

П.А. Бакут, И.П. Плотников, И.А. Рожков,  
А.Д. Ряхин, К.Н. Свиридов

## ВОССТАНОВЛЕНИЕ АСТРОНОМИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ В СИНТЕЗИРОВАННОМ ТЕЛЕСКОПЕ

В работе рассматривается восстановление астрономического изображения в синтезированном телескопе с апертурами, не разрешающими объект наблюдения. Описан лабораторный эксперимент, приведены результаты его машинной обработки.

За последние годы заметно возрос интерес исследователей к новому классу оптических систем — синтезированным астрономическим телескопам [1–3]. Такие инструменты, основанные на когерентном сложении световых потоков от нескольких обычных телескопов, способны обеспечить в оптическом диапазоне разрешение порядка  $10^{-3} \div 10^{-4}$  угл.с, вряд ли достижимое иными методами. На пути построения подобных систем предстоит решить ряд сложных технических задач, таких как точная фигуризация (перенос и сжатие суммируемых пучков с соблюдением подобия) и фазирование, требующее создания прецизионных оптических линий задержки. Другая существенная трудность заключается в том, что изображение, формируемое системой, будет неизбежно искажено турбулентной атмосферой Земли, ограничивающей разрешение в режиме обычной астрофотографии величиной порядка  $1''$ . Для обычных телескопов разработаны методы, позволяющие путем обработки достаточного числа  $M$  искаженных короткоэкспозиционных изображений восстановить модуль [4] и фазу [5] пространственного спектра  $O(f)$  наблюдаемого объекта вплоть до дифракционной частоты отсечки  $f_d$ . Эти методы практически без изменений применимы для многоапертурных систем с достаточно плотным заполнением апертуры. Если же синтезированный телескоп представляет собой систему апертур, с целью достижения высокого углового разрешения разнесенных на расстояния, значительно превышающие их диаметры, то его оптическая передаточная функция (ОПФ) имеет вид набора изолированных областей частотной плоскости — «островов» (такую ОПФ имеет, например, многоапертурная система, разрабатываемая Лабейри [2]). Алгоритм восстановления фазы Нокса–Томпсона [5], основанный на сшивании оценок разностных фаз из нуля частот в подобной системе не работоспособен.

В работе авторов [6] рассматривался впервые предложенный Вайгельтом [7] метод восстановления фазы для многоапертурной системы, основанный на использовании средних по серии произведений спектров  $I(f)$  искаженных изображений  $i(x)$  вида  $I(f_1)I(f_2)I(-f_1 - f_2)$ , где пространственные частоты  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_1 + f_2$  принадлежат различным «островам» ОПФ системы. В [8] показано, что для восстановления фазы по этим величинам достаточно располагать апертуры малоизбыточным образом. В настоящей работе дано дальнейшее развитие методов [6, 8], представлены результаты лабораторного моделирования формирования изображения в многоапертурной системе через турбулентную атмосферу и обработки данных модельного эксперимента с помощью разработанных алгоритмов на ЭВМ.

### 1. Теория

В радиоастрономии достаточно широко распространен метод замкнутых фаз [9], применимый к апертурам, расположенным безыбыточным образом (т. е. к таким, расстояния между которыми не повторяются). Для оптического диапазона он рассматривался Родсом и Гудменом в [10]. Суть метода заключается в следующем: любая тройка апертур ( $k$ ,  $l$ ,  $m$ ) формирует пространственные частоты  $f_{kl}$ ,  $f_{lm}$ ,  $f_{mk}$ ;  $f_{kl} + f_{lm} + f_{mk} = 0$ . Если апертуры достаточно малы, то атмосферную фазу  $\phi$  в их пределах можно считать постоянной и записать выражение для искаженного спектра в виде  $I(f_{kl}) = O(f_{kl})e^{i(\phi_k - \phi_l)}$ . Нетрудно увидеть, что для фаз  $\psi$  пространственного спектра  $O(f)$  и фаз  $\Theta$  искаженного спектра  $I(f)$  выполняются соотношения, не содержащие атмосферные ошибки:

$$\psi(f_{kl}) + \psi(f_{lm}) + \psi(f_{mk}) = \Theta(f_{kl}) + \Theta(f_{lm}) + \Theta(f_{mk}). \quad (1)$$

Ограничение метода замкнутых фаз на размер апертур, резко снижающее количество света в формируемом изображении, преодолевается путем использования вместо (1) уравнений

$$\psi(f_{kl}) + \psi(f_{lm}) + \psi(f_{mk}) = \arg \langle I(f_{kl}) I(f_{lm}) I(f_{mk}) \rangle, \quad (2)$$

где скобки  $\langle \rangle$  означают усреднение по серии  $M$  изображений. Если апертуры малы, то (1) и (2) мало отличаются с точки зрения компенсации атмосферных искажений, однако (2) позволяют получить

оценку замкнутой фазы при наличии избыточных частот [8] и поднять точность в присутствии шумов регистрации.

Рассмотрим противоположный случай больших апертур диаметром  $D$ , на которых укладывается  $N_0 \gg 1$  областей корреляции атмосферных искажений поля на апертуре (размер этих областей  $r_0$ ,  $N_0 = \left(\frac{D}{r_0}\right)^2$ ). Для простоты будем считать атмосферную фазу в пределах каждой  $s$ -й ячейки  $\kappa$ -й апертуры постоянной величиной  $\varphi_{\kappa}^s$  (результаты при этом будут такими же, как полученные при строгом анализе [6]). Такое упрощение позволяет представить искаженный спектр в виде

$$I(f_{\kappa l}) = O(f_{\kappa l}) \sum_{s,p} e^{i(\varphi_{\kappa}^s - \varphi_l^p)}, \quad (3)$$

где суммирование ведется по всем  $s$  ячейкам  $\kappa$ -й апертуры и  $p$  ячейкам  $l$ -й апертуры, расстояние между которыми соответствует частоте  $f_{\kappa l}$  принадлежащей к  $l$ -му «острову» ОПФ. В тройном произведении спектров в (2) можно выделить тогда слагаемые, соответствующие всем возможным тройкам корреляционных ячеек, формирующим частоты  $f_{\kappa l}$ ,  $f_{lm}$ ,  $f_{m\kappa}$ . Эти тройки фазовых корреляционных ячеек ведут себя так же, как малые апертуры в (1), так что атмосферные фазы в выделенных слагаемых исчезнут. Число таких слагаемых порядка  $N_0$ . Оставшиеся перекрестные члены имеют случайные фазы, их количество оценивается как  $N_0^3$ , среднее значение суммы — ноль. Нетрудно отсюда сделать вывод, что соотношения (2) выполняются для больших апертур, причем отношение сигнал-шум при длине серии  $M$  составит величину порядка  $\sqrt{\frac{M}{N_0}}$  (избыточность расположения апертур приводит к падению точности, но не меняет ее зависимость от  $M$  и  $N_0$ ). В то же время точность определения модуля пространственного спектра методом Лабейри [4] оценивается как  $\sqrt{M}$ . Таким образом, при большом  $N_0$  определение фазы по (2) может потребовать слишком большой длины серии  $M$ .

Ситуация, однако, меняется, если пространственный спектр объекта слабо зависит от  $f$  в пределах «островов» ОПФ (т.е. объект не разрешается отдельными апертурами системы). В этом случае целесообразно для повышения точности оценки просуммировать все возможные произведения спектров на замкнутых частотах и использовать вместо (2) соотношения

$$\psi(f_{\kappa l}^0) + \psi(f_{lm}^0) + \psi(f_{m\kappa}^0) = \arg \langle \int \int df_{\kappa l} df_{lm} I(f_{\kappa l}) I(f_{lm}) I(-f_{\kappa l} - f_{lm}) \rangle^* \quad (4)$$

где  $f_{\kappa l}^0, f_{lm}^0, f_{m\kappa}^0$  — центры соответствующих «островов», в пределах которых берутся интегралы. Нетрудно подсчитать, что полезных членов, обусловленных тройками корреляционных фазовых ячеек, в (4) порядка  $N_0^3$ , в то время как шумовых членов со случайной фазой — около  $N_0^5$ , так что сумма их есть случайная величина порядка  $N_0^{5/2}$  с нулевым средним. Таким образом, отношение сигнал-шум в (4) ведет себя как  $\sqrt{MN_0}$  и возрастает с диаметром телескопов (разумеется, диаметры апертур можно увеличивать лишь до тех пор, пока они еще не разрешают объект). Подчеркнем, что аналогичная (4) оценка квадрата модуля пространственного спектра вида

$$|O(f_{\kappa l}^0)|^2 = \left(\frac{D}{r_0}\right)^2 \frac{\int df_{\kappa l} \langle |I(f_{\kappa l})|^2 \rangle}{\int df_{\kappa l} \tau(f_{\kappa l})}, \quad (5)$$

где  $\tau(f)$  — дифракционная ОПФ системы, а интегралы берутся по  $\kappa l$ -му «острову», также обладает точностью  $\sqrt{MN_0}$ . Для повышения отношения сигнал-шум в (4)–(5) необходимо суммировать в них тройные произведения спектров и квадраты модулей с весом, определяемым их статистической точностью (оптимальный при наличии аддитивных шумов алгоритм для оценки квадрата модуля спектра синтезирован авторами в [11]). Однако общий вид  $\sqrt{MN_0}$  зависимости отношения сигнал-шум от  $M$  и  $N_0$  при этом не изменится.

Соотношения (4) и (5) допускают интересную переформулировку в области изображения. Для ее вывода несколько изменим прежние обозначения, отвлекаясь от конкретных апертур, формирующих данный «остров», и просто нумеруя «острова» и частоты, входящие в рассматриваемые соотношения. Тогда нетрудно заметить, что сглаженный квадрат модуля в (5) и тройное произведение спектров в (4) являются частными случаями при  $L = 2, L = 3$  величины вида  $\delta(f_1 + \dots + f_L) \prod_{l=1}^L I(f_l)$ , проинтегрированной в пределах «островов» от первого до  $L$ -го. Обозначив функцию  $W(f - f_l^0)$ , равную еди-

нице в пределах  $l$ -го „острова” и равную нулю вне его, пишем, формально используя представление дельта-функции Дирака в виде интеграла:

$$\begin{aligned}
\delta(\mathbf{f}) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int d\mathbf{x} e^{i\mathbf{f}\mathbf{x}}; \\
\int df_1 \dots df_L \delta(\mathbf{f}_1 + \dots + \mathbf{f}_L) \prod_{l=1}^L W(\mathbf{f}_l - \mathbf{f}_l^0) I(\mathbf{f}_l) &= \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int df_1 \dots df_L dx_0 e^{i\mathbf{x}_0(\mathbf{f}_1 + \dots + \mathbf{f}_L)} \prod_{l=1}^L W(\mathbf{f}_l - \mathbf{f}_l^0) I(\mathbf{f}_l) = \\
&= \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \int d\mathbf{x}_0 \prod_{l=1}^L \left[ \int d\mathbf{f}_l e^{i\mathbf{x}_0 \mathbf{f}_l} W(\mathbf{f}_l - \mathbf{f}_l^0) \int d\mathbf{x}_l e^{-i\mathbf{x}_l \mathbf{f}_l} i(\mathbf{x}_l) \right] = \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int d\mathbf{x}_0 \prod_{l=1}^L \left[ \int d\mathbf{x}_l i(\mathbf{x}_l) \int d\mathbf{f}_l e^{i(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_l) \mathbf{f}_l} W(\mathbf{f}_l - \mathbf{f}_l^0) \right] = \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int d\mathbf{x}_0 \prod_{l=1}^L \left[ \int d\mathbf{x}_l e^{-i\mathbf{x}_l \mathbf{f}_l^0} i(\mathbf{x}_l) M(\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_0) \right].
\end{aligned} \tag{6}$$

В (6) мы использовали замкнутость частот центров островов  $\mathbf{f}_1^0 + \dots + \mathbf{f}_L^0 = 0$  и обозначили  $M(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{f} e^{-i\mathbf{x}\mathbf{f}} W(\mathbf{f})$ . Эта функция, очевидно, описывает дифракционное пятно вдвое меньшего размера, чем импульсный отклик от одной апертуры. Смысл (6) заключается в том, что сглаживание произведений спектров вида  $\langle I(\mathbf{f}_1) \times \dots \times I(\mathbf{f}_L) \rangle$  по всем возможным замкнутым частотам в пределах соответствующих „островов” эквивалентно выделению в изображении областей дифракционного для субапертуры размера, спектральному анализу каждой такой области, формированию для нее величин  $I(\mathbf{f}_1^0) \times \dots \times I(\mathbf{f}_L^0)$  и усреднению их по всем возможным областям и всем искаженным изображениям.

Физически изображение, формируемое рассматриваемой системой, адекватно представимо моделью в виде набора  $N_0$  случайно расположенных спеклов — пятен дифракционного для отдельной апертуры размера, модулированных тонкой структурой интерференционных полос, обусловленных взаимодействием света, приходящего от разных апертур. Фазы полос и их контрастности флуктуируют от спекла к спеклу, но относительные дисперсии квадратов модулей и тройных произведений спектров в каждом спекле порядка единицы. Усреднение по  $N_0$  спеклам и  $M$  изображениям повышает точность в  $\sqrt{MN_0}$  раз.

Практическое значение (6) заключается в том, что в  $N_0$  раз снижаются требования к объему оперативной памяти, обрабатывающей изображения ЭВМ, и к устройствам ввода и регистрации изображений, а также в том, что в принципе можно регистрировать только части искаженных изображений и по ним добиваться качественного восстановления. Отметим также, что порядок точности оценки  $\sqrt{MN_0}$  достигается в сглаженных величинах  $\langle I(\mathbf{f}_1) \times \dots \times I(\mathbf{f}_L) \rangle$  независимо от  $L$ , однако при избыточном расположении апертур точность резко падает с ростом  $L$  даже при минимальной избыточности. Тем не менее возможно, что в ряде случаев (например, при безыбыточном расположении телескопов) использование высших корреляций  $L > 3$  окажется целесообразным.

Эффективность алгоритмов, построенных на основе соотношений (4)–(6), была проверена при обработке серии искаженных изображений, полученной в результате лабораторного эксперимента.

## 2. Модельный эксперимент

Для моделирования было выбрано расположение апертур, показанное на рис. 1,а. Соответствующее ему покрытие частотной плоскости приведено на рис. 1,б. Такая система формирует, с учетом эрмитовой симметрии спектра, 56 «островов» пространственных частот, 2 из них с тройной избыточностью, 18 — с двойной, остальные — безыбыточны. Данной избыточности хватает для восстановления фазы по (2), (4) с точностью до несущественной линейной компоненты.

В лабораторной установке с помощью объектива с наложенной на него апертурной маской (рис. 1,а) рассматривался малоразмерный объект — участок микрофиши с изображением цифры 2, освещенный монохроматическим пространственно-некогерентным светом. Полученное дифракционное изображение представлено на рис. 2,а, оно напоминает своеобразный орнамент. Элементы орнамента — изображения двоек с разрешением, соответствующим максимальному расстоянию между апертурами — отверстиями маски, размер орнамента есть дифракционный размер функции рассеяния точки

отдельной апертуры. Расстояние между изображениями (естественное поле зрения такой системы) обратно пропорционально шагу решетки, в узлах которой расположены апертуры. Мелкая рябь в изображении обусловлена отсутствующими в системе узловыми пространственными частотами. Подобные лишние детали в изображениях хорошо известны радиоастрономам, их устранение требует специальной обработки — интерполяции спектра.

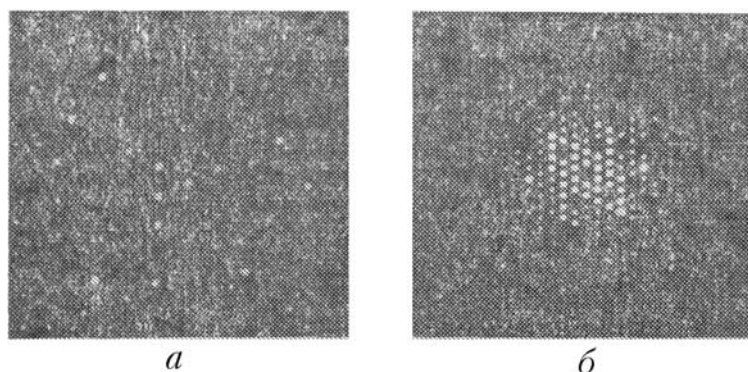


Рис. 1. Моделируемая оптическая система: (а) расположение апертур; (б) оптическая передаточная функция (пик на нулевой пространственной частоте подавлен)

В качестве «атмосферы» использовалась специальным образом приготовленная фазовая пластинка, статистика искажений фазы которой хорошо аппроксимировала атмосферную. Наложение модельной «атмосферы» на апертурную маску приводило к полному разваливанию изображения на спеклы. Обратим внимание читателя на то, что отдельные модулированные тонкой интерференционной структурой спеклы легко визуально выделяются в искаженном изображении (рис. 2,б), что подтверждает предложенную модель формирования изображения в синтезированном телескопе в присутствии турбулентной атмосферы. Отношение  $D/r_0$ , по нашим оценкам, находилось в районе пяти. Статистически различные реализации атмосферы моделировались перемещением фазовой пластинки вдоль апертуры. Всего было зарегистрировано на фотопленке 50 изображений (рис. 2,б).

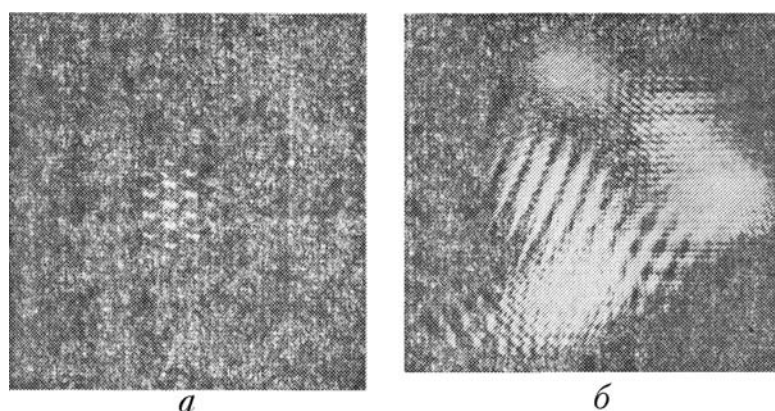


Рис. 2. Формирование изображения в системе: (а) дифракционное, (б) искаженное турбулентной атмосферой

### 3. Обработка данных модельного эксперимента

Из 50-ти зарегистрированных изображений было выделено 160 спеклов дифракционного для суб-апертуры размера с наибольшим динамическим диапазоном оптических плотностей, которые оцифровывались на микроденситометре и вводились в ЭВМ. Глубина дискретизации уровня составляла 256, размер вводимого спекла —  $128 \times 128$  пиксел. Один из таких введенных участков показан на рис. 3,а.

По 160 спеклам усреднялись квадраты модулей и тройные произведения спектров. Окончательная оценка модуля спектра не имела существенных особенностей по сравнению с методом Лабейри [4]. Фаза определялась по соотношениям типа (2) путем совместного решения системы 260-ти таких уравнений. Восстановленное изображение в том же масштабе, что и участок искаженного, представлено на рис. 3,б. Интерполяция его пространственного спектра проводилась с использованием априорных сведений об ограниченной пространственной протяженности и неотрицательности изображения объектов итерационным алгоритмом на основе метода проекций на замкнутые выпуклые множества [12]. Восстановленное в результате изображение в увеличенном виде показано на рис. 3,в, рядом

(рис. 3,з) для сравнения приведен исходный объект приблизительно в том же масштабе. Качество восстановления вполне удовлетворительное, разрешение соответствует дифракционному. Таким образом, разработанные алгоритмы обладают достаточной устойчивостью к шумам и нелинейностям процесса регистрации и могут быть практически реализованы.

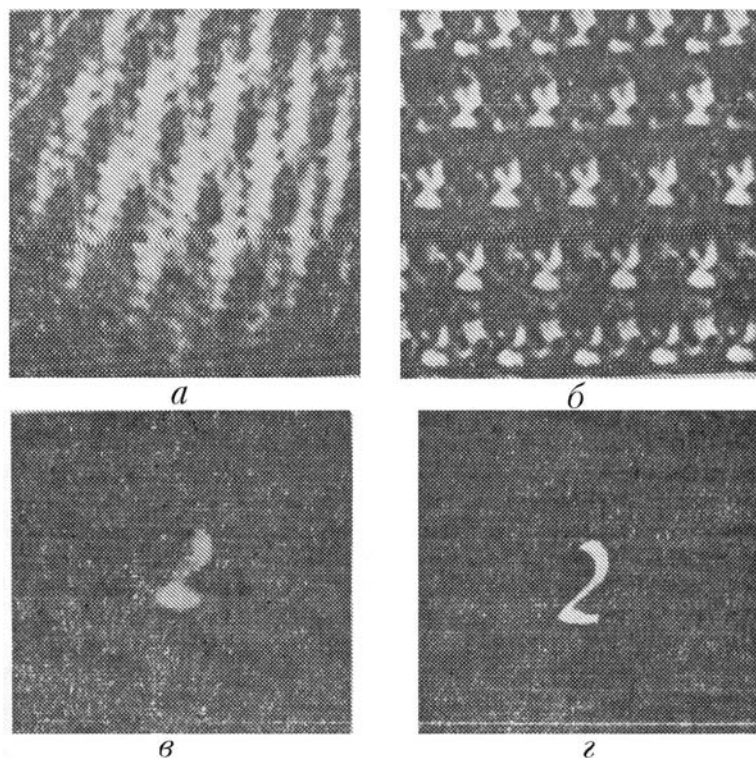


Рис. 3. Обработка данных эксперимента: (а) один из 160 использованных участков искаженных изображений; (б) результат восстановления в том же масштабе; (в) увеличенное восстановленное изображение с интерполированным спектром; (г) исходный объект

Соотнесем смоделированный синтезированный телескоп с реальными масштабами. Если считать, что размер турбулентного диска (поле зрения на рис. 2,б) соответствует  $1''$ , то окончательное разрешение не хуже  $0,004''$ , что соответствует максимальному разному апертур (и диаметру эквивалентного сплошного зеркала) 25–30 м.

В заключение авторы приносят благодарность А.С. Печенову за предоставленную фазовую пластинку, моделирующую фазовые искажения.

1. Оптические телескопы будущего. /Под ред. П.В. Щеглова. М.: Мир. 1981.
2. Labeyrie A., Schumacher G., Thom C., Dugue M., Foy F., Cormier P., Vakili F. Proceedings of the IAV Coll. № 79. Garching. April 9–12. 1984. P. 267.
3. Токовинин А. А. Звёздные интерферометры. М.: Наука. 1988.
4. Labeyrie A. //Astron. Astrophys. 1970. V. 6. № 1. P. 89.
5. Кнох К.Т., Thompson В. J. //Astroph J. 1974. V. 193. P. L47.
6. Бакут П.А., Плотников И.П., Ряхин А.Д., Свиридов К.Н. //Оптико-механическая промышленность. 1987. № 10. С. 75.
7. Lohmann A.W., Weigelt G., Wirnitzer B. //Appl. Optics. 1983 V. 22. № 24. P. 4028.
8. Плотников И.П., Ряхин А.Д., Свиридов К.Н. //В кн.: XII Всес. конференция «Высокоскоростная фотография, фотоника и метрология быстропротекающих процессов» (Тезисы докл.) М.: ВНИИОФИ. 1987. С. 140.
9. Восстановление изображений по функциям когерентности в астрономии. М.: Мир. 1982. С. 87.
10. Rhodes W.T., Goodman J.W. //JOSA. 1973. V. 63. № 6. P. 647.
11. Бакут П.А., Плотников И.П., Ряхин А.Д., Свиридов К.Н. //Оптика атмосферы. 1988. Т. 1. № 6. С. 116–117.
12. Василенко Г.И., Тараторин А.М. Восстановление изображений. М.: Радио и связь. 1986. С. 145.

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию  
8 июня 1988 г.

P. A. Bakut, I. P. Plotnikov, I. A. Rozhkov, A. D. Ryakhin, K. N. Sviridov.  
**Astronomic Image Restoration by a Synthesis Telescope.**

The problem of astronomic Image restoration by a synthesis telescope whose apertures fail to resolve the object under observation is discussed. The relevant laboratory-scale experiment is described and the results obtained are reported.