«Оптика атмосферы», **1**, № 11 (1988) УДК 551.501

Л.Л. Гырдев

НЕПУАССОНОВСКИЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ ФОТООТСЧЕТОВ, РЕГИСТРИРУЕМЫХ ИНЕРЦИОННОЙ ПЕРЕСЧЕТНОЙ СХЕМОЙ

Получены и проанализированы выражения для среднего значения и дисперсии фотоотсчетов, регистрируемых инерционной пересчетной схемой при флуктуирующей энергии светового сигнала.

При измерении энергии слабых лидарных сигналов в режиме счета фотонов необходимо определять среднее значение $\bar{n}_0$ и дисперсию Dn_0 фотоотсчетов n_0 за время измерительного строба T, поскольку эти величины связаны со средним значением $\bar{E}$ и дисперсией DE попадающей за это же время на фотоприемник энергии E сигнала. В случае инерционной пересчетной схемы среднее значение $\bar{n}$ и дисперсия Dn регистрируемых фотоотсчетов n не соответствуют среднему значению $\bar{n}_0$ и дисперсии Dn_0 реально возникших под воздействием света числа одноэлектронных импульсов. Если статистика последних пуассонова, для схемы с мертвым временем продлевающегося типа τ зависимости $n = f(\bar{n}_0)$ и $Dn = \varphi(\bar{n}_0)$ можно записать в виде [1] (более точные, но и более громоздкие выражения приведены в [2, 3]):

$$f(\bar{n}_0) = \bar{n}_0 \exp(-\bar{n}_0\tau/T), \;\; \varphi(\bar{n}_0) = \bar{n}_0 \exp(-\bar{n}_0\tau/T)\left[1 - \exp(-\bar{n}_0\tau/T)\cdot 2\frac{\tau}{T}\right]. \qquad (1)$$

Результаты для пересчетных схем с несколькими инерционными узлами разных типов приведены в [1, 4].

Если энергия E флуктуирует от строба к стробу, распределение $p(n_0)$ соответствующих одноэлектронных импульсов не будет пуассоновским. Цель данной работы — оценить степень влияния на зависимости $\bar{n} = f(\bar{n}_0)$ и $Dn = \varphi(\bar{n}_0)$ флуктуаций энергии E, т.е. отклонений функции $p(\bar{n}_0)$ от распределения Пуассона, предполагая, что распределение $p(E)$ энергии сигнала симметричное относительно $\bar{E}$ и узкое, т.е. относительная дисперсия $\sigma_0^2 = DE/\bar{E}^2 \ll 1$. Сформулированную выше задачу решали, по-видимому, впервые для случая гамма-распределения энергии сигнала авторы работ [2, 3, 5] при помощи аналитических подходов и моделирования на ЭВМ процессов счета фотонов.

1. Выражения (1) для $\bar{n}$ и Dn можно интерпретировать как полученные условным усреднением при заданном значении энергии E. Для того чтобы получить зависимости $\bar{n} = f(\bar{n}_0)$ и $Dn = \varphi(\bar{n}_0)$ в случае непуассоновского распределения $p(n_0)$, необходимо провести дополнительное усреднение по E, используя соответствующую $p(n_0)$ плотность распределения энергии $p(E)$.

Запишем выражение (1) в виде

$$\bar{n}_E = f(\bar{n}_{0E}), \;\; Dn_E = \varphi(\bar{n}_{0E}), \qquad (2)$$

где $\bar{n}_{0E} = \alpha E$; α — квантовая эффективность фотоприемника, а индекс «E» означает, что моменты относятся к заданному значению E энергии сигнала. Исходя из (2), для среднего (и по флуктуациям E) значения фотоотсчетов $\bar{n}$ получим

$$\bar{n} = \int_0^\infty \bar{n}_E p(E)\,dE = F(\bar{n}_0), \qquad (3)$$

где $\bar{n}_0 = \alpha\bar{E}$, $\bar{E}$ — среднее значение энергии. Условный средний квадрат фотоотсчетов при заданном значении E получаем из (2) в виде

$$\overline{n_E^2} = Dn_E + \bar{n}_E^2 = \varphi(\bar{n}_{0E}) + f^2(\bar{n}_{0E}). \qquad (4)$$

Из (3) и (4) для безусловной дисперсии Dn фотоотсчетов получим

$$Dn = \int_0^\infty \overline{n_E^2}\, p(E)\,dE - \bar{n}^2. \qquad (5)$$

2. Рассмотрим случай узкого и симметричного относительно $\bar{E}$ распределения $p(E)$. Будем предполагать, что $\sigma_0^2 \ll 1$ и ширина $w \sim \bar{E}\sigma_0$ распределения $p(E)$ намного меньше (в терминах энергии сигнала) характерного масштаба Δ изменения функций $f(\bar{n}_{0E})$ и $\varphi(\bar{n}_{0E})$. При выполнении этих предположений в формулах (3) и (5) можно разложить $\bar{n}_E$ и $\bar{n}_E^2$ в ряд по степеням $(E-\bar{E})$ и провести почленное интегрирование, ограничиваясь при этом лишь членами не выше $\sim \sigma_0^2$ в конечном результате. Таким образом, получаются асимптотические выражения для $\bar{n}$ и Dn, независящие от конкретного вида распределения $p(E)$, определяемые лишь зависимостями $f(\bar{n}_{0E})$ и $\varphi(\bar{n}_{0E})$. Если функции $f(\bar{n}_{0E})$ и $\varphi(\bar{n}_{0E})$ заданы в виде (1), то можно принять, что $\Delta = \bar{n}_{0l}/\alpha = T/(\alpha\tau)$, где $\bar{n}_{0l} = T/\tau$ — точка максимума зависимости $f(\bar{n}_{0E})$ и локального минимума зависимости $\varphi(\bar{n}_{0E})$. Тогда условие $w \ll \Delta$ принимает вид $\alpha\bar{E}\sigma_0\tau/T = \bar{n}_0\sigma_0\tau/T \ll 1$, а для $\bar{n}$ и Dn соответственно получаем

$$\bar{n} = F(\bar{n}_0) = \bar{n}_0 \exp(-\bar{n}_0\tau/T)\left[1 - \sigma_0^2\bar{n}_0\frac{\tau}{T}\left(1 - \frac{\bar{n}_0\tau}{2T}\right) + O(\sigma_0^4)\right]; \tag{6}$$

$$Dn = \Phi(\bar{n}_0) = F(\bar{n}_0)\left\{1 - F(\bar{n}_0) + \left(1 - 2\frac{\tau}{T}\right)F(\bar{n}_0)\left[1 + \sigma_0^2\cdot\left(1 - n_0\frac{\tau}{T}\right)^2\right]\right\}. \tag{7}$$

3. Рассмотрим коротко для сравнения случай гамма-распределения энергии $p(E)$. В этом случае (подробно см. в [2, 3, 6, 7], исходя из (3)—(5) для $\bar{n} = F(\bar{n}_0)$ и $Dn = \Phi(\bar{n}_0)$ соответственно получаем

$$\bar{n} = F(\bar{n}_0) = \bar{n}_0/(1 + \bar{n}_0\tau/NT)^{N+1}, \tag{8}$$

$$Dn = \Phi(\bar{n}_0) = F(\bar{n}_0)\left\{1 - F(\bar{n}_0) + \left(1 - 2\frac{\tau}{T}\right)F(\bar{n}_0)\times\right.$$
$$\left.\times[(N+1)/N]\,(1 + \bar{n}_0\tau/NT)^{2N+2}/(1 + 2\bar{n}_0\tau/NT)^{N+2}\right\}, \tag{9}$$

где N определяется выражением [6]

$$N = T^2/\int_0^T\int_0^T |\gamma(t-t')|^2\,dt\,dt',$$

$\gamma(t-t')$ — комплексная степень когерентности поля излучения. Если интерпретировать в (8) и (9) величину N^{-1} как относительную дисперсию σ_0^2 энергии E, получим при $N \gg 1$ ($\sigma_0^2 \ll 1$) и $N \gg \bar{n}_0\tau/T$ ($\bar{n}_0\sigma_0^2\tau/T \ll 1$) асимптотические представления (8) и (9), полностью совпадающие с (6) и (7). Получающееся совпадение объясняется тем, что гамма-распределение $p(E)$ стремится к нормальному распределению $Nr(\bar{E}, \bar{E}^2/N)$.

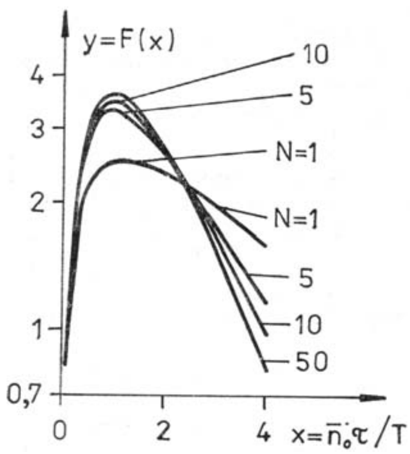

Рис. 1. Зависимость $n = F(\bar{n}_0\tau/T)$ при значениях N = 1, 5, 10, 50; τ/T = 0,1

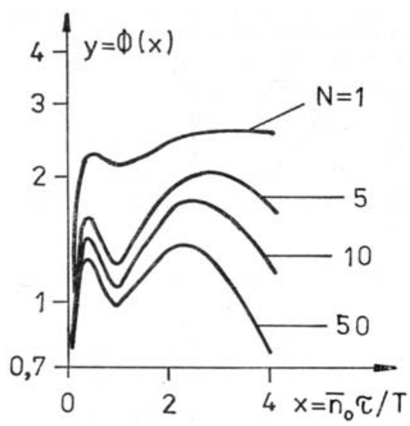

Рис. 2. Зависимость $Dn = \Phi(\bar{n}_0\tau/T)$ при значениях N = 1, 5, 10, 50; τ/T = 0,1

Предельные переходы $N \to \infty$ в (8) и (9), и $\sigma_0 \to 0$ в (6) и (7) приводят, как и должно быть, к выражениям (1), поскольку и в обоих случаях распределение $p(n_0)$ стремится к распределению Пуассона. На рис. 1 и рис. 2 показаны соответственно зависимости $\bar{n} = F(\bar{n}_0 \tau / T)$ и $Dn = \bar{\Phi}(n_0 \tau / T)$ при значениях $N = 1,\ 5,\ 10$ и $\tau / T = 0{,}1$. Кривые на рисунках, соответствующие большим значениям $N \gg 1$, изображают также зависимости (6) и (7), например, при $\sigma_0^2 = 0{,}1$ если $N = 10$и при $\sigma_0^2 = 0{,}02$ если $N = 50$. При $\bar{n}_0 > 2T / \tau$ значения $\bar{n}$ начинают превышать соответствующие «пуассоновские» значения (при $\sigma_0^2 = 0$ или $N \to \infty$), в силу того что в точке $E = E_i = 2T / (\alpha\tau)$ зависимость $f(\bar{n}_{0E})$) имеет перегиб и при больших значениях $\bar{E} > E_i$ флуктуации E приводят уже к увеличению значений $\bar{n}$.

Таким образом, исследования показали, что при достаточно слабых относительных флуктуациях энергии E измеряемых лидарных сигналов можно получить удобные для оценок выражения для среднего значения и дисперсии фотоотсчетов, которые не зависят от вида распределения $p(E)$ и определяются лишь исходными «пуассоновскими» зависимостями $\bar{n} = f(\bar{n}_0)$ и $Dn = \varphi(\bar{n}_0)$.

1. Гольданский В.И., Куценко А.В., Подгорецкий М.И. Статистика отсчётов при регистрации ядерных частиц. М.: Физматгиз, 1959.
2. Глазов Г.Н. Статистические вопросы лидарного зондирования атмосферы. Новосибирск: Наука. 1987. 312 с.
3. Астафуров В.Г., Глазов Г.Н.//Оптика и спектроскопия. 1987. Т. 62. Вып. 2. С. 296–301.
4. Набоко В.Н., Гърдев Л.Л.//Тр. на II Нац. симп. «Физика и електронизация». Т. II. Пловдив. 1982. С. 392–394.
5. Астафуров В.Г., Глазов Г.Н.//6 Всес. симпозиум по распространению лазерного излучения в атмосфере. (Тезисы докл.). Томск. ТФ СО АН СССР. 1981. С. 222–225. Ч. II.
6. Спектроскопия оптического смещения и корреляции фотонов./Перев. с англ. под. ред. Ф.В. Бункина. М.: Мир. 1978. 584 с.
7. Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики. М.: Мир. 1978. 428 с.

Институт электроники
БАН, София

Поступила в редакцию
4 мая 1988 г.

L.L. Girdev. **Non-Poyssonian Statistical Moments of Photocounts, Registered by Means of Inertial Photocounter.**

Expressions for the mean value and the variance of photocounts, registered by means of inertial photocounter in the case of light signal energy fluctuations are obtained and analysed.