

ДИСТАНЦИОННОЕ ЗОНДИРОВАНИЕ АТМОСФЕРЫ,
ГИДРОСФЕРЫ И ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

УДК 535.361

В.В. Веретенников

**Метод последовательного разложения
в теории лидарного зондирования плотных сред***Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск*

Поступила в редакцию 5.07.2007 г.

Для функции, определяющей в лидарном сигнале отношение вклада, обусловленного многократным рассеянием в рамках малоуглового приближения теории переноса, к однократно рассеянному сигналу, построен асимптотический ряд по степеням малого параметра — угла поля зрения приемника. Установлена связь коэффициентов ряда с микроструктурными параметрами среды. Численно оценены границы применимости асимптотического приближения.

Введение

Проблема определения размеров облачных капель с использованием методов лидарного зондирования уже давно привлекает внимание специалистов по атмосферной оптике. Перспективным инструментом для ее решения служат лидары с переменным углом поля зрения (MFOV-лидары) [1–6]. Компонента сигнала, обусловленная многократным рассеянием (MP), зависит от размеров частиц, информацию о которых можно получить, решая обратную задачу для лидарного уравнения. Существующие математические описания лидарного сигнала, полученные из теории переноса излучения [4, 6], не вполне пригодны для практического решения данной задачи ввиду сложности аналитических выражений и трудоемкости проводимых по ним вычислений. В подобных случаях в математике часто заменяют рассматриваемую функцию на более простую, разлагая ее в функциональный ряд.

При описании сигнала MFOV-лидара количественная мера MP часто задается по отношению к величине однократно рассеянного сигнала. Одним из эффективных методов приближения указанной функции, заданной в виде интеграла, являются асимптотические разложения. Такой подход был развит в теории лазерного зондирования при многократном рассеянии на основе анализа асимптотического поведения лидарных сигналов при больших полях зрения [6–8]. Противоположный случай построения асимптотического ряда по степеням малого параметра, в качестве которого выступает угол поля зрения приемника, рассмотрен в предлагаемой статье. Определена связь коэффициентов ряда с микроструктурными параметрами среды. Численным путем оценено влияние количества учитываемых в разложении членов ряда типа малоугловой индикатрисы рассеяния и оптической толщины на точность асимптотического приближения.

1. Постановка задачи и метод решения**1.1. Исходные соотношения**

Объектом нашего рассмотрения будет следующая функция (корректирующий фактор):

$$m(\gamma_r) = (z\gamma_r) \int_0^\infty J_1(z\gamma_r v) F(v) dv, \quad (1)$$

которая определяет относительный вклад многократного рассеяния в лидарном сигнале при зондировании сред с сильной анизотропией рассеяния, таких, например, как облака или взвесь частиц в морской воде. В формуле (1) приняты следующие обозначения: γ_r — угол поля зрения приемной системы лидара; z — расстояние от лидара до области, в которой происходит рассеяние зондирующего импульса в обратном направлении; $J_1(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка; v — пространственная частота;

$$F(v) = \exp[g(v)] - 1; \quad (2)$$

$$g(v) = 2 \int_0^z \sigma(z-s) \tilde{x}(vs) ds, \quad (3)$$

$\sigma(z)$ — коэффициент рассеяния на длине волны зондирующего излучения λ ; $\tilde{x}(p)$ — преобразование Ганкеля малоугловой индикатрисы рассеяния $x(\gamma)$, удовлетворяющей условию нормировки $2\pi \int_0^\infty x(\gamma) \gamma d\gamma = 1$.

Формула (1) следует из теории переноса излучения в рамках широко используемой модели [6, 9, 10], согласно которой учет многократного рассеяния производится в малоугловом приближении, а рассеяние на большие углы учитывается в однократном приближении. При этом дополнительно предполагается, что

– источник излучения является точечным мононаправленным и посылает $\delta(t)$ -импульс в положительном направлении оси Oz ;

– источник и приемник излучения расположены в плоскости $z = 0$, а их оптические оси совмещены;

– функция чувствительности приемника по угловой координате имеет круговую симметрию и ступенчатый вид;

– пространственная изменчивость лидарного сигнала в плоскости приемной апертуры не учитывается;

– изменением индикатрисы рассеяния можно пренебречь в окрестности направления назад.

Перечисленные условия и упрощения не являются принципиальными для дальнейшего изложения. Они не ограничивают общности приводимых ниже результатов и могут быть легко учтены в рамках рассматриваемой модели.

1.2. Асимптотическое разложение корректирующего фактора

Задача состоит в построении асимптотического ряда для функции $m(\gamma_r)$ (1) при $\gamma_r \rightarrow 0$. Решение данной проблемы основано на использовании асимптотических свойств функции $F(v)$ при $v \rightarrow \infty$, а именно: предполагается, что при $v \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическое разложение

$$F(v) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n v^{-n}, \quad a_n \neq 0. \quad (4)$$

Указанное свойство накладывает определенные требования на поведение преобразования Ганкеля индикатрисы $\tilde{x}(p)$, которые, как правило, выполняются для типичных моделей, описывающих рассеяние в малоугловой области. Например, в случае индикатрисы рассеяния в приближении дифракции Фраунгофера зависимость функции $g(v)$ (3) при достаточно больших значениях v может быть представлена в виде [6]:

$$g(v) = a/v. \quad (5)$$

Для однородного слоя толщиной L при рассеянии на сферических частицах соотношение (5) выполняется при

$$v \geq v_{\max} = 2kR/L, \quad (6)$$

и коэффициент при v

$$a = \frac{16}{3\pi} \sigma k \bar{r}, \quad (7)$$

где $k = 2\pi/\lambda$; R – максимальный радиус частиц; σ – коэффициент рассеяния; радиус $\bar{r} = \langle r^3 \rangle / \langle r^2 \rangle$, скобки $\langle \cdot \rangle$ означают усреднение по ансамблю частиц.

Подставляя выражение $g(v)$ (5) в ряд Тейлора для функции $F(v)$ (2), получим точное равенство в формуле (4) при $v \geq v_{\max}$. Аналогичный результат можно получить для той части малоугловой индикатрисы рассеяния, которая формируется по законам геометрической оптики.

Принимая во внимание (6), для последующего изложения удобно перейти в формуле (1) к безразмерным переменным

$$\eta = v/v_{\max}, \quad \xi = (z\gamma_r)v_{\max} \quad (8)$$

и переписать (1) в виде

$$m(\xi) = \xi I(\xi), \quad I(\xi) = \int_0^{\infty} K(\xi\eta) F(\eta) d\eta, \quad K(\eta) = J_1(\eta). \quad (9)$$

С учетом сказанного, функция $F(\eta)$ при $\eta \geq 1$ разлагается в ряд по отрицательным степеням η :

$$F(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \eta^{-n}. \quad (10)$$

Коэффициенты разложения

$$a_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{4}{3\pi} \frac{\bar{r}}{R} \tau \right)^n \quad (11)$$

зависят от оптической толщины слоя $\tau = 2\sigma L$ и отношения среднего \bar{r} радиуса частиц к максимальному R . Для частиц одинаковых размеров $\bar{r} = R$ и зависимость коэффициентов a_n от радиуса частиц исчезает.

Дадим краткое описание алгоритма построения асимптотического ряда для интегрального члена $I(\xi)$ в (9) при $\xi \rightarrow 0$ [11]. Предварительно определим функции $F_{-n}(\eta)$ и $K_n(\eta)$, для которых имеют место рекуррентные соотношения:

$$F_{-n}(\eta) = \eta[F_{-n+1}(\eta) - a_n/\eta]; \quad (12)$$

$$K_n(\eta) = \eta^{-1}[K_{n-1}(\eta) - K_{n-1}(0)]; \quad (13)$$

$$F_0(\eta) = F(\eta), \quad K_0(\eta) = K(\eta), \quad n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Далее разобьем область интегрирования в (9) на два интервала с границей между ними в точке $\eta = 1$. Затем вычтем из функции $F(\eta)$ первый член ряда (10), а из ядра $K(\eta) = J_1(\xi)$ – его значение в нуле $K(0)$. В результате после перегруппировки слагаемых и добавления соответствующих компенсирующих членов можно получить следующее представление для интеграла $I(\xi)$ (9):

$$I(\xi) = b_0 A_0 + a_1 B_0(\xi) + \xi I_1(\xi), \quad (15)$$

где

$$A_n = \int_0^1 F_{-n}(\eta) d\eta + \int_1^{\infty} F_{-n-1}(\eta) \eta^{-1} d\eta; \quad (16)$$

$$B_n(\xi) = \int_0^1 K_{n+1}(\eta) d\eta + \int_1^{\infty} K_n(\eta) \eta^{-1} d\eta - K_n(0) \ln \xi, \quad (17)$$

$$I_n(\xi) = \int_0^{\infty} K_n(\xi\eta) F_{-n}(\eta) d\eta \quad (18)$$

и $b_n = K_n(0)$. Заметим, что величины b_n являются коэффициентами при разложении ядра $K(\eta)$ в степенной ряд (в рассматриваемом случае коэффициентами

ряда $J_1(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \eta^k$. Правая часть формулы (15)

содержит функцию $I_1(\xi)$, к которой применяется аналогичная процедура, и т.д. В результате окончательно приходим к следующему асимптотическому разложению интеграла $I(\xi)$ по степеням малого параметра ξ :

$$I(\xi) \sim \sum_{n=0}^{\infty} D_n(\xi) \xi^n, \quad \xi \rightarrow 0; \quad (19)$$

$$D_n(\xi) = b_n A_n + a_{n+1} B_n(\xi). \quad (20)$$

Коэффициенты a_n и A_n зависят от функции $F(v)$, а коэффициенты b_n и B_n определяются видом ядра $K(\eta)$. Для перехода к функции $m(\gamma_r)$ ряд (19) следует домножить на ξ и возвратиться к прежней переменной

$$\gamma_r = \frac{L}{z} \frac{\xi}{2kR}. \quad (21)$$

Рассмотрим первый член ряда (19). Он соответствует выражению (15) с отброшенным последним слагаемым, которое определяет погрешность данного приближения. Для ядра $K(\eta) = J_1(\eta)$ имеем $b_0 = 0$, $B_0(\xi) = 1$, $I(\xi) = a_1$ и в результате получим следующую формулу:

$$m_1(\gamma_r) = \left[\frac{8}{3\pi} \frac{z}{L} \tau k \bar{r} \right] \gamma_r, \quad (22)$$

согласно которой корректирующий фактор $m(\gamma_r)$ в первом приближении асимптотического разложения является линейной функцией угла γ_r и растет пропорционально оптической толщине среды τ и среднему радиусу частиц \bar{r} .

Полезно сравнить полученный результат с тем, что дает теория лидарного зондирования при учете только одного акта рассеяния на малые углы (так как при зондировании также учитывается однократное рассеяние на большие углы, то это — приближение двукратного рассеяния). Для этого приближения в [12] получено следующее выражение:

$$\hat{m}(\gamma_r) = 2\pi\tau \left[\int_0^{\tilde{\gamma}} x(\gamma) \gamma d\gamma + \tilde{\gamma} \int_{\tilde{\gamma}}^{\infty} x(\gamma) d\gamma \right], \quad (23)$$

в котором $\tilde{\gamma} = (z/L)\gamma_r$. Разлагая функцию $\hat{m}(\gamma_r)$ (23) в ряд Тейлора в окрестности точки $\gamma_r = 0$ и ограничиваясь квадратичным приближением, получим

$$\hat{m}(\gamma_r) \approx 2\pi\tau \left[\gamma_r \frac{z}{L} \int_0^{\infty} x(\gamma) d\gamma - \frac{\gamma_r^2}{2} \left(\frac{z}{L} \right)^2 x(0) \right]. \quad (24)$$

Можно показать [6], что для малоугловой индикатрисы рассеяния в дифракционном приближении $x(\gamma) = x^{(D)}(\gamma)$ выполняются следующие соотношения:

$$\int_0^{\infty} x^{(D)}(\gamma) d\gamma = \frac{4}{3\pi^2} k \bar{r}, \quad x^{(D)}(0) = \frac{1}{4\pi} k^2 \bar{r}^2, \quad (25)$$

где $\bar{r}^2 = \langle r^4 \rangle / \langle r^2 \rangle$.

Сравнивая формулы (22) и (24), нетрудно заметить, что они будут полностью идентичны, если в (24) не учитывается квадратичный член. Таким образом, можно сделать вывод о том, что многократное рассеяние не учитывается в первом члене $D_0(\xi)$ асимптотического ряда (19), который определяется линейным вкладом малоуглового однократного рассеяния. Данный факт является следствием обращения в нуль коэффициента $b_0 = 0$ при разложении в ряд функции Бесселя $J_1(\eta)$.

В отличие от $D_0(\xi)$ следующий член ряда (19) $D_1(\xi) = b_1 A_1 + a_2 B_1(\xi)$, в котором $b_1 = 1/2$,

$$A_1 = \int_0^1 \eta F(\eta) d\eta - a_1 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{a_k}{k-1}, \quad (26)$$

$$a_2 = 8 \left(\frac{1}{3\pi} \frac{\bar{r}}{R} \tau \right)^2, \quad (27)$$

$$B_1(\xi) = \int_0^1 \left[\frac{K(\eta)}{\eta} - \frac{1}{2} \right] \frac{d\eta}{\eta} + \int_1^{\infty} \frac{K(\eta)}{\eta^2} d\eta - \frac{1}{2} \ln \xi, \quad (28)$$

содержит информацию о рассеянии всех кратностей. Интегралы в формуле (28) определяются численно, и их сумма приближенно равна 0,308. В итоге для функции $B_1(\xi)$ получаем простую формулу

$$B_1(\xi) = 0,308 - (1/2) \ln \xi. \quad (29)$$

Связь $D_1(\xi)$ с приближением (24) легко установить, если подставить в формулу (26) вместо $F(\eta)$ функцию $g(\eta)$ и приравнять к нулю все коэффициенты a_n кроме a_1 . При этом оказывается, что учет второго члена асимптотического ряда (19) приводит к результату, совпадающему с квадратичной поправкой в (24). Рассмотренный пример свидетельствует о работоспособности асимптотического разложения (19) при малых оптических толщинах в рамках приближения двукратного рассеяния. В следующем разделе будет дана оценка эффективности применения ряда (19) при учете многократного рассеяния в общем случае на основе сравнения с результатами численных расчетов по формуле (1).

2. Результаты численного моделирования

Для практического применения рассмотренного асимптотического разложения при описании многократного рассеяния в лидарном сигнале требуется оценка его точности и границ применимости. С этой целью по асимптотическим формулам, приведенным в предыдущем разделе, были рассчитаны зависимости функции $m(\gamma_r)$, которые затем сравнивались с результатами контрольных расчетов по исходной формуле (1). В качестве модельной среды рассматривался плоский однородный слой с постоянными оптическими характеристиками, образованный частицами радиусом $R = 10$ мкм. Расстояние до ближней границы слоя составляло 1 км; дальность $z = 2$ км. Длина волны излучения $\lambda = 0,55$ мкм. В численных исследованиях было рассмотрено влияние порядка

асимптотического приближения, а также влияние оптической толщины в интервале значений $1 \leq \tau \leq 4$ и индикатрисы рассеяния среды, которая рассматривалась как в приближении дифракции Фраунгофера $x(\gamma) = x^{(D)}(\gamma)$, так и при дополнительном учете ее геометрооптической части.

Результаты расчетов приведены на рис. 1–4. На рис. 1 изображены первые три слагаемые асимптотического ряда (19), дополнительно умноженные на ξ (кривые 1, 2' и 3') как функции угла γ_r . Кривые 2 и 3 представляют, соответственно, сумму двух и трех таких слагаемых. Рассматриваемые зависимости получены для индикатрисы рассеяния в D -приближении, $x(\gamma) = x^{(D)}(\gamma)$, и позволяют оценить вклад членов различного порядка в частичные суммы ряда (19).

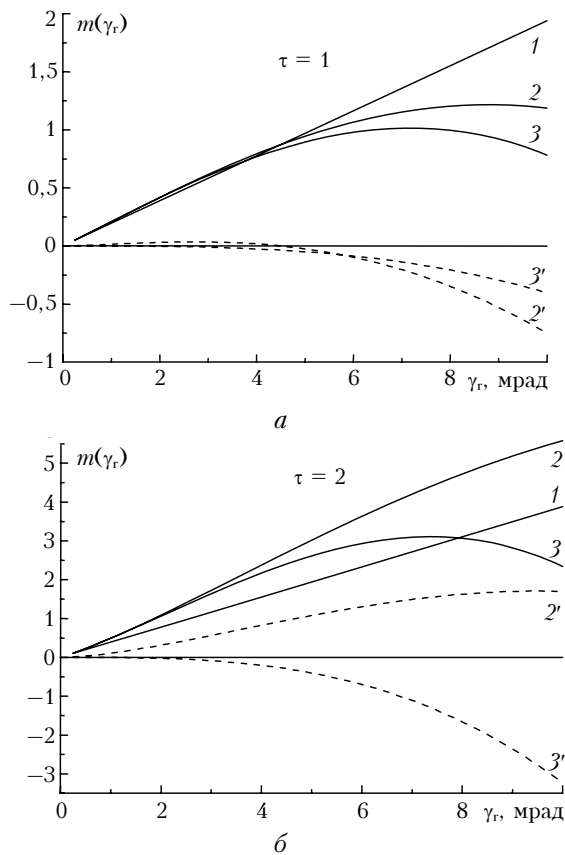


Рис. 1. Угловые зависимости частичных сумм (кривые 1–3) асимптотического ряда для функции $m(\gamma_r)$ и его линейная (1), квадратичная (2') и кубическая части (3') при двух значениях оптической толщины; дифракционное приближение

При небольшой оптической толщине ($\tau = 1$, рис. 1, а) и углах $\gamma_r < 5$ мрад основной вклад в сумму вносит линейный член (кривая 1). Влияние квадратичного (кривые 2, 2') и кубического (кривые 3, 3') членов убывает вместе с ростом их порядка и становится заметным при $\gamma_r > 5$ мрад. Следует отметить, что при малых оптических толщинах, начиная с γ_r , несколько больше 4 мрад, кривая 2' уходит в область отрицательных величин. Это обусловлено влиянием логарифмической зависимости коэффициента $B_1(\xi)$ (29), который меняет знак при $\xi = 1,85$.

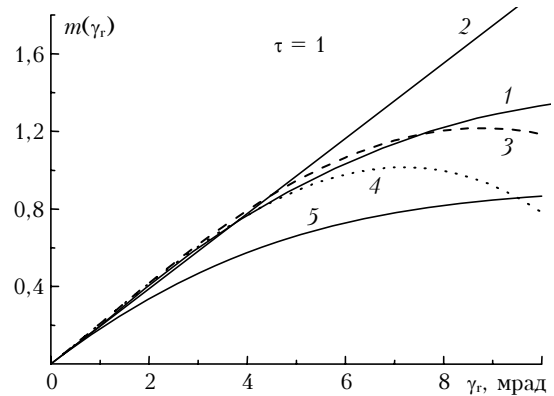


Рис. 2. Сравнение зависимостей $m^{(D)}(\gamma_r)$, рассчитанных по исходной формуле (1) (кривая 1) и асимптотическим формулам в линейном (2), квадратичном (3) и кубичном (4) приближении; кривая 5 – приближение двукратного рассеяния

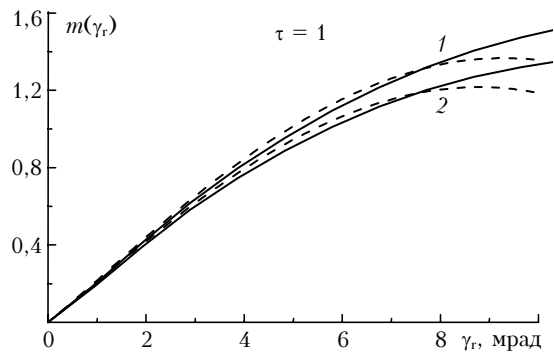


Рис. 3. Угловые зависимости $m(\gamma_r)$ с учетом (1) и без учета (2) геометрооптической компоненты индикатрисы рассеяния; сплошные линии – расчет по точным формулам в малоугловом приближении; штриховые линии – расчет по асимптотическим формулам в квадратичном приближении

Для условий моделирования это соответствует углу $\gamma_r = 3,9$ мрад. В результате учет квадратичного члена приводит к отклонению вниз аппроксимационной кривой 2 по отношению к линейному приближению (кривая 1).

Еще большее отклонение дает учет кубического слагаемого (кривые 3, 3'), которое вносит отрицательный вклад при любых γ_r , поскольку для коэффициента асимптотического ряда $D_2(\xi) = b_2 A_2 + a_3 B_2(\xi)$ имеем $b_2 = 0$ и $B_2(\xi) = \text{const} = -1/3$. Отсюда следует окончательное выражение для кубического члена:

$$D_2 \xi^3 = -(1/18)[m_1(\gamma_r)]^3, \quad (30)$$

где $m_1(\gamma_r)$ описывает линейную часть асимптотического приближения согласно формуле (22). Коэффициент a_n определяется малоугловым рассеянием кратности n . Поэтому можно считать, что кубический член асимптотического ряда определяется малугловым рассеянием третьей кратности. Его вклад растет пропорционально третьим степеням среднего радиуса частиц и оптической толщины, что наблюдается при сравнении кривых 3 и 3' на рис. 1. В рамках рассматриваемого приближения, как видно из рис. 1, б, кубический член остается единственным фактором,

вносящим отрицательный вклад в частичную сумму асимптотического ряда при увеличении оптической толщины.

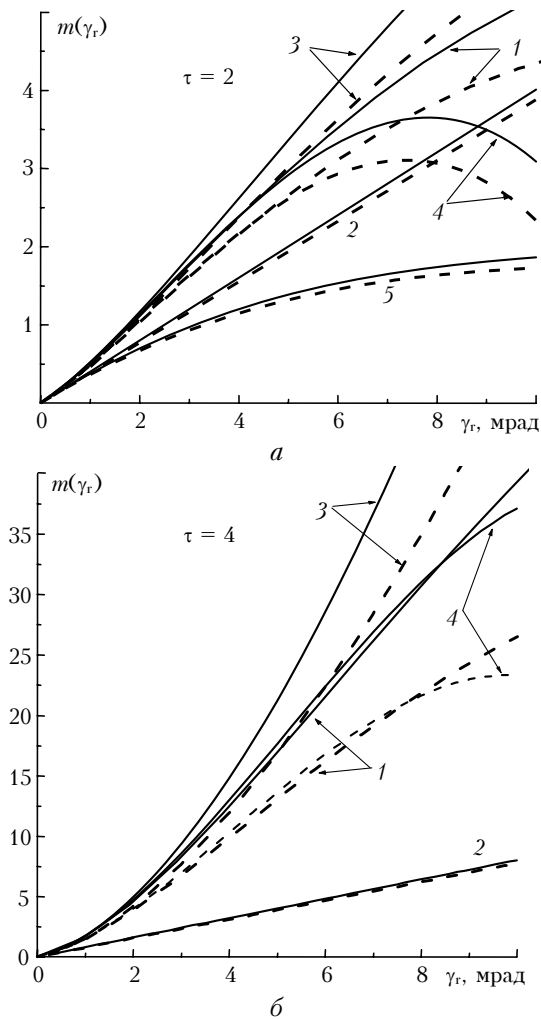


Рис. 4. Линейная (2), квадратичная (3) и кубическая (4) аппроксимации функции $m(\gamma_r)$ асимптотическим рядом; 1 – расчет по точным формулам в малоугловом приближении; 5 – приближение двукратного рассеяния; расчет без учета (штриховые линии) и с учетом (сплошные линии) геометрооптической компоненты индикатрисы

Рис. 2 дает представление о соотношении между точным поведением функции $m(\gamma_r) = m^{(D)}(\gamma_r)$ (кривая 1) и ее приближениями в виде частичных сумм асимптотического ряда (кривые 2–4). Для сравнения приведена зависимость $\hat{m}^{(D)}(\gamma_r)$ (23) в приближении двукратного рассеяния (кривая 5). Как видно из рис. 2, квадратичное приближение (кривая 3) обеспечивает высокую точность до $\gamma_r = 9$ мрад ($\delta = 5,5\%$, δ – относительная ошибка), в то время как дополнительный учет кубического члена (кривая 4) хотя и приводит к незначительному повышению точности, но в более узком диапазоне углов поля зрения, и уже при $\gamma_r > 6$ мрад ошибка δ превышает 6%.

Интересно отметить также следующий факт. Как уже отмечалось, линейные части асимптотического приближения (22) и приближения двукратно-

го рассеяния (24) совпадают. На рис. 2 им соответствует прямая 1, которая уже при малых γ_r заметно расходится функцией $\hat{m}^{(D)}(\gamma_r)$ (кривая 5), рассчитанной по формуле (23), однако остается достаточно близкой к точной зависимости $m^{(D)}(\gamma_r)$ (кривая 1) до $\gamma_r = 4$ мрад.

Отмеченные свойства асимптотического разложения функции $m(\gamma_r)$ сохраняют силу при добавлении в индикатрису рассеяния геометрооптической составляющей. Для примера на рис. 3 показано сравнение зависимостей $m(\gamma_r)$, рассчитанных по точным формулам (сплошные линии) и по асимптотическим формулам второго порядка (штриховые линии) для индикатрис рассеяния с учетом (кривые 1) и без учета (кривые 2) в них вклада геометрооптической компоненты. Как видно из представленных результатов, диапазон углов γ_r , для которых асимптотическое разложение обеспечивает приемлемую точность, практически не зависит от выбора модели малоугловой индикатрисы рассеяния.

На рис. 4 представлено поведение частичных сумм асимптотического ряда при возрастании оптической толщины τ . Сравнивая результаты (рис. 4, а) для $\tau = 2$ с ранее рассмотренным случаем ($\tau = 1$; см. рис. 2 и 3), можно отметить следующие особенности. Во-первых, с увеличением τ произошло значительное сужение области углов поля зрения (менее 1 мрад), в которой можно ограничиться линейным приближением, представленным на рис. 4, а прямыми 2 для двух типов индикатрис рассеяния. Неучет рассеяния высоких кратностей, которое при $\tau = 2$ и достаточно большой величине γ_r начинает играть существенную роль, в линейном приближении обуславливает более низкое расположение прямых 2 по отношению к точным зависимостям $m(\gamma_r)$ (кривые 1).

Квадратичное приближение также не обеспечивает достаточной точности и приводит к завышенным значениям $m(\gamma_r)$ (кривые 3). Наконец, учет отрицательного кубического члена компенсирует влияние первых двух слагаемых и в результате ошибка такого приближения, например при $\gamma_r = 7$ мрад, уменьшается до 10–11% (при вариациях в выборе индикатрисы рассеяния).

Отмеченные тенденции проявляются с ростом оптической толщины в еще большей степени и могут быть проиллюстрированы результатами расчетов функции $m(\gamma_r)$ при $\tau = 4$, представленными на рис. 4, б. В данном примере учет кубического члена приводит к понижению ошибки приближения при $\gamma_r = 9$ мрад с 58–72 до 2–6% в зависимости от типа индикатрисы рассеяния.

Заключение

Нами рассмотрена новая математическая модель, предназначенная для определения вклада многократного рассеяния (корректирующего фактора) в лидарных сигналах при зондировании плотных сред.

В качестве исходного выбрано известное интегральное выражение для корректирующего фактора, полученное в рамках малоуглового приближения с учетом однократного рассеяния на большие углы. С использованием метода последовательного разложения для корректирующего фактора в работе построен асимптотический ряд по степеням малого параметра — угла поля зрения приемника лидара. Процедура построения асимптотического ряда основана на учете свойств оптической передаточной функции в области высоких пространственных частот. Показано, что коэффициенты асимптотического ряда зависят от интегральных параметров микроструктуры среды и могут быть легко рассчитаны по простым аналитическим формулам. В частности, для всех нечетных членов разложения единственным таким параметром является средний радиус частиц, определяемый отношением третьего момента функции распределения частиц по размерам ко второму моменту.

Методом численного моделирования оценены точность и границы применимости разработанной асимптотической модели. В частности, установлено, что для учета вклада многократного рассеяния в лидарных сигналах при зондировании капельных облаков достаточно не более трех членов асимптотического ряда. При этом погрешность асимптотического приближения не превышает 5–10% для углов поля зрения до 9 мрад. Указанные оценки справедливы для малоугловой индикатрисы рассеяния, как в дифракционном приближении, так и при дополнительном учете вклада ее геометрооптической составляющей. Оптическая толщина также оказывает слабое влияние на точность асимптотического приближения в диапазоне рассмотренных величин от 1 до 4.

Рассмотренное асимптотическое приближение для корректирующего фактора может найти применение при разработке алгоритмов восстановления размеров облачных капель из лидарных измерений.

V. V. Veretennikov. The method of sequential expansion in the theory of lidar sensing of dense media.

An asymptotic series in powers of small parameter (angle of the receiver's field of view) is built for the function determining the contribution ratio of the lidar signal due to multiple scattering in terms of small-angle approximation of the transfer theory, to the single-scattering signal. A connection between the series coefficients and microstructural parameters of medium is found. The limits of applicability of the asymptotic approximation are estimated.

1. *Bissonnette L.R., Hutt D.L.* Multiply scattered aerosol lidar returns: inversion method and comparison with *in situ* measurements // *Appl. Opt.* 1995. V. 34. N 30. P. 6959–6975.
2. *Benayahu Y., Ben-David A., Fastig S., Cohen A.* Cloud-droplet-size distribution from lidar multiple-scattering measurements // *Appl. Opt.* 1995. V. 34. N 9. P. 1569–1578.
3. *Eloranta E.W.* Practical model for the calculation of multiply scattered lidar returns // *Appl. Opt.* 1998. V. 37. N 12. P. 2464–2472.
4. *Полонский И.Н., Зеде Э.П., Кацев И.Л.* О лазерном зондировании теплых облаков и определении параметров их микроструктуры // *Изв. РАН. Физ. атмосф. и океана.* 2001. Т. 37. № 5. С. 672–680.
5. *Bissonnette L.R., Roy G., Roy N.* Multiple-scattering-based lidar retrieval: method and results of cloud probing // *Appl. Opt.* 2005. V. 44. N 26. P. 5565–5581.
6. *Зуев В.Е., Белов В.В., Веретенников В.В.* Теория систем в оптике дисперсных сред. Томск: Изд-во «Спектр», ИОА СО РАН, 1997. 402 с.
7. *Веретенников В.В.* Метод асимптотического сигнала в теории лидарного зондирования при многократном рассеянии // *Оптика атмосф. и океана.* 2001. Т. 14. № 1. С. 42–48.
8. *Веретенников В.В.* Разделение дифракционной и геометрооптической компонент в асимптотических оценках многократно рассеянных лидарных сигналов // *Оптика атмосф. и океана.* 2002. Т. 15. № 10. С. 867–872.
9. *Ермаков Б.В., Ильинский Ю.А.* О распространении световых импульсов в рассеивающей среде // *Изв. вузов СССР. Радиофиз.* 1969. Т. 12. № 5. С. 694–701.
10. *Долин Л.С., Савельев В.А.* О характеристиках сигнала обратного рассеяния при импульсном облучении мутной среды узким направленным световым пучком // *Изв. АН СССР. Физ. атмосф. и океана.* 1971. Т. 7. № 5. С. 505–510.
11. *Риекстыньши Э.Я.* Асимптотические разложения интегралов. Т. 1. Рига: Зинатне, 1974. 392 с.
12. *Веретенников В.В.* Лидарное уравнение в приближении второго порядка для сред с сильновытянутой индикатрисой рассеяния // *Оптика атмосф. и океана.* 2001. Т. 14. № 10. С. 917–923.