«Оптика атмосферы и океана», **24**, № 11 (2011)

ОПТИКА СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

УДК 51-73:535.2

Метод расчета моментов функции распределения Вигнера лазерных пучков в турбулентной атмосфере

Д.А. Маракасов, Д.С. Рычков

Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1

Поступила в редакцию 19.05.2011 г.

Предлагается метод расчета моментов функции распределения Вигнера для лазерных пучков любой начальной формы, распространяющихся в турбулентной атмосфере с произвольными спектром корреляционной функции флуктуаций показателя преломления и профилем структурной характеристики. Приведены основные соотношения для расчета моментов распределения Вигнера и некоторых параметров пучка.

Ключевые слова: лазерный пучок, турбулентность, функция взаимной когерентности, распределение Вигнера, численные методы; laser beam, turbulence, mutual coherence function, Wigner distribution function, numerical methods.

Введение

Имея известной функцию взаимной когерентности (ФВК), можно рассчитать многочисленные статистические характеристики оптической волны, распространяющейся в турбулентной атмосфере, такие как средний эффективный радиус, угловая расходимость, профиль средней интенсивности, M^2-фактор [1–5]. На основе известного решения параболического уравнения для ФВК [6–8], авторами этой статьи был разработан метод расчета ФВК для произвольных условий распространения лазерного пучка на трассе в турбулентной атмосфере [9].

Функция распределения Вигнера (ФРВ) определена как Фурье-преобразование по разностной переменной от ФВК $\Gamma_2(x;\rho_c,\rho_d)$ [5, 10, 11]:

$$h(x;\rho_c,\theta)=\lambda^{-2}\int d\rho_d\,\Gamma_2(x;\rho_c,\rho_d)\exp(ik\rho_d\theta), \qquad (1)$$

где $k_0=2\pi/\lambda$ – длина волны;

$$\Gamma_2(x;\rho_c,\rho_d)=\left\langle U(x,\rho_c+\rho_d/2)U^*(x,\rho_c-\rho_d/2)\right\rangle;$$

$U(x,\rho)$ – поле оптической волны; x – координата вдоль направления распространения; $\rho=(y,z)$ – вектор в поперечной к направлению распространения плоскости; c и d – индексы, обозначающие суммарную и разностную поперечные координаты. Моменты ФРВ (МФРВ) определяются как интеграл от произведения ФРВ и поперечных координат [5, 10, 11]:

$$\left\langle y^k z^l \theta_y^m \theta_z^n\right\rangle=P^{-1}\int y^k z^l \theta_y^m \theta_z^n h(x;\rho,\theta)\,d\rho\, d\theta, \qquad (2)$$

$$P=\int h(x;\rho,\theta)\,d\rho\, d\theta, \qquad (3)$$

где P – мощность пучка. Один из часто используемых параметров пучка – M^2-фактор – может быть представлен как комбинация нескольких МФРВ второго порядка [5, 10, 11]: суммы радиальных моментов

$k=2,\ l=m=n=0$ и $l=2,\ k=m=n=0$,

$$\left\langle \rho^2\right\rangle=\left\langle y^2\right\rangle+\left\langle z^2\right\rangle$$

(эффективный радиус пучка), суммы угловых моментов

$m=2,\ k=l=n=0$ и $n=2,\ k=l=m=0$,

$$\left\langle \theta^2\right\rangle=\left\langle \theta_y^2\right\rangle+\left\langle \theta_z^2\right\rangle$$

(угловая расходимость) и суммы перекрестных моментов

$k=m=1,\ l=n=0$ и $l=n=1,\ k=m=0$,

$$\left\langle \rho\cdot\theta\right\rangle=\left\langle y\theta_y\right\rangle+\left\langle z\theta_z\right\rangle,$$

$$M^2(x)=k_0\sqrt{\left\langle \rho^2\right\rangle\left\langle \theta^2\right\rangle-\left\langle \rho\cdot\theta\right\rangle^2}. \qquad (4)$$

Для расчета ФВК оптической волны в произвольной точке на трассе в турбулентной атмосфере теперь можно использовать соотношение между спектрами ФВК в турбулентной среде и в свободном пространстве [9]:

$$\tilde{\Gamma}_2(x;\kappa,\rho_d)=\tilde{\Gamma}_2^0(x;\kappa,\rho_d)\exp\left\{-H(\rho_d,\lambda x\kappa+\rho_d)\right\}, \qquad (5)$$

где

$$\tilde{\Gamma}_2(x;\kappa,\rho_d)=\int d\rho_c\Gamma_2(x;\rho_c,\rho_d)\exp\{2\pi i\kappa\rho_c\}, \qquad (6)$$

* Дмитрий Анатольевич Маракасов (mda@iao.ru); Дмитрий Сергеевич Рычков (dsr@iao.ru).

$$\tilde{\Gamma}_2^0(x;\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\rho}_d) = \int d\boldsymbol{\rho}_c \Gamma_2^0(x;\boldsymbol{\rho}_c,\boldsymbol{\rho}_d)\exp\{2\pi i \boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\rho}_c\};$$

$\Gamma_2^0(x;\boldsymbol{\rho}_c,\boldsymbol{\rho}_d)$ — ФВК оптической волны в свободном пространстве;

$$H(\boldsymbol{\rho}_d,\boldsymbol{\rho}_d') = 2\pi k_0^2 x \times$$
$$\times \int_0^1 d\xi \int d\boldsymbol{\kappa}' \Big[1-\exp\big\{i\boldsymbol{\kappa}'\big(\xi\boldsymbol{\rho}_d + (1-\xi)\boldsymbol{\rho}_d'\big)\big\}\Big]\Phi_n(\xi x,\boldsymbol{\kappa}'); \quad (7)$$

$$\Phi_n(\xi x,\boldsymbol{\kappa}) = C_n^2(\xi x)\Phi_0(\boldsymbol{\kappa})$$

— спектр корреляционной функции флуктуаций показателя преломления среды со структурной характеристикой $C_n^2(\xi x)$, изменяющейся вдоль трассы $(0,\ x)$; векторы

$$\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_y,\ \kappa_z),\ \boldsymbol{\rho}_c = (y_c,\ z_c),\ \boldsymbol{\rho}_d = (y_d,\ z_d)$$

ортогональны оптической оси.

Используя при вычислении ФВК преимущество соотношения (5), состоящее в том, что разностная переменная $\boldsymbol{\rho}_d$ в спектрах ФВК в правой и левой частях (5) фиксирована и расчет ФВК выполняется при помощи 2D быстрого преобразования Фурье (БПФ), можно построить эффективный метод расчета МФРВ для произвольных условий на трассе при распространении пучка с любой начальной формой. Такой подход выгодно отличается от подходов [1–5], где при расчете ФВК и МФРВ выполняется прямое интегрирование в (2) с подстановкой конкретного начального распределения пучка, что весьма неудобно, поскольку для каждого начального распределения пучка необходимо выполнять операции интегрирования.

Метод расчета моментов функции распределения Вигнера

При вычислении МФРВ можно использовать спектральное представление производных дельта-функции Дирака [5] при последовательной подстановке (5), (6) в (1), (2). В результате последовательного вычисления интегралов по переменным y, z, θ_y, θ_z получим выражение для произвольного момента ФРВ:

$$\left\langle y^k z^l \theta_y^m \theta_z^n \right\rangle = (ik_0)^{-m-n}(-2\pi i)^{-k-l} P^{-1} \times$$
$$\times \left[\frac{\partial^n}{\partial y_d^n}\frac{\partial^m}{\partial z_d^m}\left(\frac{\partial^l}{\partial \kappa_z^l}\left(\frac{\partial^k}{\partial \kappa_y^k}\tilde{\Gamma}_2(x;\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\rho}_d)\right)\right)\right]\Bigg|_{\substack{\boldsymbol{\kappa}=0\\ \boldsymbol{\rho}_d=0}}. \quad (8)$$

Мощность пучка P определяется значением спектра ФВК в нулевой точке ($\boldsymbol{\kappa} = 0,\ \boldsymbol{\rho}_d = 0$):

$$P = \left[\int d\boldsymbol{\rho}_c \Gamma_2(x;\boldsymbol{\rho}_c,\boldsymbol{\rho}_d)\right]\Big|_{\boldsymbol{\rho}_d=0} = \tilde{\Gamma}_2(x;0,0) \equiv \tilde{\Gamma}_2^0(x;0,0). \quad (9)$$

Компоненты M^2-фактора согласно (8) теперь определяются следующими выражениями:

$$\left\langle \boldsymbol{\rho}^2 \right\rangle = \left\langle y^2 \right\rangle + \left\langle z^2 \right\rangle = -(4\pi^2 P)^{-1}\Big[\Delta_{\boldsymbol{\kappa}}\tilde{\Gamma}_2(x;\boldsymbol{\kappa},0)\Big]\Big|_{\boldsymbol{\kappa}=0}; \quad (10)$$

$$\left\langle \boldsymbol{\theta}^2 \right\rangle = \left\langle \theta_y^2 \right\rangle + \left\langle \theta_z^2 \right\rangle = -(k_0^2 P)^{-1}\Big[\Delta_{\boldsymbol{\rho}_d}\tilde{\Gamma}_2(x;0,\boldsymbol{\rho}_d)\Big]\Big|_{\boldsymbol{\rho}_d=0}, \quad (11)$$

$$\left\langle \boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\theta} \right\rangle = \left\langle y\theta_y \right\rangle + \left\langle z\theta_z \right\rangle =$$
$$= \lambda(4\pi^2 P)^{-1}\Big[\nabla_{\boldsymbol{\rho}_d}\left(\nabla_{\boldsymbol{\kappa}}\tilde{\Gamma}_2(x;0,\boldsymbol{\rho}_d)\right)\Big]\Big|_{\substack{\boldsymbol{\kappa}=0\\ \boldsymbol{\rho}_d=0}}, \quad (12)$$

где при вычислении суммы моментов использованы операторы

$$\nabla_{\boldsymbol{\rho}_d} = \frac{\partial}{\partial y_d}\mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z_d}\mathbf{e}_z,\ \ \nabla_{\boldsymbol{\kappa}} = \frac{\partial}{\partial \kappa_y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial \kappa_z}\mathbf{e}_z,$$
$$\Delta_{\boldsymbol{\rho}_d} = \frac{\partial^2}{\partial y_d^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_d^2},\ \ \Delta_{\boldsymbol{\kappa}} = \frac{\partial^2}{\partial \kappa_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial \kappa_z^2},$$

$\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ — единичные векторы вдоль соответствующих осей системы координат. Выражения (10)–(12) допускают после подстановки в них соотношения (5) упрощение в виде разделения на «турбулентную» и «дифракционную» части ФВК:

$$\left\langle \boldsymbol{\rho}^2 \right\rangle = -(4\pi^2 P)^{-1}\Big[\Delta_{\boldsymbol{\kappa}}\tilde{\Gamma}_2^0(x;\boldsymbol{\kappa},0)\Big]\Big|_{\boldsymbol{\kappa}=0} + 4\pi^2 x^3 C_2 T; \quad (13)$$

$$\left\langle \boldsymbol{\theta}^2 \right\rangle = -(k_0^2 P)^{-1}\Big[\Delta_{\boldsymbol{\rho}_d}\tilde{\Gamma}_2^0(x;0,\boldsymbol{\rho}_d)\Big]\Big|_{\boldsymbol{\rho}_d=0} + 4\pi^2 x C_0 T, \quad (14)$$

$$\left\langle \boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\theta} \right\rangle = \lambda(4\pi^2 P)^{-1}\Big[\nabla_{\boldsymbol{\rho}_d}\cdot\left(\nabla_{\boldsymbol{\kappa}}\tilde{\Gamma}_2^0(x;\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\rho}_d)\right)\Big]\Big|_{\substack{\boldsymbol{\kappa}=0\\ \boldsymbol{\rho}_d=0}} - 4\pi^2 x^2 C_1 T. \quad (15)$$

Здесь C_m есть интегралы по трассе от профиля структурной характеристики

$$C_m = \int_0^1 d\xi (1-\xi)^m C_n^2(\xi), \quad (16)$$

а T — интеграл от спектра $\Phi_0(q)$:

$$T = \int_0^\infty \Phi_0(q) q^3 dq. \quad (17)$$

«Дифракционные» компоненты, не зависящие от турбулентных параметров, представлены первыми слагаемыми в правой части уравнений (13)–(15). В случае неоднородного профиля $C_n^2(\xi x)$ в соотношениях (13)–(15) следует заменить произведение $C_m T$ интегралами вида

$$C_m T \to \int_0^1 d\xi (1-\xi)^m C_n^2(\xi) \int_0^\infty \Phi_0(\xi,q) q^3 dq, \quad (18)$$

где спектр $\Phi_0(\xi,q)$ изменяется вдоль трассы.

Таким образом, выражения (13)–(17) представляют собой метод расчета моментов ФРВ, в котором вычисление «дифракционных» компонент моментов сводится к последовательному применению БПФ к полю волны в плоскости приемника:

$$\Delta_{\boldsymbol{\kappa}}\tilde{\Gamma}_2^0(x,\boldsymbol{\kappa},0)\Big|_{\boldsymbol{\kappa}=0} = -4\pi^2 \int d\boldsymbol{\rho}_c \rho_c^2 U_0(x,\boldsymbol{\rho}_c) U_0^*(x,\boldsymbol{\rho}_c), \quad (19)$$

$$\Delta_{\rho_d}\tilde{\Gamma}_2^0(x,0,\rho_d)\Big|_{\rho_d=0} =$$

$$= -2\pi^2 \int d\rho_c \,\mathrm{Re}\Big[U_0^*(x,\rho_c) \int d\mathbf{q} q^2 \exp(-2\pi i\rho_c \mathbf{q})\tilde{U}_0(x,\mathbf{q}) +$$

$$+ \Big(\int d\mathbf{q}_1 \exp(-2\pi i\rho_c\mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1\tilde{U}_0(x,\mathbf{q}_1)\Big) \times$$

$$\times \Big(\int d\mathbf{q}_2 \exp(2\pi i\rho_c\mathbf{q}_2)\mathbf{q}_2\tilde{U}_0^*(x,\mathbf{q}_2)\Big)\Big], \qquad (20)$$

$$\nabla_{\rho_d}\Big(\nabla_{\boldsymbol{\kappa}}\tilde{\Gamma}_2^0(x,\boldsymbol{\kappa},\rho_d)\Big)\Big|_{\substack{\boldsymbol{\kappa}=0\\ \rho_d=0}} = 4\pi^2 \int d\rho_c\rho_c \,\mathrm{Re} \times$$

$$\times \Big(U_0^*(x,\rho_c) \int d\boldsymbol{\kappa}' \exp(-2\pi i\boldsymbol{\kappa}'\rho_c)\boldsymbol{\kappa}'\tilde{U}_0(x,\boldsymbol{\kappa}')\Big), \qquad (21)$$

а «турбулентные» компоненты сводятся к вычислению относительно простых интегралов (16), (17). Поле в плоскости x рассчитывается с помощью известного соотношения [12], связывающего Фурье-спектры полей в плоскостях x_1 и x_2:

$$\tilde{U}(x_2,\boldsymbol{\kappa}) = \tilde{U}(x_1,\boldsymbol{\kappa})\exp\big(i\pi\lambda(x_2 - x_1)\kappa^2\big). \qquad (22)$$

Таким образом, задача вычисления «дифракционной» части МФРВ решается последовательным применением БПФ к распределению поля в начальной плоскости.

В случае, когда начальное поле частично когерентное, можно воспользоваться соотношением между спектрами ФВК оптической волны в начальной и произвольной точках трассы:

$$\tilde{\Gamma}_2^0(x;\boldsymbol{\kappa},\rho_d) = \tilde{\Gamma}_2^0(0;\boldsymbol{\kappa},\rho_d + \lambda x\boldsymbol{\kappa}), \qquad (23)$$

что дает линейное соотношение между производными спектров ФВК в указанных точках трассы:

$$\Delta_{\rho_d}\tilde{\Gamma}_2^0(x;\boldsymbol{\kappa},\rho_d)\Big|_{\substack{\boldsymbol{\kappa}=0\\ \rho_d=0}} = \Delta_{\rho_d}\tilde{\Gamma}_2^0(0;\boldsymbol{\kappa},\rho_d + \lambda x\boldsymbol{\kappa})\Big|_{\substack{\boldsymbol{\kappa}=0\\ \rho_d=0}} =$$

$$= \Delta_{\rho_d}\tilde{\Gamma}_2^0(0;0,\rho_d)\Big|_{\rho_d=0}, \qquad (24)$$

$$\Delta_{\boldsymbol{\kappa}}\tilde{\Gamma}_2^0(x;\boldsymbol{\kappa},\rho_d)\Big|_{\substack{\boldsymbol{\kappa}=0\\ \rho_d=0}} = \Delta_{\boldsymbol{\kappa}}\tilde{\Gamma}_2^0(0;\boldsymbol{\kappa},\rho_d + \lambda x\boldsymbol{\kappa})\Big|_{\substack{\boldsymbol{\kappa}=0\\ \rho_d=0}} =$$

$$= (\lambda x)^2 \Delta_{\rho_d}\tilde{\Gamma}_2^0(0;0,\rho_d)\Big|_{\rho_d=0} + 2\lambda x\nabla_{\rho_d} \times$$

$$\times \Big(\nabla_{\boldsymbol{\kappa}}\tilde{\Gamma}_2^0(x;\boldsymbol{\kappa},\rho_d)\Big)\Big|_{\substack{\boldsymbol{\kappa}=0\\ \rho_d=0}} + \Delta_{\boldsymbol{\kappa}}\tilde{\Gamma}_2^0(0;\boldsymbol{\kappa},0)\Big|_{\boldsymbol{\kappa}=0}, \qquad (25)$$

$$\nabla_{\rho_d}\Big(\nabla_{\boldsymbol{\kappa}}\tilde{\Gamma}_2^0(x;\boldsymbol{\kappa},\rho_d)\Big)\Big|_{\substack{\boldsymbol{\kappa}=0\\ \rho_d=0}} = \nabla_{\rho_d}\Big(\nabla_{\boldsymbol{\kappa}}\tilde{\Gamma}_2^0(0;\boldsymbol{\kappa},\rho_d)\Big)\Big|_{\substack{\boldsymbol{\kappa}=0\\ \rho_d=0}} +$$

$$+ \lambda x \Delta_{\rho_d}\tilde{\Gamma}_2^0(0;0,\rho_d)\Big|_{\rho_d=0}. \qquad (26)$$

Важно отметить, что при наличии явного аналитического выражения для спектра ФВК оптической волны в свободном пространстве выражения (12)–(17) легко использовать для получения аналитических выражений моментов ФРВ любого порядка, прибегая к численным методам только на последнем этапе.

Заключение

Получены основные соотношения для расчета моментов функции распределения Вигнера и некоторых статистических параметров оптической волны с любым начальным распределением амплитуды и фазы при распространении в турбулентной атмосфере с произвольными спектром корреляционной функции показателя преломления и профилем структурной характеристики. Подробно описан весь алгоритм вычисления моментов ФРВ второго порядка для определения M^2-фактора в турбулентной атмосфере по распределению поля лазерного пучка в плоскости источника. Представление алгоритма расчетов в виде последовательного применения БПФ позволяет оптимизировать расчеты по сравнению с [5].

1. *Eyyuboğlu H.T. and Sermutlu E.* Calculation of average intensity via semi-analytic method // Appl. Phys. B. 2010. V. 98, N 4. P. 865–870.
2. *Chu X., Liu Z., Wu Y.* Propagation of a multi-Gaussian beam in turbulent atmosphere in a slant path // J. Opt. Soc. Amer. A. 2008. V. 25, N 1. P. 74–79.
3. *Ji X., Chen X., Lü B.* Spreading and directionality of partially coherent Hermite–Gaussian beams propagating through atmospheric turbulence // J. Opt. Soc. Amer. A. 2008. V. 25, N 1. P. 21–28.
4. *Ji X., Chen X., Chen S., Li X., Lu B.* Influence of atmospheric turbulence on the spatial correlation properties of partially coherent flat-topped beams // J. Opt. Soc. Amer. A. 2007. V. 24, N 11. P. 3554–3563.
5. *Yuan Y., Cai Y., Qu J., Eyyuboğlu H.T., Baykal Y.K., Korotkova O.* M^2-factor of coherent and partially coherent dark hollow beams propagating in turbulent atmosphere // Opt. Express. 2009. V. 17, N 20. P. 344–356.
6. *Долин Л.С.* Уравнения для корреляционных функций волнового пучка в хаотически неоднородной среде // Изв. вузов. Радиофиз. 1968. Т. 11, № 6. С. 840–849.
7. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.
8. *Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. 2. М.: Мир, 1981. 318 с.
9. *Маракасов Д.А., Рычков Д.С.* Метод расчета функции взаимной когерентности оптической волны в турбулентной атмосфере // Оптика атмосф. и океана. 2010. Т. 23, № 9. С. 761–767.
10. *Martinez-Herrero R., Mejias P.M.* Second-order spatial characterization of hard-edge diffracted beams // Opt. Lett. 1993. V. 18, N 19. P. 1669–1671.
11. *Martinez-Herrero R., Mejias P.M., Arias M.* Parametric characterization of coherent, lowest-order Gaussian beams propagation through hard-edged apertures // Opt. Lett. 1995. V. 20, N 2. P. 124–126.
12. *Кандидов В.П.* Метод Монте-Карло в нелинейной статистической оптике. // Успехи физ. наук. 1996. Т. 166, № 12. С. 1309–1338.

D.A. Marakasov, D.S. Rychkov. **Method of evaluation of moments of Wigner distribution function of optical beams in the turbulent atmosphere.**

Method of evaluation of moments of Wigner distribution function of optical wave with complex form of initial distribution of its amplitude and phase for various kinds of profiles of structural characteristic of refractive index of medium is proposed. Basic expressions of the evaluation method and some beam parameters are derived.