

**В.А. Тартаковский**

## **О ПРОДОЛЖЕНИИ ИНТЕРФЕРОГРАММ ЗА ПРЕДЕЛЫ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ**

Предлагается метод продолжения отдельных сечений интерферограммы, по которому продолжение строится из фрагментов самих сечений, при этом минимизируются на множестве отсчетов сечения некоторые функционалы гладкости. Приводятся результаты численных экспериментов по обращению интерферограмм.

Применение преобразований Фурье и Гильберта для обращения интерферограмм [1, 2, 3] было естественным шагом, как и для решения многих других задач, когда анализ из координатной области переносился в область частот. При анализе интерферограмм определение расположения экстремальных линий заменялось более полным анализом объектного поля после его фильтрации в тригонометрическом базисе фильтром Гильберта.

При применении алгоритма на основе преобразования Гильберта ( $H$ ) возникают некоторые проблемы, успешное решение которых и создает возможность достичь высокой точности реконструкции объектной фазы, выше чем  $\lambda/100$ .

Одна из этих проблем, рассмотренная в данной статье, – это несоответствие между областью определения функций тригонометрического базиса, оператора  $H$ , которая имеет только одну границу в бесконечности, и конечной, обычно еще и многосвязной областью, в которой задана интерферограмма. Это несоответствие проявляется при обращении интерферограммы в форме краевых выбросов в волновой функции и особенно в ее фазе. Поэтому и возникает задача оптимального продолжения интерферограммы за пределы области определения.

Эта задача может быть решена итерационным методом [4]. Основным алгоритмом, применяемым при этом, – быстрое преобразование Фурье (БПФ). Однако итерации БПФ двумерных массивов данных занимают много времени, и, кроме того, требуется также дополнительный двумерный массив для размещения мнимой части спектра преобразуемой функции. Но более существенным недостатком является отсутствие гарантий сходимости итерационного процесса для дискретных объектов в общем случае, особенно в присутствии шума [5]. Очень важно также правильно выбрать нулевое приближение.

Двумерная матрица отсчетов интерферограммы избыточна по отношению к объектной фазе, так как количество отсчетов выбирается исходя из частоты пространственной несущей – числа интерференционных полос и частотных свойств шума. Поэтому возникает желание анализировать интерферограмму лишь в отдельных сечениях, из которых восстанавливаются сечения фазы. Затем их композиция образует двумерную функцию. Сечения интерферограммы – сканы – должны иметь причинное преобразование Фурье для объектного поля по параметру линии сканирования.

В результате численных экспериментов было установлено [3], что монотонности фазы, или возможности привести ее к таковой за счет четности и периодичности функции косинуса, достаточно для появления причинности объектного поля либо непосредственно, либо после преобразования типа растяжение – сжатие. Это создает широкие возможности для выбора прямолинейных и криволинейных сечений на интерферограмме.

Если выбранная кривая сканирования замкнута и принадлежит области определения интерферограммы, то проблема продолжения не возникает, так как скан является периодической функцией параметра сканирования. Однако обычно сканы прерываются на внешних границах области определения интерферограммы. Кроме того, при многосвязности появятся разрывы скана на внутренних границах. В конечном итоге сечение будет состоять из нескольких конечных фрагментов.

Далее, получим критерий оптимальности продолжения. Пусть  $u(x)$  – ограниченная функция, определенная для всех  $x$ , а скан интерферограммы содержит известные фрагменты этой

функции. Пусть  $\tilde{u}(x)$  совпадает с  $u(x)$  в пределах скана. Введем функцию  $\Omega(x)$ , интегрируемую в квадрате и имеющую низкочастотный спектр, не пересекающийся со спектрами функций  $\tilde{u}(x)$ ,  $u(x)$ . Рассмотрим равенство, вытекающее из свойств преобразования Гильберта:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2(x) \{u(x) - \tilde{u}(x)\}^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2(x) \{H[u(x) - \tilde{u}(x)]\}^2 dx. \quad (1)$$

Устремим функцию  $\Omega(x)$  к единице в пределах скана и к нулю вне его. Левая часть выражения (1) будет при этом стремиться к нулю, а спектр функции  $\Omega(x)$  расширяться. Когда спектр станет широким настолько, что пересечется со спектрами  $\tilde{u}(x)$  и  $u(x)$ , равенство (1) перестанет быть справедливым. Чтобы нарушение равенства проявилось при возможно меньшем значении его левой части, необходимо обеспечить как можно большую узкополосность функций  $u(x)$  и  $\tilde{u}(x)$ . Апостериорно можно лишь уменьшить ширину спектра функции  $\tilde{u}(x)$  за счет более гладкого сшивания отдельных фрагментов скана интерферограммы внутри области определения, более гладкого продолжения их за пределы области и выбора функциональной зависимости, обеспечивающей эту гладкость. Таким образом, для того чтобы Гильберт-трансформанта продолженной функции  $\tilde{u}(x)$  была наиболее близка к истинной, необходимо, чтобы операция продолжения обеспечивала минимальную ширину спектральной полосы функции  $\tilde{u}(x)$  при заданных фрагментах  $u(x)$ . В этом состоит критерий оптимальности.

Рассмотрим структурные ограничения, вносимые численными методами. Наиболее эффективным и технически обеспеченным алгоритмом для Фурье-трансформации последовательности отсчетов является БПФ. На его основе легко реализуются преобразование Гильберта и другие виды линейных фильтров. Но алгоритм БПФ предполагает, что отсчеты заданы на окружности, следовательно, они могут соответствовать только периодической функции. По этой причине скан интерферограммы следует продолжать на всю бесконечную ось также периодически. Кроме того, надо иметь в виду, что алгоритм БПФ перерабатывает массивы вполне определенной длины. Обычно эта величина равна целой степени  $2^m$ , но для редко используемого алгоритма Синглтона (R.C. Singleton, [6]) допустимые длины располагаются достаточно плотно.

Априорная информация о свойствах интерферограммы состоит в том, что разность фаз объектного и опорного полей имеет значительную линейную, квадратичную или близкую к ним составляющую, чем и вызвана полосчатая структура интерферограммы. Линейное продолжение этой составляющей с сохранением непрерывности как ее самой, так и производной, соответствует введенному критерию оптимальности, так как ширина спектра  $s(k)$  сигнала  $u(x)$  относительно некоторой центральной частоты  $k_c$  определяется производной фазы  $\phi(x)$  сигнала. Для сигнала с постоянной амплитудой  $\exp i\phi(x)$  справедливо:

$$\frac{1}{2\pi T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k - k_c)^2 |s(k)|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \phi'^2(x) dx - \left( \frac{1}{T} \int_0^T \phi'(x) dx \right)^2,$$

где  $T$  – период.

Следовательно, необходимо создать условия для появления после продолжения интерферограммы дополнительных интерференционных полос или их частей, ширина которых должна при этом мало отличаться от ширины ближайших заданных интерференционных полос. Известная теорема о сходимости рядов Фурье связывает скорость сходимости ряда с числом  $m$  непрерывных производных преобразуемой функции:

$$s(k) = o(1/k^{m+1}).$$

Из этого выражения становится ясно, что при продолжении нежелательны скачки между известными фрагментами  $u(x)$  и полученными в результате продолжения  $\tilde{u}(x)$ . Но эта ситуация характерна для итерационного метода продолжения, – либо проводится значительное число итераций и при наличии сходимости получается плавное сопряжение фрагментов, либо осуществля-

ется всего несколько итераций и получаем разрыв между функциями  $u(x)$  и  $\tilde{u}(x)$  в точке их сопряжения.

В статье [7] описывается техника дополнения интерференционных полос в отдельных сечениях интерферограммы синусоидой, начальная фаза, частота и амплитуда которой определяются исходя из известных фрагментов. По этому методу необходимо определять положения экстремальных точек на скане. Но в условиях действия шума эта операция некорректна и гладкость продолжения не реализуется.

В данной статье предлагается метод продолжения отдельных сечений интерферограммы, по которому продолжение строится из фрагментов самих сечений, при этом минимизируются на множестве отсчетов сечения некоторые функционалы гладкости.

Рассмотрим один из возможных алгоритмов реализации этого метода, продолжение будем строить путем сдвига фрагментов сечений за пределы области определения. Пусть продолжаемое сечение определено на интервале  $[1, n]$ . Вначале продолжим правый край сечения на некоторое число отсчетов  $r$ , которое обеспечивает минимум функционала

$$L(r) = \sum_{r \in (k, n-k)} \sum_{i=n-k+1}^n |u(i) - u(i-r)| = \min,$$

затем продолжим левый край сечения на  $l$  отсчетов по условию

$$L(l) = \sum_{l \in (k, n-k)} \sum_{i=1}^k |u(i) - u(i+l)| = \min,$$

Поиск минимума может осуществляться простым перебором. Одновременно минимизируются расстояния как между двумя функциями, так и между их разностями  $-\Delta u(i)$ , например при  $k=2$  получим:

$$\min = |u(1) - u(l+1)| + |u(2) - u(l+2)| > |[u(2) - u(1)] - [u(l+2) - u(l+1)]| = |\Delta u(1) - \Delta u(l+1)|.$$

Вновь образовавшиеся края для получения периодической функции сопрягаются между собой аналогично, но функционал гладкости будет зависеть от двух параметров

$$L(p, q) = \sum_{\substack{p \in (0, n-k) \\ q \in (0, l-k)}} \sum_{i=1}^k |u(r+i+p-1) - u(i+q)|.$$

Также перебором находится условный минимум  $L(p, q)$ , такой что длина продолженного сечения  $nc = n + l + p + q$  принадлежит множеству чисел Синглтона, поэтому достаточная плотность этих чисел в интервале  $[n, 3n]$   $\ni nc$  является принципиальной, от нее зависит эффективность метода. Для наиболее употребительного диапазона от  $m=7$  до  $m=8$  эти числа приведены в табл. 1.

Таблица 1

128	130	132	133	135	136	138	140	143	144	147
150	152	153	154	156	160	161	162	165	168	169
170	171	175	176	180	182	184	187	189	190	192
195	196	198	200	204	207	208	209	210	216	220
224	225	228	234	240	242	243	245	250	252	256

На рис. 1 видно экспоненциальное возрастание чисел Синглтона и, следовательно, также уменьшается возможность продолжения на определенный интервал, начиная с некоторой точки. Возможность продолжения можно определить отношением количества чисел Синглтона в заданном интервале к длине этого интервала, рис. 2.

Из приведенного описания метода продолжения можно сделать вывод, что метод соответствует введенному выше критерию оптимальности при фиксации  $k, n$ , в классе функций продолжаемого сечения и в рамках алгоритма Синглтона.

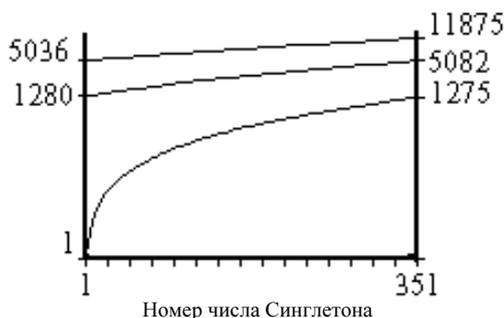


Рис. 1. По оси ординат – логарифмический масштаб. Обозначенные на оси абсцисс номера чисел соответствуют нижней кривой графика. Остальные кривые имеют интервалы определения [352, 702], [703, 1053] соответственно

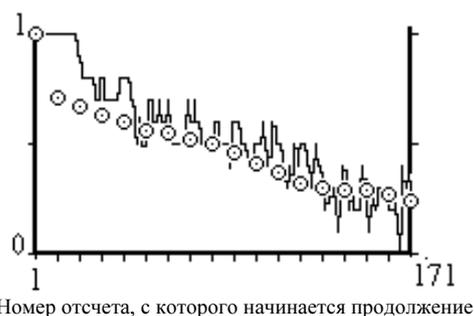


Рис. 2. Возможность продолжения сечения: кружки – на сто, кривая – на десять отсчетов

Была проведена серия численных экспериментов по проверке изложенного метода и алгоритма. Первый эксперимент состоял в том, что рассчитывалась модельная интерферограмма. Она имела 6,3 интерференционных полос, среднеквадратическое отклонение объектной фазы равнялось 0,5. Фаза задавалась отрезком ряда из 21 полинома Цернике, спектр мощности был одномодовый и изменялся от нуля на краях до единицы в точке, соответствующей сферической аберрации. Порядок матрицы отсчетов был равен 77, число уровней квантования – 128. Интерферограмма обращалась по [3] на основе преобразования Гильберта с использованием рассматриваемого алгоритма продолжения и без него, что возможно, так как 77 есть число Синглтона. Подсчитывалось нормированное среднеквадратическое отклонение восстановленной фазы от исходной без учета полосы на границах матрицы, которая имела различную ширину. Было проведено 16 экспериментов. Из табл. 2 видно, что продолжение существенно (на порядок) уменьшает краевые выбросы, которые занимали полосу шириной около 10% от размера интерферограммы на ее границах.

Таблица 2

Относительная ширина граничной полосы, %	Нормированная среднеквадратическая ошибка восстановления фазы	
	При продолжении	Без продолжения
0	0,0065(3)	0,068(5)
1	0,0057(2)	0,026(3)
5	0,0057(2)	0,012(2)
10	0,0054(2)	0,008(2)
15	0,0025(1)	0,004(2)
20	0,0025(1)	0,002(1)

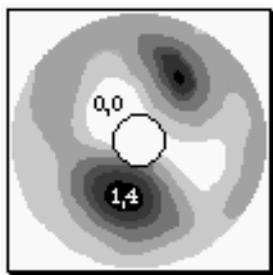
При продолжении увеличивается число интерференционных полос, с этой целью оно может производиться несколько раз для одного и того же исходного сигнала. Это могло бы уменьшить ошибку восстановления в тех случаях, когда дисперсия и полоса частот объектной фазы не соответствуют несущей частоте объектного поля, и оно в Фурье-плоскости охватывает начало координат. Для проверки этого предположения был проведен численный эксперимент. Интерферограмма отличалась от предыдущей только числом интерференционных полос, которое равнялось 5,5. При каждом продолжении добавлялось 1,5–3 интерференционных полосы.

Таблица 3

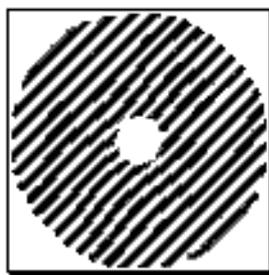
Число продолжений сечения интерферограммы	Нормированная среднеквадратическая ошибка восстановления фазы
0	0,456(4)
1	0,136(2)
2	0,124(2)
3	0,108(1)
4	0,212(3)
5	0,283(3)

Из табл. 3 видно уменьшение и последующее возрастание ошибки восстановления фазы. Уменьшение подтверждает вышеописанное предположение, а возрастание ошибки связано с тем, что продолжение только условно оптимально.

Анализировалась интерферограмма, определенная в круге с круглым центральным отверстием (рис. 3). Интерференционных полос было 18, среднеквадратическое отклонение фазы равнялось 0,5, число отсчетов на диаметре – 101. Нормированное среднеквадратическое отклонение мультипликативного шума – 0,48. Остальные параметры те же, что и в первом эксперименте. Эта интерферограмма двусвязна, ее сечения имеют разную длину и разное число интерференционных полос. Сечения, проходящие через центральное отверстие, состояли из двух фрагментов, которые продолжались независимо. Нормированная среднеквадратическая ошибка восстановленной фазы получилась равной 0,051(2), что соответствует среднеквадратической ошибке  $\lambda/250$  при пиковом значении  $\lambda/20$ . Время обращения одной интерферограммы на IBM PC 386 составило около 150 с.



Исходная фаза (в радианах)



Обращаемая интерферограмма

Таким образом, предложенный метод продолжения сечений интерферограммы за пределы области определения решает поставленную задачу.

1. Тартаковский В.А. // VI Всесоюз. симпозиум по распространению лазерного излучения в атмосфере. Томск, 1981. Ч. 3. С. 32–34.
2. Takeda M., Ina H., Kobayashi S. // J. Opt. Soc. Am. 1982. V. 72. N 1. P. 156–160.
3. Проблемы оптического контроля / Витриченко Э.А., Лукин В.П., Пушной Л.А., Тартаковский В.А. Новосибирск: Наука, 1990. 351 с.
4. Roddier C., Roddier F. // Ap. Opt. 1987. V. 26. N 9. P. 1668–1673.
5. Шафер Р.У., Мерсеро З.М., Ричардс М.А. // ТИИЭР. 1981. Т. 69. N 4. С. 34–54.
6. Singleton R. C. // IEEE transaction on audio and electroacoustics. 1969. V. AU-17. N 2. P. 93–103.
7. Spik A. // Opt. Appl. 1987. V. XVII. N 4. P. 349–354.

Институт оптики атмосферы СО РАН,  
Томск

Поступила в редакцию  
18 сентября 1993 г.

**V. A. Tartakovskii. On the Extension of Interferograms beyond Its Region of Definition.**

In this paper a method for extending individual cross sections of an interferogram is proposed. According to this method the extension is built up of fragments of the cross sections themselves. In doing this the method enables one to minimize some smoothness functionals on the set of a cross section readouts.