

## Приближенная методика решения задачи о генерации второй гармоники в нелинейных кристаллах. Часть 2

В.В. Колосов, В.О. Троицкий\*

*Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН  
634055, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1*

Поступила в редакцию 5.06.2019 г.

Настоящая статья является второй и заключительной частью работы. Приводятся результаты проверки численной схемы, предложенной в первой части. Обсуждается приближенная процедура оценки мощностей взаимодействующих волн на выходе из кристалла, позволяющая больше чем на порядок сократить время выполнения расчетов за счет уменьшения минимально необходимого числа шагов рекуррентного процесса.

*Ключевые слова:* генерация второй гармоники, система нелинейных уравнений, численные схемы; second harmonic generation, system of nonlinear equations, numerical scheme.

### Введение

Настоящая работа является прямым продолжением [1] и состоит из двух разделов. В первом приводятся результаты проверки численной схемы, предложенной в [1], которая сводится к вычислению двукратных интегралов требуемое количество ( $N$ ) раз. Чем больше величина  $N$  (число шагов рекуррентного процесса), тем точнее должно быть решение нелинейной задачи, но, очевидно, тем больше будет время работы программы. Для ускорения процедуры численного вычисления двукратных интегралов было предложено использовать два приближения [1]. Исследование влияния этих приближений на точность решения нелинейной задачи и есть предмет упомянутой проверки.

Во втором разделе предложен приближенный способ оценки мощностей взаимодействующих волн на выходе из нелинейного кристалла, что позволяет еще на порядок и больше уменьшить время работы программы. Сокращение времени расчетов обеспечивается уменьшением числа шагов  $N$  рекуррентного процесса. В связи с этим можно формально утверждать, что суть предлагаемого способа сводится к приближенному вычислению интегралов по продольной координате.

По ходу изложения материала будет возникать необходимость обращаться к формулам, разделам, ссылкам уже представленным в [1]. Для этого будем использовать индекс «1». Например, обращение (45.1) будет означать, что речь идет о формуле (45) из [1].

### 1. Проверка численной схемы

Прежде всего, необходимо убедиться в том, что точность решения нелинейной задачи, получаемого с помощью рассмотренного в [1] подхода, действительно возрастает при увеличении числа шагов рекуррентного процесса (41.1), (42.1). Наиболее подходящим критерием точности пока остается величина ошибки (46.1), которую теперь представим в виде

$$O_E = \sum_{k=1}^N O_{E,k} = [P - P_1(z=L) - P_2(z=L)]/P, \quad (1)$$

где  $P_{1,2}(z=L)$  и  $P$  определены в (44.1), (45.1).

Зависимости ошибки (1) от числа шагов  $N$ , полученные при трех значениях мощности основного излучения, представлены на рис. 1, а.

Если характеристики  $\sigma$ ,  $L$  нелинейного кристалла и параметры фокусировки  $\xi_x$ ,  $\xi_y$  заданы, то каждому значению мощности лазерного излучения будет соответствовать свое значение параметра  $\mu$  из (48.1). Как было сказано в разд. 3.1, от величины этого параметра, пропорционального квадратному корню из максимальной плотности мощности сфокусированного линейного поля в объеме кристалла, и должна зависеть ошибка (1). Таким образом, сравнение нелинейных процессов, осуществляемых при различных значениях мощности основного излучения, будет более информативным, если сопоставлять величины (48.1).

В силу сказанного, для случаев, рассмотренных на рис. 1, а, приведены не значения мощности лазерного излучения, а величины  $\mu = 4,5; 6,3; 12,6$ .

\* Валерий Викторович Колосов (kvv@iao.ru); Владимир Олегович Троицкий (qel@iao.ru).

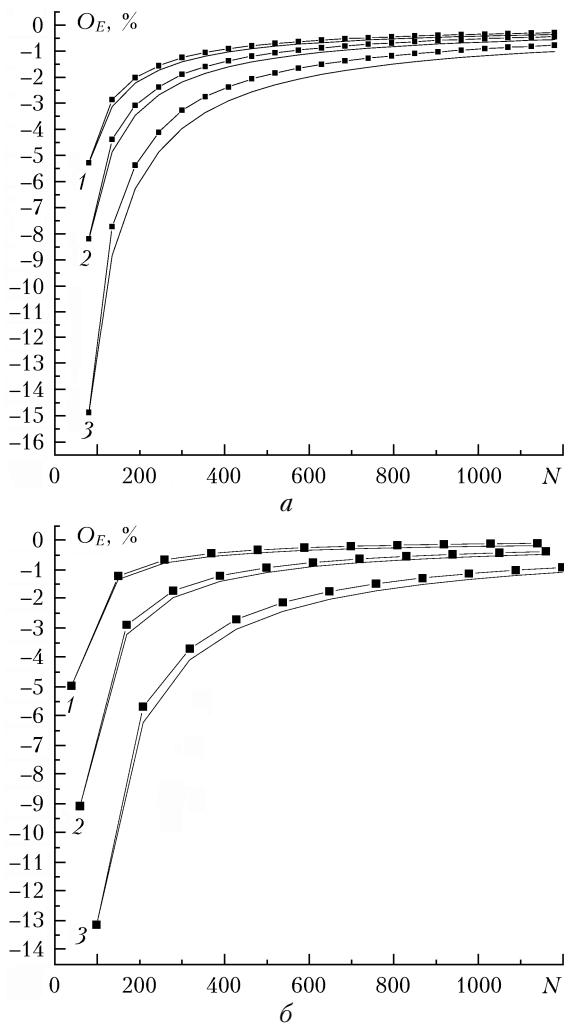


Рис. 1. Зависимость ошибки (1) от числа шагов рекуррентного процесса (41.1), (42.1) по оси  $Z$ :  $a$  — для трех значений параметра из (48.1)  $\mu = 4,5$  (1);  $6,3$  (2);  $12,6$  (3);  $b$  — для трех комбинаций исходных условий:  $\xi_x = 0,0001$ ;  $\xi_y = 0,0001$ ;  $\Delta_{k0} = 0$ ;  $\mu = 3$  (1);  $\xi_x = 0,03$ ;  $\xi_y = 0,4$ ;  $\Delta_{k0} = -0,2$ ,  $\mu = 6,5$  (2);  $\xi_x = 0,3$ ,  $\xi_y = 4$ ;  $\Delta_{k0} = -1,1$ ;  $\mu = 14$  (3). Кривые с точками — результаты расчетов; сплошные кривые — зависимости  $O_{ET}(N)$  (2)

Расчеты проводились при исходных условиях (57.1). Если бы в каждом из трех рассмотренных случаев ошибка (1) уменьшалась как  $1/N$ , то рассматриваемые зависимости имели бы вид

$$O_{ET}(N) = O_E(N = N_n) \cdot N_n / N, \quad (2)$$

где  $N_n$  — начальное число шагов.

На рис. 1,  $a$  «теоретические» ошибки (2) для каждого случая показаны сплошными линиями.

Аналогичные зависимости  $O_E(N)$  и  $O_{ET}(N)$ , представлены на рис. 1,  $b$  для трех комбинаций исходных условий. При проведении этих расчетов параметр  $\mu$  (а значит, мощность лазерного излучения) выбирался таким образом, чтобы для каждой комбинации значений  $(\xi_x, \xi_y, \Delta_{k0}, \mu)$  КПД нелинейного процесса (56.1) был примерно одинаковым ( $\sim 70\%$ ), что

близко (и это можно показать) к предельному значению. Расчеты проводились по схеме (41.1), (42.1) с использованием обоих приближений, обсуждавшихся в [1].

Результаты, представленные на рис. 1, позволяют утверждать, что во всех рассмотренных случаях (мощность лазерного излучения и параметры фокусировки изменяются в достаточно широких пределах) ошибки (1) при увеличении числа шагов  $N$  убывают, причем несколько быстрее, чем  $1/N$ . Из представленных результатов также хорошо видно, что при фиксированном значении  $N$  величина ошибки (1) сильно зависит от исходных условий. В частности, время расчетов, необходимое для достижения априорно заданной величины ошибки (1), должно быть тем больше, чем больше мощность лазерного излучения и чем сильнее оно фокусируется в кристалл.

Поскольку ошибка (1) монотонно стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$ , это, очевидно, означает, что величины мощности  $P_{1,2}(z=L)$ , которые получаются в ходе реализации схемы (41.1), (42.1), будут при  $N \rightarrow \infty$  стремиться к неким асимптотическим значениям, которые и следует рассматривать в качестве искомого решения нелинейной задачи. Однако вопрос о том, насколько близко эти асимптотические значения мощности будут соответствовать точному решению задачи, пока остается открытым. Если не ограничиваться ПЗП (проверки для этого случая рассматривались в [1]), то единственной возможностью ответить на этот вопрос оказывается сравнение полученного решения с результатами расчетов, проведенных другим способом. Результаты такого сопоставления приведены в таблице.

В качестве альтернативного метода численного решения системы уравнений (3.1), (4.1) был использован традиционный метод решения уравнения параболического типа: метод расщепления по физическим факторам (или метод пооператорного расщепления) [11.1, 12.1]. В рамках такого подхода решение системы уравнений на каждом шаге разбивается на два этапа. На первом этапе правые части уравнений полагаются равными нулю и решается задача дифракции на дискретном шаге вдоль оси распространения. Дифракция вычисляется на основе спектрального метода Фурье с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье. На втором этапе решается система уравнений (3.1), (4.1), в которой полагаются равными нулю слагаемые с дифференцированием по поперечным координатам  $(x, y)$ . В качестве граничных условий принимается решение, полученное на первом этапе. Далее процедура повторяется для следующего шага распространения.

Результаты, приведенные в таблице, получены для нескольких значений параметра  $\mu$  (столбец 1). Мощности основного излучения и ВГ, которые находятся из (41.1), (42.1) с числом шагов  $N = 400$ , и величины получаемых при этом ошибок (1) приведены в столбцах 5 и 6. Значения мощности взаимодействующих волн, полученные при строгом решении,

**Сравнение результатов расчетов, полученных двумя способами**

μ	$P_1(400)$ $P_2(400)$	$P_1(3200)$ $P_2(3200)$	$P_1$ (прогноз) $P_2$ (прогноз)	$P_1$ $P_2$	$O_E, \%$	$O_1, \%$ $O_2, \%$
	Строгое решение (разное число $N$ )			Приближенное решение ( $N = 400$ )		
1	2	3	4	5	6	7
9,51	0,2614500	0,2753100	0,2772570	0,2817054	-2,018116	-7,747350
	0,7385500	0,72469	0,722743	0,7384757		0,0100558
10,46	0,2257700	0,2410900	0,2432430	0,2474465	-2,157093	-9,601128
	0,7742300	0,75891	0,756757	0,7741245		0,01362647
11,41	0,1978700	0,2144300	0,2167570	0,2208810	-2,284508	-11,62936
	0,8021300	0,78557	0,783243	0,8019640		0,02068734
12,36	0,1768500	0,1944200	0,1968890	0,2011479	-2,404110	-13,73925
	0,8231500	0,80558	0,803111	0,8228932		0,03119441
13,31	0,1620600	0,1803900	0,1821650	0,1876197	-2,519731	-15,77175
	0,8379400	0,81961	0,817835	0,8375776		0,04324847
14,26	0,1529800	0,1718200	0,1744470	0,1798180	-2,634612	-17,54346
	0,8470200	0,82818	0,825553	0,8465281		0,05806918
15,21	0,1491500	0,1682600	0,1701450	0,1772876	-2,751769	-18,86531
	0,8508500	0,83174	0,829855	0,8502300		0,07286218
16,16	0,1499700	0,1691400	0,1718330	0,1794471	-2,873762	-19,65536
	0,8500300	0,83086	0,828167	0,8492905		0,08699867
17,11	0,1546200	0,1736800	0,1763580	0,1854498	-3,002941	-19,93906
	0,8453800	0,82632	0,823642	0,8445796		0,09467591
18,06	0,1619400	0,1808400	0,1834960	0,1941162	-3,140960	-19,86923
	0,8380600	0,81916	0,816504	0,8372934		0,09147733
19,01	0,1704800	0,1893200	0,1919670	0,2040037	-3,289114	-19,66427
	0,8295200	0,81068	0,808033	0,8288875		0,07625187

показаны в столбцах 2 и 3 для числа итераций  $N = 400$  и  $N = 3200$ . Отличия двух вариантов решения задачи при одинаковом количестве шагов ( $N = 400$ ) выражены в виде ошибок (61.1), (55.1) и приведены в столбце 7. Результат экстраполяции строгого решения на случай  $N \rightarrow \infty$  приведен в столбце 4. Именно эти значения мощности в дальнейшем и будем рассматривать в качестве «точного» решения нелинейной задачи.

Проанализировав величины ошибок, приведенных в столбцах 6 и 7, приходим к следующему заключению. Предложенная численная схема (41.1), (42.1), несмотря на все ограничения и приближения, используемые при ее реализации, дает практически такие же оценочные значения для мощности ВГ, что и строгая схема: ошибки  $O_2$  (столбец 7) во всех случаях не превышают 0,1%. При этом величины ошибок  $O_1$  оказываются весьма большими (> 10%). Следует отметить, что это не свидетельствует об ошибках, которые вносит проверяемая приближенная схема при описании поля основного излучения. Большие отличия в значениях мощности  $P_1$  из столбцов 2 и 5 связаны всего лишь с тем, что в строгой схеме мощность  $P_1$  стремится к своему «точному» значению  $P_{1t}$  (столбец 4) «снизу», т.е. всегда выполняется  $P_1 < P_{1t}$ . В этом легко убедиться, обратившись к результатам, приведенным в столбцах 2, 3 и 4. При использовании приближенной схемы (41.1), (42.1) наблюдается обратная ситуация:  $P_1$  стремится к своему асимптотическому значению «сверху» (далее это будет продемонстрировано). Другими словами, если результаты в столбцах 2 и 5 сравнивать не друг с другом, а с «точными» значениями из столбца 4, то окажется, что и строгий, и приближенный подходы определяют мощность  $P_1$  с ошибками, сопос-

тавимыми по модулю, но противоположными по знакам.

Результаты, приведенные в таблице, являются еще одним свидетельством в пользу предлагаемой приближенной схемы, но для того, чтобы сформулировать окончательное заключение, следует обратиться к результатам, приведенным на рис. 2, — это зависимости ошибок (61.1) и (55.1) от числа шагов численной схемы (41.1), (42.1). В качестве точных значений мощности взаимодействующих полей рассматривались результаты, приведенные в столбце 4 таблицы. Расчеты проводились для наиболее интересного в практическом плане случая  $\mu = 15,21$ , когда эффективность ГВГ достигает своего максимального значения.

Зависимости, приведенные на рис. 2, однозначно свидетельствуют о том, что, по мере увеличения числа шагов рекуррентного процесса (41.1), (42.1), ошибки (55.1) и (61.1) монотонно стремятся к нулю (как приблизительно  $1/N$ ). Это и означает, что асимптотические (при  $N \rightarrow \infty$ ) значения мощностей  $P_1(N)$  и  $P_2(N)$  должны совпадать с точным решением нелинейной задачи. Вышесказанное определяет основной результат проведенной проверки.

Количественная сторона результатов, показанных на рис. 2, может несколько изменяться в зависимости от того, какой вариант решения будет выбираться в качестве точного. Напомним, что мощности  $P_1$  и  $P_2$ , приведенные в столбце 4 таблицы, являются точными только условно. Однако пока нет никаких сомнений в том, что основной результат проведенной проверки в качественном плане не изменится: при увеличении  $N$  решение нелинейной задачи с помощью предложенной приближенной численной схемы будет стремиться к точному результату

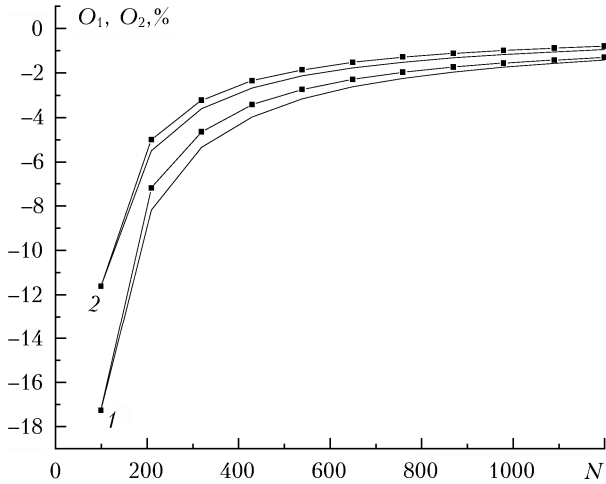


Рис. 2. Зависимость ошибок (61.1) (1) и (55.1) (2) от числа шагов рекуррентного процесса (41.1), (42.1). Кривые с точками – результаты расчетов; сплошные кривые – зависимости  $O_{Et}(N)$  (2)

по закону, близкому к  $1/N$ . Последнее, в частности, означает, что, как и предполагалось (см. разд. 2.1), решение (41.1), (42.1) определяет численную схему первого порядка.

## 2. Приближенное вычисление интегралов по продольной координате

Сравнивая результаты на рис. 1 и 2, заключаем, что в рамках численной схемы (41.1), (42.1) ошибки (1), (61.1) и (55.1), по мере увеличения числа шагов  $N$ , уменьшаются примерно одинаковым образом – близким к  $1/N$ . Это означает, что должны приближенно выполняться равенства

$$\begin{aligned} O_1(N) &= [P_{1t} - P_1(N)]/P_{1t} = \alpha_1 \cdot O_E(N), \\ O_2(N) &= [P_{2t} - P_2(N)]/P_{2t} = \alpha_2 \cdot O_E(N), \end{aligned} \quad (3)$$

где не зависящие от  $N$  коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  и точные значения мощностей  $P_{1t}$  и  $P_{2t}$  являются неизвестными величинами, которые требуется отыскать в результате решения нелинейной задачи.

Если бы равенства (3) выполнялись точно, то искомые величины мощностей ( $P_{1t}$  и  $P_{2t}$ ) взаимодействующих волн на выходе из кристалла можно было бы легко найти следующим образом. Реализуем схему (41.1), (42.1) с различным количеством шагов:  $N = N_1$  и  $N = N_2$ . В результате находим две тройки значений:  $P_1(N_1, N_2)$ ,  $P_2(N_1, N_2)$  и  $O_E(N_1, N_2)$ . Подставляем найденные значения в (76.1) и получаем две системы из двух уравнений каждая для неизвестных ( $P_{1t}, \alpha_1$ ) и ( $P_{2t}, \alpha_2$ ). Разрешая эти системы относительно, например,  $P_{1t}$  и  $P_{2t}$ , находим, что

$$P_{1t} = \frac{O_E(N_1)P_1(N_2) - O_E(N_2)P_1(N_1)}{O_E(N_1) - O_E(N_2)}, \quad (4)$$

$$P_{2t} = \frac{O_E(N_1)P_2(N_2) - O_E(N_2)P_2(N_1)}{O_E(N_1) - O_E(N_2)}. \quad (5)$$

Легко показать, что решения (4), (5) точно удовлетворяют закону сохранения энергии – для любой пары значений  $N_1$  и  $N_2$  выполняется

$$P_{1t} + P_{2t} = P, \quad (6)$$

где мощность  $P$  определена в (45.1).

В действительности коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  являются функциями числа шагов  $N$  рекуррентного процесса (41.1), (42.1), в силу чего равенства (3) выполняются только приближенно. Поэтому результат использования (4), (5), который обозначим через  $P_1(N_1, N_2)$  и  $P_2(N_1, N_2)$ , будет отличаться от точных значений мощностей  $P_{1t}$  и  $P_{2t}$  и зависеть от конкретного выбора величин  $N_1$  и  $N_2$ . Другими словами, (4), (5) определяют еще один вариант численной схемы приближенного решения нелинейной задачи. Только эта численная схема, в отличие от схемы (41.1), (42.1), является консервативной: для любой пары значений  $N_1$  и  $N_2$

$$P_1(N_1, N_2) + P_2(N_1, N_2) = P(1 + O), \quad (7)$$

где ошибка  $O$  оказывается порядка  $10^{-6} - 10^{-7}$  и определяется только ошибками округления.

Результат, аналогичный (4), (5), можно получить и другим, менее формализованным способом. Для этого достаточно, используя (41.1), (42.1), построить зависимости  $P_1(N)$  и  $P_2(N)$  для некоторого ограниченного и дискретного диапазона значений  $N$ . Затем эти зависимости необходимо экстраполировать на случай  $N \rightarrow \infty$ , выбрав для этого подходящий способ и подходящее количество узлов. Можно ожидать, что осуществление такой процедуры приведет к уточнению решения задачи: по сравнению с  $P_1(N)$  и  $P_2(N)$ , ошибки (55.1), (61.1) и (1) должны стать меньше. В частности, подобным образом были получены значения мощностей, приведенные в столбце 4 таблицы.

Принимая во внимание сказанное, выражения (4), (5) можно рассматривать как один из возможных вариантов экстраполяции по двум узлам. Несмотря на то, что такой вариант «прогноза» является, очевидно, самым грубым, именно (4), (5) и предлагается использовать в качестве искомого решения нелинейной задачи. Первое, что в этой связи необходимо сделать, это посмотреть, как такое решение будет зависеть от выбора чисел  $N_1$  и  $N_2$ , которые везде далее будем задавать с помощью величин

$$N_S = N_1 + N_2 \quad \text{и} \quad D_N = N_2 - N_1 > 1. \quad (8)$$

Таким образом, задача состоит в исследовании зависимостей  $P_1(N_S, D_N)$  и  $P_2(N_S, D_N)$ , которые найдутся с помощью (4), (5).

Для трех значений  $D_N$  (10, 20 и 30) на рис. 3 показан вид функций, соответственно,  $P_{2N}(N_S, D_N)$  и  $P_{1N}(N_S, D_N)$ , где

$$P_{N,2N}(N_S, D_N) = S + \frac{P_{1,2}(N_S, D_N)}{P_{1,2}(N_{\max}, D_N)}, \quad (9)$$

$N_{\max}$  — максимальное используемое число шагов  $N_S$ ; величина  $S$  определяет смещение графиков вдоль оси ординат. Использование нормированных мощностей (9) вместо  $P_1(N_S, D_N)$  и  $P_2(N_S, D_N)$  обусловлено исключительно желанием увеличить наглядность рисунков. Расчеты приведены для нескольких комбинаций исходных условий. Величины  $\mu$  выбирались таким образом, чтобы эффективность нелинейного преобразования во всех трех указанных ситуациях была  $\sim 10\%$  при максимальном числе шагов  $N_S = N_{\max}$ . Выбранные величины  $\Delta_{k0}$  являются оптимальными для низкоэффективной ГВГ.

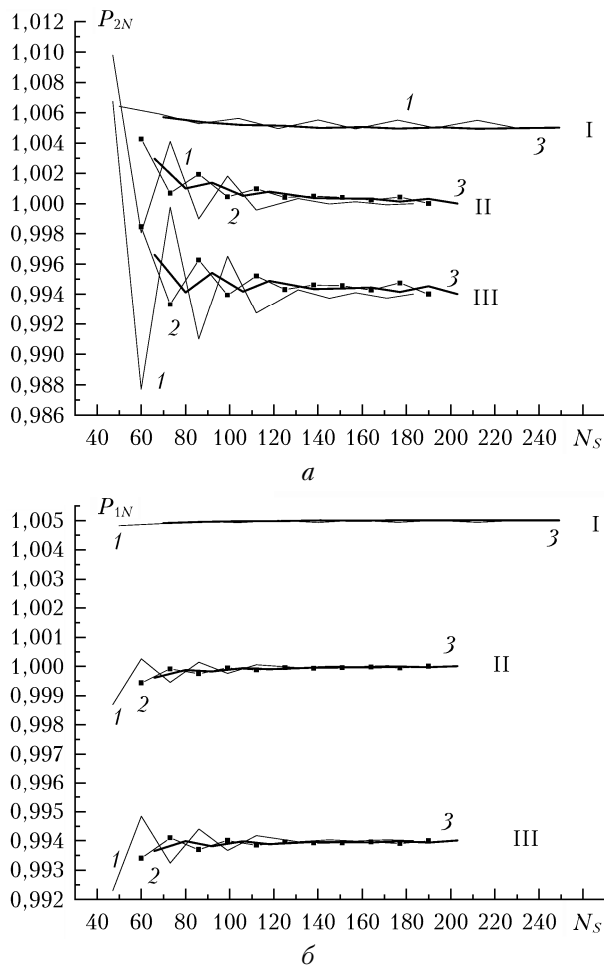


Рис. 3. Зависимость  $P_{2N}(N_S, D_N)$  (а);  $P_{1N}(N_S, D_N)$  (б) из (9) от суммарного числа шагов  $N_S$  для трех значений  $D_N = 10$  (1), 20 (2), 30 (3). Комбинации исходных параметров:  $\xi_x = 0,01$ ,  $\xi_y = 4$ ,  $\Delta_{k0} = -1,1$  (кривые I);  $\xi_x = 0,3$ ,  $\xi_y = 4$ ,  $\Delta_{k0} = -1,1$  (кривые II);  $\xi_x = 0,3$ ,  $\xi_y = 0,4$ ,  $\Delta_{k0} = -0,3$  (кривые III); эффективность нелинейного преобразования во всех трех ситуациях при  $N_S = N_{\max} \sim 10\%$

Зависимости  $P_{1N}(N_S, D_N)$  и  $P_{2N}(N_S, D_N)$  из (9), представленные на рис. 4, получены для тех же трех значений  $D_N = 10, 20$  и 30 — и для тех же трех комбинаций исходных параметров  $(\xi_x, \xi_y, \Delta_{k0})$  — ситуации I, II, III, что и на рис. 3. Только теперь величины  $\mu$  выбирались таким образом, чтобы эффективность нелинейного преобразования во всех трех

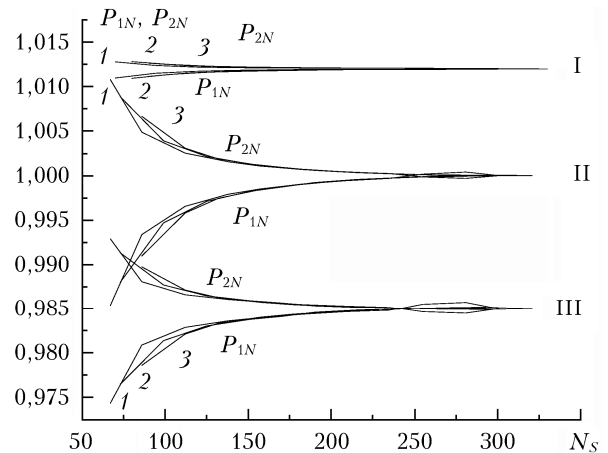


Рис. 4. Зависимость  $P_{1N}(N_S, D_N)$  и  $P_{2N}(N_S, D_N)$  из (9) от суммарного числа шагов  $N_S$  для трех значений  $D_N = 10$  (1), 20 (2), 30 (3). Комбинации исходных параметров:  $\xi_x = 0,01$ ,  $\xi_y = 4$ ,  $\Delta_{k0} = -1,1$  (кривые I);  $\xi_x = 0,3$ ,  $\xi_y = 4$ ,  $\Delta_{k0} = -1,1$  (кривые II);  $\xi_x = 0,3$ ,  $\xi_y = 0,4$ ,  $\Delta_{k0} = -0,3$  (кривые III); эффективность нелинейного преобразования во всех трех ситуациях при  $N_S = N_{\max} \sim 50\%$

указанных ситуациях была  $\sim 50\%$  при максимальном числе шагов  $N_S = N_{\max}$ . Смещения  $S$  из (9) были равны 0,0125, 0 и  $-0,015$ .

Результаты, представленные на рис. 3 и 4, позволяют сделать следующие выводы. По мере увеличения суммарного числа шагов  $N_S$  в схеме (4), (5) получаемые значения мощностей взаимодействующих волн  $P_1(N_S, D_N)$  и  $P_2(N_S, D_N)$  стремятся к некоторым асимптотическим значениям, которые следует рассматривать в качестве искомого решения. Если требуемая точность решения не является слишком высокой, то можно условно считать, что эти асимптотические значения мощности достигаются при некотором оптимальном количестве шагов  $N_S = N_{\text{opt}} \approx 200$ . Из представленных результатов хорошо видно, что в случае  $N_S > N_{\text{opt}}$  величины  $P_1(N_S, D_N)$  и  $P_2(N_S, D_N)$  слабо зависят от выбора  $D_N$ . При малых значениях  $N_S < N_{\text{opt}}$  зависимости  $P_1(N_S, D_N)$  и  $P_2(N_S, D_N)$  приобретает осциллирующий характер. Величина этих осцилляций оказывается тем больше, чем меньше значение  $D_N$  и эффективность ГВГ.

Приведенные на рис. 4 и 5 результаты показывают, что в общем случае величина  $N_S$  должна быть тем больше, чем больше эффективность нелинейного преобразования и параметр фокусировки  $\xi_x$ . Характер  $P_1(N_S, D_N)$  и  $P_2(N_S, D_N)$  практически не зависит от величины параметра  $\xi_y$ , по крайней мере в качественном плане. Другими словами, наиболее сложными для поведения расчетов оказываются ситуации, характеризующиеся большими значениями параметров  $\mu$  и  $\xi_x$ . В этом смысле схемы (41.1), (42.1) и (4), (5) ведут себя, как и следовало ожидать, похожим образом.

Использование схемы (4), (5) будет целесообразным только в том случае, если асимптотические значения  $P_1(N_S, D_N)$  и  $P_2(N_S, D_N)$ , реализуемые

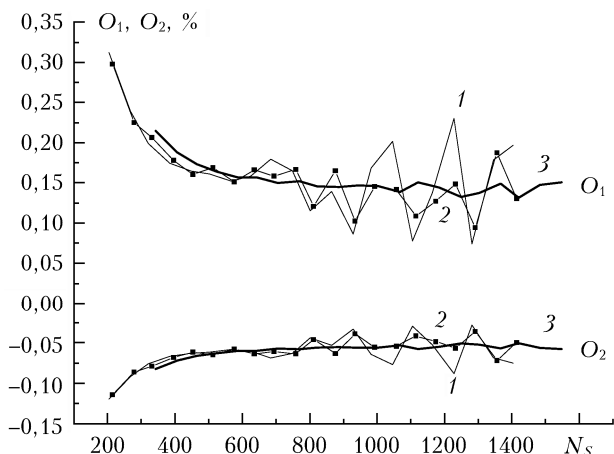


Рис. 5. Зависимость ошибок  $O_1$  (61.1) и  $O_2$  (55.1) от суммарного числа шагов  $N_S$  для трех значений  $D_N = 10$  (кривые 1), 20 (кривые 2), 30 (кривые 3)

при  $N_S > N_{opt}$ , будут стремиться к  $P_{1t}$  и  $P_{2t}$ , т.е. к точному решению задачи. Чтобы проверить этот момент, вновь обратимся к результатам, приведенным в таблице, и сравним решения (4), (5) с данными из столбца 4 таблицы, которые и будем рассматривать в качестве точного решения. Результат такого сравнения показан на рис. 5 в виде зависимостей ошибок (55.1) и (61.1) от суммарного числа шагов  $N_S$  схемы (4), (5). Расчеты проводились для трех значений  $D_N$ : 10, 20 и 150. Величина  $\mu$  при этом составляла 9,51 (первая строка в таблице).

Рисунок 5 показывает, что ошибки (55.1) и (61.1), получаемые с использованием численной схемы (4), (5), при  $N_S = N_{opt}$  (для выбранного набора исходных условий  $N_{opt} \sim 400$ ), выходят на некоторые стационарные уровни  $\sim 0,1-0,2\%$ . Дальнейшее увеличение числа шагов случайным образом увеличивает величины ошибок. Причем это проявляется тем заметнее, чем меньше величина  $D_N$ .

Из сказанного следует, что предлагаемая численная схема приближенного решения нелинейной задачи не позволяет обеспечить сколько угодно малую величину ошибок (55.1) и (61.1). Можно предположить, что это связано в первую очередь с приближениями, использованными для уменьшения времени проведения расчетов. Напомним, что и для простейшего случая – приближение заданного поля (см. разд. 2.1) – величины обсуждаемых ошибок так же были на уровне  $\sim 0,1\%$ . Поэтому приводить результаты, аналогичные представленным на рис. 5, но полученные для других комбинаций исходных условий  $\mu, \xi_x, \xi_y, \Delta_{k0}$ , большого смысла не имеет. Основной вывод в качественном плане останется прежним: увеличение числа шагов схемы (4), (5) имеет смысл (решение задачи уточняется) только до некоторого значения  $N_S = N_{opt}$ , которое зависит от исходных условий задачи. При этом чем больше величина  $D_N$  из (8), тем более монотонно ошибки (55.1) и (61.1) будут стремиться к своим минимальным значениям.

Основное преимущество численной схемы (4), (5), по сравнению с (41.1), (42.1), иллюстрируют

результаты на рис. 6. Здесь приведены ошибки  $O_1$  (61.1) и  $O_2$  (55.1), получаемые при решении одной и той же задачи двумя способами: с использованием численной схемы (4), (5) – кривые I – и схемы (41.1), (42.1) – кривые II. Кривые I демонстрируют зависимость рассматриваемых ошибок от суммарного числа шагов  $N_S$  ( $D_N = 20$ ), а кривые II – от числа шагов  $N = 3N_S$ , используемого для реализации схемы (41.1), (42.1). Рассматриваемая задача характеризовалась исходными условиями (57.1);  $\mu = 19,01$ . В таблице этой задаче соответствуют результаты, представленные в последней строке. Следовательно, в качестве точных значений мощностей, которые необходимо задать для вычисления ошибок  $O_1$  (61.1) и  $O_2$  (55.1), выбирались результаты, приведенные в последней строке, столбец 4.

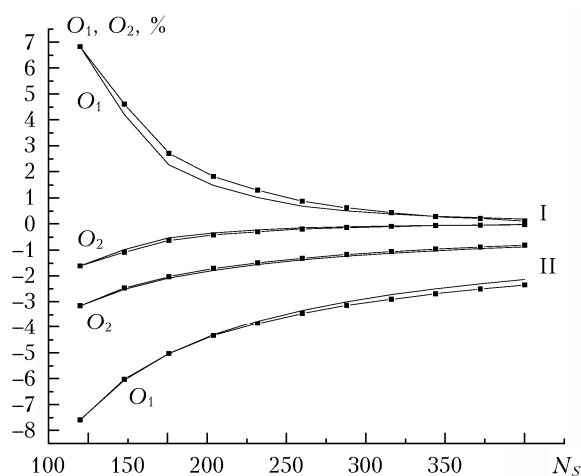


Рис. 6. Зависимости  $O_{1,2}(N_S)$  и  $O_{1,2}(N = 3N_S)$ , полученные при двух вариантах решения выбранной нелинейной задачи: схема (4), (5) (кривые I); схема (41.1), (42.1) (кривые II). Кривые с точками – результаты расчетов; сплошные кривые – аппроксимация функциями (10) (кривые I) и функциями (11) (кривые II)

Результаты непосредственных расчетов на рис. 6 показаны кривыми с точками. Сплошными кривыми представлены аппроксимирующие эти результаты зависимости  $O_{1T}$  и  $O_{2T}$ , которые для ситуаций I и II имели следующий вид:

$$O_{1T,2T}(N) = O_{1,2}(N = N_n) \cdot (N_n/N)^3, \quad (10)$$

$$O_{1T,2T}(N) = O_{1,2}(N = N_n) \cdot N_n/N, \quad (11)$$

где  $N_n$  – начальное число шагов.

Рисунок 6 явно показывает, что при использовании для двух обсуждаемых численных схем одинакового количества шагов, т.е. при выполнении условия  $N = N_S$ , схема (4), (5) обеспечивает существенно более высокую точность оценок мощностей взаимодействующих полей на выходе из кристалла, чем схема (41.1), (42.1). Другими словами, если желаемые величины ошибок  $O_1$  и  $O_2$  заданы априорно, то можно ожидать, что время работы программы, необходимое для реализации такой заданной

точности, при использовании схемы (4), (5) окажется в разы меньше. Это обстоятельство и определяет единственное, но весьма важное для практики преимущество предложенной численной схемы.

Отмеченное сокращение времени работы программы будет тем значительнее, чем выше желаемая точность расчетов. Например, при уменьшении требуемой величины ошибок от  $\sim 1$  до  $\sim 0,1\%$  преимущество во времени увеличивается от  $\sim 10$  до  $\sim 30$  раз. В этом легко убедиться, обратившись к результатам на рис. 6. Отмеченное свойство является прямым следствием следующего обстоятельства. Как уже неоднократно отмечалось, соотношения (41.1), (42.1) определяют численную схему первого порядка: при увеличении числа шагов  $N$  ошибки (55.1), (61.1) и (1) уменьшаются по закону, близкому к  $1/N$  (см. кривые II на рис. 6). Схема (4), (5) обеспечивает более быстрое уменьшение ошибок. В рассмотренном на рис. 6 случае закон убывания ошибок (55.1) и (61.1) оказывается близким (см. (10)) к  $1/N_s^3$ . Поэтому понятно, что по мере увеличения числа шагов результаты, полученные с использованием схем (41.1), (42.1) и (4), (5), будут отличаться все сильнее и сильнее.

Из этого следует, что действия, предусмотренные (4), (5), позволяют заметно увеличить порядок численной схемы по сравнению с исходной (41.1), (42.1). Например, в рассмотренном на рис. 6 случае это увеличение составило  $\sim 3$  раза. При других исходных условиях (здесь эти результаты приводить не будем) сокращение времени работы программы может быть несколько меньше, но во всех исследованных случаях порядок схемы (4), (5) оставался на уровне два или больше. Имеют ли эти изменения порядка случайный характер или это вполне закономерный результат — сказать трудно. Поэтому на данном этапе предлагается ограничиться констатацией факта: использование методики (4), (5) для оценки мощностей взаимодействующих волн эквивалентно (в плане уменьшения ошибок (55.1) и (61.1)) использованию численной схемы как минимум второго порядка.

Напомним, что обсуждения, представленные в разд. 2.1, легко позволяют вместо численной схемы (41.1), (42.1), имеющей первый порядок по определению, построить, причем совершенно строго, численные схемы второго, третьего и т.д. порядка. В этой связи было бы интересно сравнить результаты, получаемые с такой строгой схемой, допустим третьего порядка, с результатами использования (4), (5), которая, как было договорено выше, только эквивалентна схеме третьего порядка, например, для случая на рис. 6. Однако проведение таких исследований составляет предмет большой самостоятельной работы, и здесь эти вопросы затрагивать не будем. Отметим лишь, что использование строгой схемы высокого порядка (второго, третьего и т.д.) приведет к увеличению необходимого времени расчетов (по сравнению с (41.1), (42.1) — схемой первого порядка), соответственно, в 2, 3 и т.д. раз, если число шагов  $N$  в том и другом случае выбирается одинаковым.

Предположим, что основная цель проводимых расчетов — определение эффективности нелинейного преобразования с не слишком высокой точностью. Например, будем полагать, что точность решения удовлетворительная, если ошибка (55.1) не превышает, скажем,  $0,5\%$ . В такой постановке использование схемы (4), (5) представляется на данный момент наиболее подходящим вариантом (из всех обсуждавшихся выше) решения нелинейной задачи, который позволяет обеспечить требуемую точность решения при наименьшем времени работы программы. При этом важный для практики методологический вопрос о том, как задать минимальное число шагов схемы, которое обеспечит требуемую точность, остается открытым. Причем это относится к любому варианту численного решения нелинейной задачи. Основное принципиальное ограничение численной схемы (4), (5) состоит в том, что она не позволяет определить вид функций  $A_{1,2}(x_0, y_0, z_k; L_0)$ , которым соответствуют найденные (в результате реализации схемы) значения мощностей. Поэтому если по условиям нелинейной задачи требуется найти численные представления для амплитуд и фаз взаимодействующих волн в плоскости наблюдения, а не только их мощности, то численная схема (4), (5) становится непригодной. При такой более общей постановке задачи для ее решения остается использовать схему (41.1), (42.1) с достаточно большим (в наиболее интересных для практики случаях) числом шагов, что должно обеспечить требуемую точность решения.

## Заключение

Сделаем ряд замечаний, касающихся возможностей расширения области применения предложенной методики расчетов.

В рамках проведенных исследований предполагалось, что лазерное излучение фокусируется в нелинейный кристалл двумя скрещенными цилиндрическими линзами, параметры фокусировки которых удовлетворяют условиям  $\xi_x < 0,3$ ;  $\xi_y < 4$ . Такой выбор обусловлен тем, что указанный диапазон охватывает, по-видимому, все наиболее интересные для практики случаи. Именно этим условиям удовлетворяют (и это нетрудно показать) оптимальные параметры фокусировки, при которых процесс ГВГ имеет максимальную (для заданной входной мощности) эффективность. На практике реализовать фокусировку двумя цилиндрическими линзами достаточно трудно, поэтому чаще всего используется фокусировка одной сферической линзой, что заметно снижает максимальную эффективность ГВГ (в  $\sim 1,2$  раза), но существенно проще в реализации. При использовании одной сферической линзы оптимальные параметры фокусировки должны удовлетворять условию  $\xi_x = \xi_y < 2$ . Для ситуаций, когда  $\xi_x > 0,3$ , численные схемы (41.1), (42.1) и (4), (5) будут по-прежнему применимы, но границы интегралов по  $dx$  придется пересмотреть. Это представляется вполне возможным, хотя и потребует дополнительных исследований.

В настоящей работе рассматривался самый простой из нелинейных процессов — ГВГ при скалярном

«*ooe*»-синхронизме — при условии, что излучение ВГ на входе в нелинейный кристалл (ВВО длиной 1 см) отсутствует. Поглощение в кристалле не учитывалось. Предполагается, что предложенная методика расчетов без каких-либо изменений применима для исследования ГВГ в любых одноосных отрицательных квадратично нелинейных кристаллах с любым разумным продольным размером, в том числе и при ненулевых граничных условиях для поля ВГ. По-видимому, не составляет труда обобщить предложенные численные схемы на поглощающие нелинейные среды. Для этого достаточно под интегралами по  $dt$  в (11.1), (12.1) поставить экспоненты  $\exp(-\delta_{1,2}t)$ , где величины коэффициентов поглощения ( $\delta_{1,2}$ ) зависят только от длины волны и приводятся в любом справочнике по нелинейным кристаллам. На данный момент представляется вполне очевидным обобщение полученных результатов на случай суммирования частот (трехчастотное взаимодействие) при скалярном «*ooe*»-синхронизме. Это потребует добавить в численную схему еще одно уравнение, аналогичное (41.1). Менее очевидным (но, скорее всего, возможным) выглядит обобщение численной схемы на другие типы синхронизма, при которых необыкновенной волной будет основное излучение (или два лазерных пучка, если имеется в виду трехчастотное взаимодействие). Это, вероятно, потребует определенной модификации исходной (см. Введение в [1]) системы интегральных уравнений.

Все расчеты, представленные в настоящей работе, проведены в предположении, что основное излучение является гауссовым пучком. Это сделано исключительно для того, чтобы обеспечить возможность надежной проверки использованных при-

ближений. Обобщение численной схемы на случай произвольного (в разумных пределах) поперечного профиля основного излучения не потребует, как представляется на настоящий момент, каких-либо принципиальных изменений численной схемы. И это подтверждается результатами первых предварительных исследований. Проблемы должны появиться в том случае, когда основное излучение в плоскости наблюдения (т.е. на большом удалении от кристалла) будет иметь в поперечном сечении сильно осциллирующий характер. Если окажется, что пренебречь этими осцилляциями принципиально невозможно, то использование предложенных численных схем потребует как минимум увеличения числа узлов на сетке поперечных координат. Время работы программы при этом неизбежно увеличится, и следовательно, может возникнуть вопрос о целесообразности использования предлагаемой методики для такого типа задач.

По-видимому, наиболее интересным (в плане адаптации теории к условиям реального эксперимента) является анализ процесса ГВГ частично когерентного лазерного излучения. К сожалению, как раз для этого случая предложенные численные схемы вряд ли смогут быть полезными. Описание частично когерентного излучения предполагает использование принципиально другого подхода, базирующегося на методах статистической оптики, рассмотрение которых выходит далеко за рамки настоящей работы.

1. Колосов В.В., Троицкий В.О. Приближенная методика решения задачи о генерации второй гармоники в нелинейных кристаллах. Часть 1 // Оптика атмосф. и океана. 2019. Т. 32, № 12. С. 1001–1011.

*V.V. Kolosov, V.O. Troitskii. Approximate technique for solution of the problem on second harmonic generation in nonlinear crystals. Part 2.*

This paper is the second and the last part of the study. It presents the results of tests of the numerical scheme proposed in the first part. The approximate procedure for estimation of the power of interacting waves at the exit from the crystal is discussed. This procedure allows the computation time to be shortened by more than an order of magnitude by means of a decrease in the minimal needed number of steps of the recurrent process.