуры (б); средней скорости ветра (в); производной от средней скорости ветра (г); числа Ричардсона (д); скорости диссипации кинетической энергии турбулентности (е) и структурной характеристики турбулентных флуктуаций температуры (ж), полученные из измерений акустическими анемометрами на высотах 10 м (красные кривые) и 42 м (синие кривые). Черные кружочки – оценки структурной характеристики, полученные с использованием формулы (8), в высотном слое 10–42 м

акустическими анемометрами на высоте $z_1 = 10$ м и $z_2 = 42$ м, в виде красных и синих кривых соответственно. Черными кривыми показаны оценки вертикальных градиентов средней скорости ветра $[U(z_2) - U(z_1)]/\Delta z$ и средней потенциальной тем-

пературы $[T(z_2) - T(z_1)]/\Delta z + \gamma_a$, где $\Delta z = z_2 - z_1$, и рассчитанное по формуле (3) Ri . На рис. 4, ж кружочками показаны оценки C_T^2 , полученные с использованием формул (3), (8), (9) и зависимости $F(Ri)$ на рис. 2.

Из рис. 4, ж видно, что полученные по формуле (8) оценки C_T^2 вполне соответствуют значениям C_T^2 , найденным из спектральных плотностей температуры на высотах 10 и 42 м. Наибольшие отличия наблюдаются в периоды, когда происходит смена устойчивой температурной стратификации на неустойчивую, и наоборот, и ∂T_p и Ri принимают значения, близкие к нулю (см. рис. 4, б, д, ж). По-видимому, это связано с тем, что в случае $\partial T_p / \partial z \approx 0$, когда стратификация близка к нейтральной, температурные флуктуации порождаются неоднородностью температуры в горизонтальном направлении. При практическом использовании этого способа определения C_T^2 данные измерений при близких к нулю вертикальных градиентах следует исключать из рассмотрения.

В ночь на 22.05.2020 г. с 22:00 до 08:00 значения C_T^2 , рассчитанные по формуле (8), в 2-3 раза превышают найденные из температурных спектров. Возможно, это является следствием инструментальной погрешности использовавшихся акустических анемометров, составляющей 0,3–0,5 °С. Действительно, из формулы для потенциальной температуры $T_p(z, t) = T(z, t) + \gamma_a z + C_1$, где $\gamma_a = 0,098$ град/м – сухоадиабатический градиент температуры, C_1 – константа, следует, что

$$\partial T_p(z, t) / \partial z = \partial T(z, t) / \partial z + \gamma_a \quad (12)$$

определяется градиентом температуры. Из рис. 4, а видно, что температуры на высотах измерений в указанный период практически совпадают. Это означает, что их разность (∂T_p в (12)) может определяться некорректно из-за инструментальной погрешности анемометров и приводить к завышению оценок C_T^2 по формуле (8).

Заключение

В статье получена формула (8), связывающая структурную характеристику флуктуаций температуры C_T^2 со скоростью диссипации кинетической энергии турбулентности ϵ через вертикальные градиенты средней скорости ветра и средней температуры воздуха и турбулентное число Прандтля, не имеющая ограничений на диапазон изменения градиентного числа Ричардсона. Для оценки структурной характеристики по этой формуле предложена модель зависимости Pg_T от Ri , основывающаяся на результатах теоретических работ [5, 6] и известных моделях [10–12]. Представлены результаты экспериментов по определению C_T^2 по формуле (8) и из спектров флуктуаций температуры (11) по данным измерений скорости ветра и температуры акустическими анемометрами на двух высотных уровнях. Показано, что временной ход C_T^2 , рассчитанной по формуле (8), соответствует временному ходу C_T^2 , оцениваемой из спектров температуры, что подтверждает результаты [5, 6, 10–12] относительно зависимости $Pg_T(Ri)$.

Экспериментальное подтверждение соотношения (8), связывающего C_T^2 и ϵ , открывает возмож-

ность дистанционного [15] измерения C_T^2 и, следовательно, структурной постоянной турбулентных флуктуаций показателя преломления воздуха C_n^2 , характеризующей интенсивность оптической турбулентности в атмосфере, с использованием хорошо развитых методов измерения скорости ветра и скорости диссипации кинетической энергии турбулентности когерентными лидарами и измерений высотных профилей средней температуры воздуха микроволновыми радиометрами [16].

Финансирование. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 24-17-00179). Использованы экспериментальные данные, полученные в рамках госзадания ИОА СО РАН.

Список литературы

1. Монин А.С., Обухов А.М. Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы // Труды Геофиз. ин-та АН СССР. 1954. Т. 151, № 24. С. 163–187.
2. Обухов А.М. Турбулентность в температурно-неоднородной атмосфере // Труды Ин-та теорет. геофиз. 1946. Т. 1. С. 95–115.
3. Li D. Turbulent Prandtl number in the atmospheric boundary layer – where are we now? // Atmos. Res. 2019. N 216. P. 86–105.
4. Grachev A.A., Andreas E.L., Fairall C.W., Guest P.S., Persson P.O.G. The critical Richardson number and limits of applicability of local similarity theory in the stable boundary layer // Bound.-Lay. Meteorol. 2013. V. 147. P. 51–82. DOI: 10.1007/s10546-012-9771-0.
5. Zilitinkevich S.S., Elperin T., Kleorin N., Rogachevskii I., Esau I.N. A hierarchy of energy- and flux-budget (EFB) turbulence closure models for stably-stratified geophysical flows // Bound.-Lay. Meteorol. 2013. V. 146. P. 341–373. DOI: 10.1007/s10546-012-9768-8.
6. Курбацкий А.Ф., Курбацкая Л.И. О турбулентном числе Прандтля в устойчиво стратифицированном атмосферном пограничном слое // Изв. РАН. Физ. атмосф. и океана. 2010. Т. 46, № 2. С. 187–196.
7. Kurbatskaya L.I. Eddy mixing, gravity waves and the intermittent turbulence in atmospheric flows under stronger stratification // AIP Conf. Proc. 2021. V. 2351. P. 040008-1–10. DOI: 10.1063/5.0052012.
8. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.
9. Stull R.B. An Introduction to Boundary Layer Meteorology. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1988. 666 p.
10. Li D., Katul G.G., Zilitinkevich S.S. Revisiting the turbulent Prandtl number in an idealized atmospheric surface layer // J. Atmos. Sci. 2015. V. 72. P. 2394–2410. DOI: 10.1175/JAS-D-14-0335.1.
11. Businger J.A., Wyngaard J.C., Izumi Y., Bradley E.F. Flux-profile relationships in the atmospheric surface layer // J. Atmos. Sci. 1971. V. 28. P. 181–191. DOI: 10.1175/1520-0469(1971)028<0181:FPRITA>2.0.CO;2.
12. Li D., Katul G., Bou-Zeid E. Mean velocity and temperature profiles in a sheared diabatic turbulent boundary layer // Phys. Fluid. 2012. V. 24, N 10. P. 105105. DOI: 10.1063/1.4757660.
13. Банах В.А., Смалихо И.Н. Рефракция лазерного пучка на приземных трассах // Оптика атмосф. и океана. 1998. Т. 11, № 7. С. 694–699.

14. *Kantha L., Luce H.* Mixing coefficient in stably stratified flows // *J. Phys. Oceanogr.* 2018. V. 48. P. 2649–2665. DOI: 10.1175/JPO-D-18-0139.1.
15. *Банах В.А., Смалыхо И.Н., Гордеев Е.В., Сухарев А.А., Фалиц А.В.* Определение параметров турбулентности стратифицированного пограничного слоя атмосферы с использованием средств дистанционного зондирования // *Оптика атмосф. и океана.* 2024. Т. 37, № 10. С. 830–834.
16. *Банах В.А., Фалиц А.В., Шерстобитов А.М., Смалыхо И.Н., Сухарев А.А., Гордеев Е.В., Залозная И.В.* Об оценивании высоты слоя турбулентного перемешивания из высотно-временных распределений числа Ричардсона // *Оптика атмосф. и океана.* 2022. Т. 35, № 11. С. 912–917. DOI: 10.15372/AOO20221106; *Banakh V.A., Falits A.V., Sherstobitov A.M., Smalikhov I.N., Sukharev A.A., Gordeev E.V., Zaloznaya I.V.* On estimation of the turbulent mixing layer altitude from the altitude-time distributions of the Richardson number // *Atmos. Ocean. Opt.* 2023. V. 36, N 1. P. 30–40.

V.A. Banakh, I.N. Smalikhov, I.V. Zaloznaya. Experimental verification of the model dependence of the turbulent Prandtl number on the gradient Richardson number.

A formula has been derived which connects the structural constant of temperature fluctuations with the dissipation rate of the kinetic energy of turbulence not through the turbulent thermal diffusivity, but through the vertical gradients of average wind speed and air temperature and the turbulent Prandtl number. To estimate the structural characteristics of temperature using this formula, we suggest a model based on the generalization of known data on the turbulent Prandtl number as a function of the gradient Richardson number. It has been experimentally shown that the time series of the structural constant of temperature, which is calculated using the proposed formula and independently found from the spectra of temperature fluctuations based on measurements of wind speed and air temperature with sonic anemometers at two altitudes, are consistent with each other. This confirms the correctness of the theoretical constructions, which serve the basis for the model dependence of the turbulent Prandtl number on the gradient Richardson number.