«Оптика атмосферы», **4**, № 12 (1991)

УДК 535.8

Д.А. Безуглов

МЕТОД СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ЧИСЛА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МОД АДАПТИВНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ФАЗОВОГО СОПРЯЖЕНИЯ

На базе метода сплайн-аппроксимации с использованием нормализованных параболических B-сплайнов получены аналитические выражения для среднеквадратической по апертуре ошибки восстановления фазового фронта с учетом шумов измерений датчика фазового фронта гартмановского типа. Получена оценка корреляционной матрицы вектора управляющих сигналов гибкого адаптивного зеркала для колмогоровского спектра турбулентности. На базе полученных результатов записано выражение для оптимального рекуррентного оценивания вектора управляющих сигналов гибкого адаптивного зеркала на основе пьезокерамической пластины.

В настоящее время при создании адаптивных оптических систем, компенсирующих нестационарные искажения световых пучков при их распространении в турбулентной атмосфере, широко используются гибкие адаптивные зеркала на основе пьезокерамических пластин. Это обусловлено в основном двумя причинами. Во-первых, такие зеркала обладают широким частотным диапазоном и большим диапазоном фазовой коррекции [1]. Во-вторых, в [2] предложена эффективная процедура оценки распределения остаточной ошибки аппроксимации фазового фронта этими зеркалами в зависимости от формы и числа управляющих электродов. Также следует отметить тот факт; что функции отклика таких зеркал достаточно близки к ортогональным полиномам Цернике, для которых в [3] получены аналитические выражения, позволяющие обосновывать выбор числа пространственных мод фазовой коррекции в зависимости от требуемой точности аппроксимации фазового фронта, описываемого колмогоровским спектром фазовых флуктуаций. В силу специфики квадратичного детектирования в качестве датчика фазового фронта в адаптивных оптических системах фазового сопряжения обычно используются датчики интерференционного и гартмановского типов. Это связано с тем, что метод Гартмана, позволяющий определять величину искажений фазового фронта по смещениям изображений объекта в фокусах субапертур, равномерно покрывающих апертуру, представляется наиболее перспективным [4]. При этом по измеренным средним наклонам фазового фронта в пределах субапертуры Ω_{ij}, пропорциональным в общем случае величинам вида

$$k^{-1}\frac{\partial\Phi(x_i,\ y_j)}{\partial x},\quad \frac{k^{-1}\partial\Phi(x_i,\ y_j)}{\partial y},\quad i,\ j=\overline{1,\ n}, \tag{1}$$

где k — волновое число; $\Phi(x,\ y)$ — функция, описывающая распределение фазы на апертуре; $n^2=M$ — число субапертур, производят вычисление вектора управляющих сигналов адаптивной оптической системы [5]. В работах [2, 3] показано, что увеличение числа пространственных мод, корректируемых адаптивной оптической системой, приводит к уменьшению ошибки аппроксимации фазового фронта. Однако в связи с тем,, что для вычисления элементов вектора управляющих сигналов в реальных системах используется метод наименьших квадратов, а сигналы с датчика фазового фронта можно представить в виде

$$\frac{k^{-1}\partial\Phi(x_i,\ y_j)}{\partial x}+n_{ij}^{x},\quad \frac{k^{-1}\partial\Phi(x_i,\ y_j)}{\partial y}+n_{ij}^{y}, \tag{2}$$

где n_{ij}^x, n_{ij}^y — шумы измерений, с увеличением числа пространственных мод N и дисперсии шумов σ^2, погрешность вычисления вектора управляющих сигналов, обусловленная -этими факторами, будет увеличиваться. Эффективная методика выбора числа пространственных мод корректора фазового фронта в том случае, когда они описываются ортогональными полиномами Цернике, получена в работе [4]. Для функций отклика произвольного вида этот вопрос остается открытым.

Данная статья посвящена разработке метода оптимального выбора числа пространственных мод адаптивной оптической системы с использованием системы нормализованных параболических B-сплайнов с учетом шумов измерений локальных наклонов фазового фронта.

Рассмотрим задачу в следующей постановке. Пусть на апертуре радиусом R датчик Гартмана измеряет значения частных производных фазового фронта вида (2), пропорциональных средним локальным наклонам фазового фронта на субапертуре Ω_{ij}. При этом модель турбулентной атмосферы будем считать колмогоровской, а гипотезу «замороженной» турбулентности выполняющейся. Адаптивный корректор фазового фронта будем описывать линейной комбинацией его пространственных мод:

$$U(x,\ y,\ \mathbf{A}) = \sum_{l=1}^{N} a_l \psi_l(x,\ y), \tag{3}$$

где $U(x,\ y,\ \mathbf{A})$ — отклик зеркала на вектор управляющих воздействий $\mathbf{A}$ с элементами a_l; $\psi_l(x,\ y)$ — l-я пространственная мода адаптивного корректора; N — число пространственных мод. При нахождении методом МНК элементов вектора $\mathbf{A}$ без учета шумов n^x, n^y систему нормальных уравнений запишем в следующем виде:

$$D\mathbf{A} = \mathbf{F}, \tag{4}$$

где D — квадратная матрица с элементами $d_{\kappa l}$,

$$d_{\kappa l} = \left(\frac{\partial \Psi_\kappa(x,\ y)}{\partial x},\ \frac{\partial \Psi_l(x,\ y)}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Psi_\kappa(x,\ y)}{\partial y},\ \frac{\partial \Psi_l(x,\ y)}{\partial y}\right),\ l,\ \kappa = \overline{1,\ N},$$

$\mathbf{A}$ — искомый вектор-столбец управляющих воздействий; $\mathbf{F}$ — вектор столбец правой части с элементами f_κ;

$$f_\kappa = \left(\frac{\partial \Phi(x,\ y)}{\partial x},\ \frac{\partial \Psi_\kappa(x,\ y)}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Phi(x,\ y)}{\partial y},\ \frac{\partial \Psi_\kappa(x,\ y)}{\partial y}\right).$$

Круглыми скобками здесь и в дальнейшем будем обозначать скалярное произведение

$$(q_1,\ q_2) = \iint_S q_1 q_2 dx dy = \iint_S q_1 q_2 d^2\mathbf{r}, \tag{5}$$

где $\mathbf{r} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Статистические свойства шумов n^x и n^y зададим в виде

$$M[n_{ij}^x] = M[n_{ij}^y] = 0, \tag{6}$$

$$M[n_{ij}^x n_{rs}^x] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{при } i = r \text{ и } j = s, \\ K & \text{при } i = r \text{ или } j = s, \end{cases}$$

$$M[n_{ij}^x n_{rs}^y] = 0 \text{ при любых } i,\ j,\ r,\ s, \tag{7}$$

где $M[\cdot]$ — знак математического ожидания, усреднение при этом здесь и в дальнейшем подразумевается по множеству реализаций.

В справедливости (7) можно легко убедиться следующим образом. Пусть наклоны фазового фронта измеряются с помощью датчика гартмановского типа с квадрантными фотоприемниками. И пусть статистические характеристики шумов n_i с выходов каждого из фотоприемников при условии сильного сигнала подчиняются следующему соотношению;

$$M[n_i] = 0,\ M[n_i n_j] = \begin{cases} \sigma_n^2 & \text{при } i = j; \\ K_1 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \tag{8}$$

где K_1 — коэффициент корреляции.

С учетом того, что сигналы, пропорциональные локальным наклонам U_x и U_y, обычно получают в виде

$$U_x = (U_1 + U_2) - (U_3 - U_4);\ U_y = (U_1 + U_2) - (U_3 + U_4), \tag{9}$$

то, используя (8), нетрудно убедиться, что:

$$M[n^x] = M[n^y] = 0;$$

$$M[n^x n^y] = M[\{(n_1 + n_2) - (n_3 + n_4)\} \cdot \{(n_1 + n_3) - (n_2 + n_4)\}] = 0;$$

$$M[n^x n^x] = M[\{(n_1 + n_2) - (n_3 + n_4)\} \cdot \{(n_1 + n_3) - (n_2 + n_4)\}] = 4(\sigma_n^2 - K_1), \tag{10}$$

при $K_1 = 0$ $M[n^x n^x] = 4\sigma_n^2$.

Физический смысл выражения (10) состоит в том, что ошибки измерений наклонов фазового фронта некоррелированы даже в случае коррелированности шумов квадрантных фотоприемников.

С учетом (2) система линейных уравнений (4) оценки вектора **A*** запишется следующим образом:

$$\mathbf{A}^* = D^{-1}\mathbf{F}^*, \tag{11}$$

где $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}+\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{\Gamma}$ — вектор-столбец ошибок q_κ оценки коэффициентов A; $\mathbf{F}^*$ — вектор-столбец с коэффициентами:

$$f_\kappa^* = \left(\frac{\partial\Phi(x,\ y)}{\partial x} + n^x,\ \frac{\partial\Psi_\kappa(x,\ y)}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\Phi(x,\ y)}{\partial y} + n^y,\ \frac{\partial\Psi_\kappa(x,\ y)}{\partial y}\right).$$

Найдем статистические характеристики элементов вектора $\mathbf{\Gamma}$: $M[\gamma_\kappa]$ и $M[\gamma_\kappa,\ \gamma_l]$. С учетом линейности системы (11) можно записать:

$$M[\gamma_\kappa] = M\left[\sum_{l=1}^{N} d_{\kappa l}^{-1} f_l^*\right] = \sum_{l=1}^{N} d_{\kappa l}^{-1}\left\{\left(M[n^x],\ \frac{\partial\Psi_l(x,\ y)}{\partial x}\right) + \left(M[n^y],\ \frac{\partial\Psi_l(x,\ y)}{\partial y}\right)\right\} = 0, \tag{12}$$

где $d_{\kappa i}^{-1}$ — элементы обратной матрицы D^{-1}; f_i^* — элементы вектора $\mathbf{F}^*$,

$$M[\gamma_\kappa\gamma_l] = M\left[\sum_{l=1}^{N} d_{\kappa l}^{-1}\left\{\frac{1}{n^2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} n_{sp}^x\cdot\frac{\partial\Psi_\kappa(x_s,\ y_p)}{\partial x} + n_{sp}^y\cdot\frac{\partial\Psi_\kappa(x_s,\ y_p)}{\partial y}\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{j=1}^{N} d_{ji}^{-1}\left\{\frac{1}{n^2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} n_{rt}^x\frac{\partial\Psi_j(x_r,\ y_t)}{\partial x} + n_{rt}^y\cdot\frac{\partial\Psi_j(x_r,\ y_t)}{\partial y}\right\}\right]. \tag{13}$$

В выражении (13) непрерывное скалярное произведение заменено на его дискретный аналог, так как датчики гартмановского типа, как было сказано выше, измеряют значения средних наклонов фазового фронта только в точках апертуры. При этом общее число субапертур M имеет порядок $M \sim n^2$. При подробном рассмотрении сомножителей в квадратичной форме (13) в фигурных скобках оказывается, что в силу выполнения условий (6), (7) их произведение не будет равно нулю только при совпадении индексов sp и rt. Таким образом, можно записать

$$M[\gamma_\kappa\gamma_l] = \frac{\sigma^2}{n^4}\sum_{l=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} d_{\kappa l}^{-1} d_{lj}^{-1}\left\{\sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial\Psi_\kappa(x_s,\ y_p)}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Psi_j(x_s,y_p)}{\partial x} + \frac{\partial\Psi_\kappa(x_s,\ y_p)}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Psi_j(x_s,\ y_p)}{\partial y}\right\}, \tag{14}$$

или с учетом (4)

$$M[\gamma_\kappa\gamma_l] = \frac{\sigma^2}{M}\cdot\sum_{l=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} d_{\kappa l}^{-1}\cdot d_{ji}^{-1}\cdot d_{\kappa j}. \tag{15}$$

В матричной форме выражение (14) с учетом того, что D — симметрическая, запишется в виде

$$M[\gamma_\kappa,\ \gamma_l] = \frac{\sigma^2}{M}D^{-1}DD^{-1} = \frac{\sigma^2}{M}D^{-1}. \tag{16}$$

Таким образом, для вычисления элементов ковариационной матрицы ошибок оценки вектора **A** с учетом шумов измерений датчика фазового фронта необходимо знание элементов матрицы D. При расчете характеристик реальной адаптивной системы с гибким зеркалом необходимо рассмотреть два случая. Если система пространственных мод корректора фазового фронта может быть описана с помощью аналитических функций, то расчет элементов матрицы D в общем случае не представляет труда. Если же пространственные моды корректора фазового фронта не удается с достаточной степенью точности выразить аналитически, но имеются результаты их экспериментальных измерений [3], то в этом случае целесообразно использовать методы численного интегрирования и. дифференцирования. Хорошие результаты в этом случае могут быть получены с использованием хорошо разработанного аппарата сплайн-функций [6].

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Пусть известны аналитические или экспериментально измеренные пространственные моды корректора фазового фронта. Они всегда могут быть представлены в виде системы параболических нормализованных B-сплайнов на неподвижной сетке [6, 9].

$$\Psi_\kappa(x,\ y) = \sum_{i=0}^{n+1}\sum_{j=0}^{n+1} b_{ij}^\kappa B_{2i}(x,\ \bar{x}_i)\,B_{2j}(y,\ \bar{y}_j); \tag{17}$$

где

$$B_{2i}(x, \bar{x}) = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} + \frac{x - \bar{x}_i}{h}\right]^2 \cdot B_{0i-1} + \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{x - \bar{x}_i}{h}\right)^2\right] B_{0i} + \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} + \frac{x - \bar{x}_i}{h}\right]^2 \cdot B_{0i+1};$$

$$+ B_{2j}(y, \bar{y}) = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} + \frac{y - \bar{y}_j}{h}\right]^2 \cdot B_{0i-1} + \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{y - \bar{y}_j}{h}\right)^2\right] B_{0j} + \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} + \frac{y - \bar{y}_j}{h}\right]^2 \cdot B_{0i+1};$$

$$+ B_{0i} = \begin{cases} 1 \text{ для } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 \text{ для } x \notin [x_i, x_{i+1}] \end{cases}, \quad B_{0j} = \begin{cases} 1 \text{ для } y \in [y_j, y_{j+1}] \\ 0 \text{ для } y \notin [y_j, y_{j+1}] \end{cases},$$

где h — шаг сетки.

В таком представлении набор коэффициентов двумерного параболического B-сплайна b_{ij}^{κ} однозначно описывают κ-ю пространственную моду корректора фазового фронта. Систему коэффициентов b_{ij}^{κ} для κ-й пространственной моды можно вычислить известными методами, зная ее значения в узлах коллокации сплайна [6]. С учетом (4), (16) значения частных производных κ-й пространственной моды вида $\frac{\partial \Psi_{\kappa}(x, y)}{\partial x}$ могут быть представлены выражением:

$$\frac{\partial \Psi_{\kappa}(x, y)}{\partial x} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\left\{\left(\frac{3}{2} + \frac{y - \bar{y}_j}{h}\right)^2 \left(\frac{3}{4}(b_{i+1, j-1}^{\kappa} - b_{i+1, j+1}^{\kappa}) + \frac{1}{2}\left(\frac{x - \bar{x}_i}{h}\right) \cdot (b_{i-1, j-1}^{\kappa} + b_{i+1, j-1}^{\kappa})\right) + \right.$$

$$+ \left(\frac{3}{4} - \left(\frac{y - \bar{y_j}}{h}\right)^2 \left(\frac{3}{2}(b_{i-1, j}^{\kappa} + b_{i+1, j}^{\kappa}) + \left(\frac{x - \bar{x}}{h}\right)(b_{i-1, j}^{\kappa} - 2b_{i, j}^{\kappa} - 1b_{i+1, j}^{\kappa})\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{3}{2} - \frac{y - \bar{y}_j}{h}\right)^2 \left(\frac{3}{4}(b_{i-1, j+1}^{\kappa} + b_{i+1, j+1}^{\kappa}) + \frac{1}{2}\left(\frac{x - \bar{x}_i}{h}\right)(b_{i-1, j+1}^{\kappa} - 2b_{i, j+1}^{\kappa} - b_{i+1, j+1}^{\kappa})\right)\right)\right\}. \quad (18)$$

Введем следующие обозначения:

$$b_{i-1, j-1}^{\kappa} - 2b_{i, j-1}^{\kappa} + b_{i+1, j-1}^{\kappa} - 2b_{i-1, j}^{\kappa} + 4b_{i, j}^{\kappa} +$$

$$+ 4b_{i+1, j}^{\kappa} + b_{i-1, j+1}^{\kappa} - 2b_{i, j+1}^{\kappa} - b_{i+1, j+1}^{\kappa} = a_1^{\kappa};$$

$$b_{i-1, j-1}^{\kappa} - b_{i+1, j-1}^{\kappa} - 2b_{i-1, j}^{\kappa} - 2b_{i+1, j}^{\kappa} + b_{i-1, j+1}^{\kappa} + b_{i+1, j+1}^{\kappa} = a_2^{\kappa};$$

$$b_{i-1, j-1}^{\kappa} - 2b_{i, j+1}^{\kappa} + b_{i+1, j-1}^{\kappa} - b_{i-1, j+1}^{\kappa} + 2b_{i, j+1}^{\kappa} + b_{i+1, j+1}^{\kappa} = a_3^{\kappa};$$

$$b_{i-1, j-1}^{\kappa} - b_{i+1, j-1}^{\kappa} - b_{i-1, j+1}^{\kappa} - b_{i+1, j+1}^{\kappa} = a_4^{\kappa};$$

$$b_{i-1, j-1}^{\kappa} - 2b_{i, j+1}^{\kappa} + b_{i+1, j-1}^{\kappa} + b_{i-1, j+1}^{\kappa} - 2b_{i+1, j+1}^{\kappa} = a_5^{\kappa};$$

$$b_{i-1, j-1}^{\kappa} - b_{i+1, j}^{\kappa} + 2b_{i+1, j}^{\kappa} + b_{i-1, j+1}^{\kappa} + b_{i+1, j+1}^{\kappa} = a_6^{\kappa}. \quad (19)$$

После несложных, но достаточно громоздких выкладок, можно показать, что элементы матрицы D могут быть вычислены в терминах сплайнов в соответствии со следующим выражением:

$$\iint \frac{\partial \Psi_{\kappa}(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Psi_{l}(x, y)}{\partial x}\, dxdy = \frac{1}{h^4}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{h^{2}}{256 \cdot 15} a_1^{\kappa} a_1^{l} + \right.$$

$$+ \frac{9(h\bar{x}_i + h^2)}{40 \cdot 16} \cdot a_2^{\kappa} \cdot a_2^{l} + \frac{h^2}{9 \cdot 16} \cdot \left(\frac{3}{16} a_1^{\kappa} a_5^{l} + \frac{3}{16} a_5^{\kappa} a_1^{l} + \frac{9}{8} a_3^{\kappa} a_3^{l}\right) +$$

$$\left. + \frac{(2\bar{x}_i + h)}{36} \cdot \left(\frac{81}{16} a_1^{\kappa} a_4^{l} + \frac{27}{64} a_6^{\kappa} a_2^{l} + \frac{27}{64} a_2^{\kappa} a_6^{l}\right) + \frac{(2\bar{y}_j + h)}{324} a_5^{\kappa} a_5^{l} + \frac{81h^2}{256} a_6^{\kappa} a_6^{l}\right). \quad (20)$$

Аналогичным образом может быть вычислено скалярное произведение

$$\iint \frac{\partial\Psi_\kappa(x,\ y)}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Psi_l(x,\ y)}{\partial y}\cdot dxdy. \tag{21}$$

Отклик корректора фазового фронта, восстановленный из измерений датчика гартмановского типа с учетом шумов измерений, можно записать в виде

$$U(x,\ y,\ \mathbf{A}) = \sum_{l=1}^{N}(a_l+\gamma_l)\Psi_l\ (x,\ y). \tag{22}$$

Тогда ошибка, вносимая корректором фазового фронта, будет определяться как

$$\Delta U(x,\ y,\ \mathbf{A}) = \sum_{l=1}^{N}\gamma_l\Psi_l(x,\ y). \tag{23}$$

Очевидно, что $M[\Delta U] = 0$, а для окончательной оценки ошибки, вносимой шумами измерений, необходимо вычислить $M[\Delta U^2]$:

$$M[\Delta U^2] = M\Big[\sum_{\kappa=1}^{N}\gamma_\kappa\Psi_\kappa(x,\ y)\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\Psi_i(x,\ y) = \sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}M[\gamma_\kappa\gamma_i]\,\Psi_\kappa(x,\ y)\,\Psi(x,\ y). \tag{24}$$

Подставив (15) в (24), окончательно получим

$$M[\Delta U^2] = \frac{\sigma^2}{M}\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}d_{\kappa i}^{-1}\,\Psi_\kappa(x,\ y)\,\Psi_i(x,\ y). \tag{25}$$

Усреднив (25) по апертуре S, можно получить выражение для среднеквадратической ошибки коррекции:

$$\sigma^2_{\text{кор}} = \frac{\sigma^2}{M}\sum_{\kappa=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}d_{\kappa i}\,b_{\kappa i}, \tag{26}$$

где $b_{\kappa i}$ — скалярные произведения вида

$$b_{\kappa i} = \iint_S \Psi_\kappa(x,\ y)\,\Psi_i(x,\ y)\,dxdy.$$

Вычисление элементов $d_{\kappa i}$ в выражении (26) производится в соответствии с выражениями (18), (19), (20). Аналогичным образом вычисляются в терминах B-сплайнов элементы $b_{\kappa i}$. Очевидно, что конкретные значения коэффициентов сплайна будут зависеть от вида $\Psi_\kappa(x,\ y)$ пространственных мод фазового корректора.

Анализ выражения (26) показывает, что с ростом числа пространственных мод коррекции ошибка, обусловленная шумами измерений с дисперсией σ^2, будет увеличиваться. Это связано с тем, что в сумме (26) будут добавляться в общем случае неотрицательные слагаемые.

Дисперсия ошибки аппроксимации фазового фронта для колмогоровского спектра турбулентности для корректора в виде адаптивного зеркала с произвольными функциями отклика $\sigma^2_{\text{аппр}}$ может быть легко вычислена по эффективной методике, разработанной в [2, 3]. Поэтому для реальной адаптивной системы число пространственных мод фазового корректора должно выбираться известными методами оптимизации из условия минимума суммарной дисперсии:

$$\min_N \sigma^2_\Sigma = \sigma^2_{\text{аппр}} + \sigma^2_{\text{кор}}. \tag{27}$$

Для вычисления матрицы вторых моментов пространственных мод корректора фазового фронта W с элементами $M[a_i a_j]$ можно воспользоваться выражением

$$M[a_i a_j] = \alpha_{i\kappa}\left(\frac{D}{r}\right)^{5/3}, \tag{28}$$

где

$$\alpha_{i\kappa} = -\frac{55}{D^4\pi^2}\iint\Psi_i(r_1)\,(\Psi_\kappa(r_2))\left(-\frac{|r_1 - r_2|}{D}\right)^{5/3}d^2r_1d^2r_2.$$

Однако на практике это потребует большого объема вычислительных затрат. С учетом того, что в работе [7] получены соответствующие выражения для полиномов Цернике в случае колмогоровского спектра фазовых флуктуаций, результаты этих расчетов могут быть использованы для оценки коэффициентов $W_{i\kappa}$ для произвольного корректора фазового фронта. Запишем отклик корректора в виде

$$U(x,\ y,\ \mathbf{A}) \approx \sum_{i=1}^{N} a_i \sum_{j=1}^{N_z} g_{ij} Z_j(x,\ y), \tag{29}$$

где g_{ij} — коэффициенты разложения i-й пространственной моды корректора фазового фронта по ортогональным полиномам Цернике; N_z — число ортогональных полиномов Цернике; $z_j(x,\ y)$ — полиномы Цернике.

При $N_z \to \infty$ выражение (29) становится тождеством. Поменяв местами операции суммирования, выражение (29) может быть записано в виде

$$U(x,\ y,\ \mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{N_z} Z_j(x,\ y) \sum_{i=1}^{N} a_i g_{ij} = \sum_{j=1}^{N_z} Z_j(x,\ y)\, C_j, \tag{30}$$

где C_j — элементы вектора $\mathbf{C}$, $\mathbf{C} = G\mathbf{A}$; G — матрица перехода размером $N{\times}N_z$ от базиса Цернике в базис пространственных мод корректора фазового фронта. Тогда матрица вторых моментов разложения фазового фронта по пространственным модам корректора фазового фронта запишется в виде

$$W = \mathbf{C}^{\text{т}} A_1 \mathbf{C}, \tag{31}$$

где A_1 — матрица корреляций коэффициентов Цернике с элементами a_{1ij}; т — операция транспонирования. Так, например, для 13-электродного корректора на основе пьезопластины матрица перехода вычислена в [8]. Воспользовавшись этими результатами и результатами работы [7], можно вычислить матрицу вторых моментов разложения фазового фронта. Зная ковариационную матрицу W и корреляционную матрицу шумов измерений $\mathbf{\Gamma}$, можно записать рекуррентный алгоритм оптимального дискретного оценивания вектора $\mathbf{A}^*$ на i-м шаге [10]:

$$\mathbf{A}_i^* = \mathbf{A}_{i-1}^* + K_{i-1}\left(\frac{\sigma^2}{M} I + DK_{i-1}\right)^{-1} \cdot (\mathbf{F} - DA_{i-1}^*), \tag{32}$$

$$K_i = \left[I + \frac{\sigma^2}{M} K_{i+1} D \right]^{-1} K_{i-1}, \tag{33}$$

где K_i — ковариационная матрица оценки $\mathbf{A}$, $K_1 = W$; I — единичная матрица.

Выводы

Разработанный метод выбора числа пространственных мод с учетом шумов датчика гартмановского типа позволяет ограничить число степеней свободы произвольного корректора фазового фронта, исходя из конкретных условий функционирования адаптивной оптической системы. При этом оказывается, что для уменьшения дисперсии ошибки, вызванной шумами измерений, в общем случае необходимо увеличивать число квадрантных фотоприемников датчика гартмановского типа. При использовании метода сплайн-аппроксимации появляется возможность с достаточной степенью точности численно-аналитическим методом вычислить элементы матрицы D нормальной системы управлений в виде линейной комбинации коэффициентов нормализованного B-сплайна. При этом в качестве априорной информации для построения сплайна можно использовать как собственно значения функций отклика в узлах коллокации, так и значения их частных производных [6]. Следует отметить, что при рассмотрении шумов измерений учитывались только тепловые шумы с нулевым математическим ожиданием, что в общем соответствует случаю сильного сигнала. Квантовые шумы и шумы, связанные с накоплением сигнала за конечное время измерения локальных наклонов фазового фронта, должны учитываться отдельно, например, по методике, изложенной в [4]. Следует отметить, что наряду с адаптивными зеркалами на базе пьезопластины этим методом могут быть оптимизированы и адаптивные оптические системы с мембранными зеркалами, управляемые различными видами актюаторов.

1. Безуглов Д.А., Мищенко Е.Н., Мастропас З.П. и др. //Оптика атмосферы. 1989. Т. 2. № 12. С. 1305–1309.
2. Воронцов М.А., Кудряшов А.В., Шмальгаузен В.И. //Известия вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. № 11. С. 1419–1430.
3. Воронцов М.А., Кудряшов А.В., Самаркин В.В. и др. //Оптика атмосферы. 1988. Т. 1. № 6. С. 118–120.
4. Бакут П.А., Белозеров А.Е., Ряхин А.А. //Оптика атмосферы. 1990. Т. 3. № 8. С. 995–1001.
5. Безуглов Д.А., Вернигора А.А. //Оптика атмосферы. 1990. Т. 3. № 2. С. 211–212.
6. Безуглов Д.А. //Автометрия. 1990. № 2. С. 21–25.
7. Wang J.Y., Markey J.K. //J. Opt. Soc. Amer. 1978. V. 68. № 1. P. 78.

8. Воронцов М.А., Корябин А.В., Шмальгаузен В.И. Управляемые оптические системы. М.: Наука, 1988. 272 с.
9. Завьялов Ю.С., Квасов В.И., Мирошниченко В.А. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 350 с.
10. Ярлыков М.С. Статистическая теория радионавигации. М.: Радио и связь, 1985. 334 с.

Ростовское высшее военное командно-инженерное училище
ракетных войск им. М.И. Неделина

Поступила в редакцию
11 апреля 1991 г.

D.A. Bezuglov. **The Spline Approximation Method in the Optimization of the Spatial Mode Number in the Phase Conjugation Adaptive Optical System.**

From the spline approximation method using normalized parabolic B-splines there have been obtained analytical expressions for the mean square aperture error of the phase front regeneration taking into account the measurement noise of the Hartman type phase front sensor. There have been evaluated the correlation matrix of the control signal vector of the adaptive flexible reflector for the turbulence Kolmogorov spectrum. On the basis of the obtained result there have been written the expression for the optimal recurrent evaluation of the control signal vector of the piezoceramie plate-based adaptive flexible reflector.