

А.С. Батороев

## Дифракционное поле от секторных областей в зоне Френеля

Отдел физических проблем БНЦ СО РАН, г. Улан-Удэ

Поступила в редакцию 26.07.2007 г.

Представлены результаты аналитических решений задачи дифракции Френеля, полученные для общего случая секторного отверстия и, как следствие, для случая угловой области, являющейся частью бесконечной плоскости. Для некоторых практически важных ситуаций приведены результаты вычислений пространственной структуры дифракционного поля, выполненных с использованием найденных решений.

### Введение

Дифракция Френеля, описываемая квадратичным приближением общей формулы Кирхгофа и подтверждаемая многочисленными экспериментами, является одной из классических задач [1]. Как известно, дифракционное поле в зоне Френеля сводится к интегралу по площади отверстия с быстроменяющейся подынтегральной функцией. В зависимости от формы отверстия такие интегралы редко явно вычисляются; с другой стороны, при больших значениях фазового параметра прямые численные методы становятся здесь непригодными. В этих случаях обычно обращаются к их асимптотической оценке. Однако асимптотические методы также имеют свои границы. Поэтому поиск аналитических решений для дифракции Френеля от областей различных конфигураций представляет определенный интерес.

В области оптики такие решения необходимы для получения трехмерного распределения света вблизи фокуса, что имеет особенно важное значение для оценки величины допуска в требуемом положении плоскости систем, формирующих изображение; в микроволновой части радиоволн они также необходимы для анализа пространственной структуры поля от различных дифракционных систем (минимизирующие экраны, сложный рельеф местности: горы, холмы, искусственные застройки и т.д.).

Несмотря на то что дифракционная задача в постановке Френеля имеет немалую историю, ее аналитические решения найдены лишь для отверстий двух конфигураций: прямоугольных и круглых. Оба решения получены Ломмелем в 1885 и 1886 гг. [2, 3]. Отверстия секторной формы не удостоились такого внимания, хотя интерес к ним в микроволновой части радиоволн заметно вырос.

Секторные отверстия интересны также и тем, что в силу аналитической общности решение задачи может послужить основой для построения целого ряда решений при дифракции на других угловых и сегментных областях, где отсутствуют аналитические решения.

### Дифракционное поле от секторного отверстия

Для сферической волны, падающей от точечного источника на плоскость отверстия радиусом  $R$  и угловым раствором  $\varphi$ , целесообразно выбрать полярные координаты  $\rho$ ,  $\varphi$  с центром, совмещенным с центром секторного отверстия (рис. 1).

Задача фактически заключается в нахождении аналитического выражения для множителя дифракционного ослабления  $\Phi = W/W_0$ , где  $W$  — дифракционное поле от отверстия;  $W_0 = \exp[(i2\pi r_0)/\lambda]/r_0$  — поле прямой невозмущенной волны в точке наблюдения за отверстием на расстоянии  $r_0$  от источника;  $\lambda$  — длина волны.

Искомая функция  $\Phi$  в зависимости от того, луч проходит по отверстию или вне, находится как сумма или разность результатов интегрирования по двум смежным составляющим секторам, когда луч проходит по их общему прямому краю (см. рис. 1):

$$\Phi(\rho_0, \varphi_0) = \Phi(\rho_0, \varphi_1) \pm \Phi(\rho_0, \varphi_2), \quad (1)$$

где

$$\Phi(\rho_0, \varphi_j) = -\frac{i}{2} \pi n \exp(i\pi n_0) \int_0^1 \exp(i\pi n u^2) u \times \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^{\varphi_j} \exp(-i2\pi \sqrt{nn_0} u \cos \varphi_j) d\varphi \right] du. \quad (2)$$

Здесь  $\sqrt{n} = R/b_1$ ,  $\sqrt{n_0} = \rho_0/b_1$  — относительные величины радиусов сектора и точки прохождения луча в зонах Френеля, где  $b_1 = \sqrt{[\lambda r_1(r_0 - r_1)]/r_0}$  — радиус первой зоны Френеля в плоскости отверстия;  $r_1$  — расстояние от отверстия до источника;  $u = \rho/R$  — переменная интегрирования относительно величины радиуса сектора.

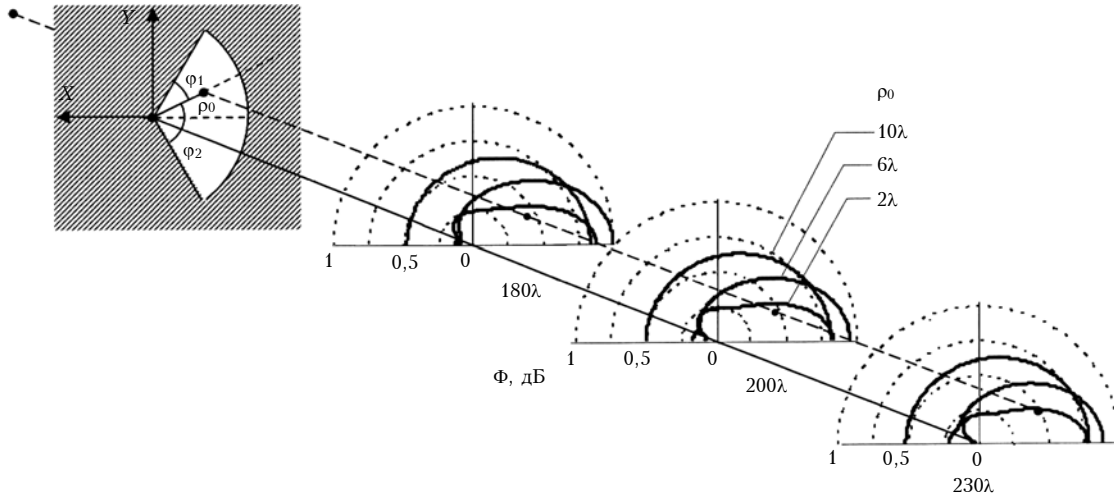


Рис. 1. Геометрия задачи и пространственная структура дифракционного поля (множителя дифракционного ослабления  $\Phi$ ) для секторного отверстия радиусом  $R = 10,95\lambda$  и угловым раствором  $\varphi = 2\pi/3$ . Расстояния от отверстия до источника  $r_1 = 300\lambda$ , до плоскостей наблюдения  $r_2 = 180\lambda$ ;  $200\lambda$  и  $230\lambda$ . Каждая кривая соответствует определенной удаленности от центральной оси:  $\rho_0 = 10\lambda$ ,  $6\lambda$ ,  $2\lambda$

В результате достаточно трудоемких математических процедур с использованием свойств неполных цилиндрических функций [4], подробно не приводимых здесь, для уравнения (2) получено аналитическое выражение

$$\Phi(\rho_0, \varphi) = -\frac{\exp\left[\frac{i\pi(n_0 + n)}{4}\right]}{4} \left[ V_0^-(\varphi, p) - iV_1^-(\varphi, p) \right] - \frac{i}{2} F(v_3) [F(v_2) - F(v_1)] + \frac{\exp(i\pi n_0)}{4} \times \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2\pi n_0)^{2k}}{A_{2k}} C_{2k} - i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2\pi n_0)^{2k+1}}{A_{2k+1}} C_{2k+1} \right]. \quad (3)$$

Здесь по аналогии с задачей Ломмеля на круге [3] введены функции, имеющие внешнее сходство с функциями Ломмеля [6]:

$$V_S^-(\varphi, p) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \sqrt{\frac{n_0}{n}} \right)^{2k+S} E_{2k+S}^-(\varphi, p), \quad (4)$$

где  $E_v^-(\varphi, p)$  – неполные цилиндрические функции в форме Пуассона [4, 5], имеющие интегральное представление

$$E_v^-(\varphi, p) = \frac{2p^v}{A_v} \int_0^{\varphi} \exp(-ip \cos t) \sin^{2v} t dt \quad (5)$$

и представление в виде степенного ряда относительно переменной  $p$

$$E_v^-(\varphi, p) = \frac{p^v}{A_v} \sum_{k=0}^{\infty} C_{k,v}(\varphi) \frac{(-ip)^k}{k!},$$

где

$$C_{k,v}(\varphi) = 2 \int_0^{\varphi} \cos^k t \sin^{2v} t dt.$$

Кроме того, в формуле (3)  $F(v)$  – известный интеграл Френеля [6] с параметрами

$$v_1 = -\sqrt{2n_0} \cos \varphi, \quad v_2 = v_1 + \sqrt{2n}, \quad v_3 = \sqrt{2n_0} \sin \varphi;$$

$$C_v = 2 \int_0^{\varphi} \sin^{2v} t dt; \quad A_v = 2^v \Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

где  $\Gamma(v + 1/2)$  – гамма-функция с натуральными значениями  $v$ ; параметр  $p = 2\pi\sqrt{n_0}\sqrt{n}$ .

Все ряды, входящие в (3), – абсолютно сходящиеся, но удобны для вычислений при  $n_0 \leq n$ , т.е. в плоскости наблюдения в пределах круга близ оси с радиусом дифрагирующего секторного отверстия. Полученное решение справедливо для произвольных значений радиуса и угла раствора сектора.

Одним из частных случаев, подтверждающих достоверность полученного решения, является задача дифракции на отверстии круглой формы. В этом случае при  $\varphi = 2\pi$  неполные цилиндрические функции в форме Пуассона (5) обращаются в функции Бесселя  $J_\nu(p)$  [6], введенные функции  $V_S^-(\varphi, p)$  (4) – в функции Ломмеля  $V_S^-(n, n_0)$  [6], второй слагаемый член в формуле (3) обращается в нуль из-за  $v_3 = 0$ , а третий член – в единицу, так как множитель в квадратных скобках при  $\varphi = 2\pi$  является просто разложением в ряд функции  $\exp(-i\pi n_0)$ . Таким образом, приходим к известному решению Ломмеля [1, 3]:

$$\Phi(\rho_0, 2\pi) = 1 - \exp[i\pi(n_0 + n)] [V_0(n, n_0) - iV_1(n, n_0)],$$

где

$$V_S(n, n_0) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \sqrt{\frac{n_0}{n}} \right)^{2k+S} J_{2k+S}(p)$$

– функция Ломмеля.

## Дифракционное поле от угловой области

Решение (3) благодаря его общности может быть использовано для построения целого ряда решений при дифракции на других угловых и сегментных областях, где отсутствуют аналитические решения. Одной из таких областей является часть бесконечной плоскости, ограниченная определенным угловым раствором. Нетрудно убедиться, что такая область является частным случаем сектора, когда его радиус принимает бесконечно большое значение. Поэтому для нахождения аналитического выражения для множителя дифракционного ослабления  $\Phi$  был использован предельный переход  $n \rightarrow \infty$ . Необходимо отметить, что при выполнении аналитических процедур при  $n \rightarrow \infty$  возникает общий член вида

$$\left[ e^{i\pi n u^2} u^{-\nu} E_{\nu}^{-}(\varphi, \rho u) \right]_0^{\infty}, \quad (6)$$

который при расстановке верхнего предела обращает исходный интеграл (2) в расходящийся. Для преодоления этой аналитической трудности был использован известный прием, которым часто пользуются в задачах распространения радиоволн [7, 8]. Суть приема заключается в том, что волновому числу  $k = 2\pi/\lambda$  приписывают некоторую малую положительную часть (т.е.  $k + i\alpha$ ), что соответствует наличию незначительной проводимости среды. Число  $k + i\alpha$ , неявно входя в фазовую часть первого множителя выражения (6), приводит к появлению убывающей амплитудной части, которая при расстановке верхнего предела в (6) обращается в нуль. После дальнейших аналитических операций для множителя дифракционного ослабления было получено следующее выражение:

$$\Phi = 1 + \frac{i}{2} F(v_3) [F(v_2 = \infty) - F(v_1)] - \frac{1}{4} e^{i(\pi/2)v_0^2} \times \\ \times \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\pi v_0^2)^{2k}}{A_{2k}} C_{2k} - i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\pi v_0^2)^{2k+1}}{A_{2k+1}} C_{2k+1} \right], \quad (7)$$

где  $v_0 = \sqrt{2}(\rho_0/b_1)$ , все остальные величины имеют такие же значения, как и для секторного отверстия. На рис. 2 приведены оси относительных координат  $\alpha_x = x/b_1$  и  $\alpha_y = y/b_1$ , которые далее необходимы для представления результатов расчетов.

Полученное решение отличается от выражения (3) немногим: исчезает первый член — вклады закругленных частей секторной области и некоторых треугольных областей. Формула (7) справедлива во всей плоскости наблюдения и в отличие от формулы (3) удобна для вычислений без ограничений по всей плоскости. Расчет дифракционного поля, как и расчет для секторного экрана, является результатом интегрирования по двум смежным угловым областям (рис. 2).

Выражение (7) получено для угловой области с произвольным значением раствора, поэтому при  $\varphi = \pi$  оно приводит к известному решению для полуплоскости [7, 9]:

$$\Phi = \frac{1}{2} \left[ 1 - \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2}\rho_0} e^{i\frac{\pi}{2}v^2} dv \right].$$

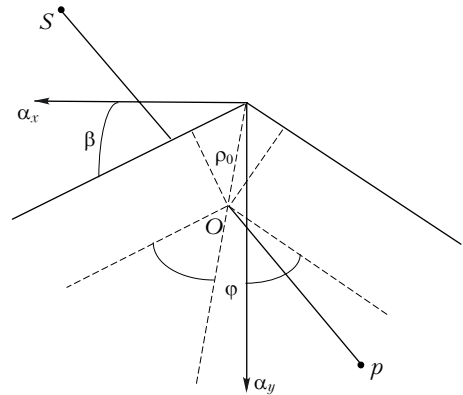


Рис. 2. Геометрия задачи для угловой области

## Результаты расчетов

### 1. Пространственная картина дифракционного поля от секторного отверстия

С помощью найденного решения были получены картины пространственной структуры поля для секторных отверстий с произвольными значениями радиуса и углового раствора. На рис. 1 представлена пространственная структура поля для секторного отверстия, симметрично расположенного относительно оси  $x$  и имеющего указанные параметры:  $R = 10,95\lambda$  и  $\varphi = 2\pi/3$  (угловой раствор). Структура поля представлена в виде распределения  $\Phi$  в трех плоскостях, удаленных от плоскости отверстия на расстояния  $r_2 = 180, 200$  и  $230\lambda$ . Расстояние от точечного источника до плоскости отверстия  $r_1$  равно  $300\lambda$ . В каждой плоскости значения  $\Phi$ , соответствующие определенному значению угловой координаты  $\varphi_0$ , откладываются радиально от центра в единицах, приведенных на рис. 1. Каждая кривая соответствует определенному значению  $\rho_0$  (т.е. удалению от центра). Кривые распределения  $\Phi$  имеют асимметрию относительно оси  $y$ , что и понятно, поскольку само отверстие имеет такую же асимметрию. Все значения параметров и пропорции между ними выбраны для проведения модельных экспериментов при разработке защитных дифракционных экранов в микроволновом диапазоне радиоволн.

### 2. Пространственная картина дифракционного поля от ослабляющего экрана

В практике микроволнового радиодиапазона представляет интерес экран в виде полукруга с радиусом, равным радиусу первой зоны Френеля в плоскости экрана относительно точек излучения и наблюдения, т.е.  $R = b_1$ . Такой экран в точке наблюдения на центральной оси, проходящей через центр полукруга,

дает ослабление поля до нуля. Естественно, представляет интерес распределение поля вблизи этих точек. На рис. 3 для экрана в виде полукруга радиусом  $R = 10,95\lambda$  представлены результаты расчетов дифракционной картины поля вблизи точки его минимального уровня, которые получены с использованием принципа Бабинне [1, 7] и найденного решения (3) для секторного отверстия.

Для экрана радиусом  $R = 10,95\lambda$  расчетная точка наименьшего уровня поля находится на центральной оси на удалении  $r_2 = 200\lambda$  от плоскости экрана, поэтому плоскость, в которой лежит эта точка, является главной. Структура поля представлена в виде пространственной картины распределения  $\Phi$  в главной плоскости на расстоянии  $r_2 = 200\lambda$  и в трех других плоскостях, удаленных от плоскости отверстия на расстояния  $r_2 = 150, 180$  и  $230\lambda$ . В каждой плоскости значения  $\Phi$ , соответствующие определенному значению угловой координаты  $\varphi_0$ , откладываются радиально от центра в единицах, приведенных на рисунке. Так как экран ослабляющего типа и уровни поля достигают очень малых величин, здесь выбраны логарифмические единицы (дБ). Каждая кривая соответствует некоторой удаленности  $\rho_0$  точки наблюдения от центра.

Как видно из дифракционных картин поля, степень ослабления поля уменьшается по мере удаления от центральной точки и по оси, и в самой плоскости наблюдения. В главной плоскости ( $r_2 = 200\lambda$ ) на небольшом удалении от центра  $\rho_0 = \lambda$  ослабление достигает более  $-60$  дБ, в то время как на удалении  $\rho_0 = 3\lambda$  наблюдается ослабление порядка  $-20$  дБ. То же самое можно отметить при сдвиге по оси. Дифракционная картина имеет некоторую асимметрию относительно вертикальной оси, которая усиливается при удалении от главной плоскости ослабления. Причем направление асимметрии зависит от положения точки наблюдения относительно главной плоскости ослабления.

### 3. Модель угловой области для расчета дифракционного поля на закрытых трассах

Одним из важных факторов, определяющих на закрытых трассах локальный уровень поля и его пространственное распределение, является влияние поперечных профилей препятствий на формирование поля. При расчете радиолиний обычно пользуются аппроксимацией наземных препятствий полуплоскостью. Но поперечная форма реальных препятствий часто значительно отличается от прямоугольной, и поэтому расчетные данные, основанные на указанной аппроксимации, не всегда согласуются с экспериментом. В работе [10] приводятся расчетные данные для профилей препятствий в виде угловых областей, которые удовлетворительно согласуются с экспериментом для углов раствора, близких к  $180^\circ$ .

Исходя из того что естественные препятствия (горы, холмы) по профилям более близки к угловым областям, полученное аналитическое выражение (7) позволило рассмотреть в качестве аппроксимирующей модели естественных препятствий угловую область. На рис. 4 представлены результаты расчетов и экспериментальные данные по множителю дифракционного ослабления для модели угловой области. Пространственное распределение поля определяется параметрами  $\alpha_x = x/b_1$  и  $\alpha_y = y/b_1$ , где  $b_1$  — радиус первой зоны Френеля.

Графики, представленные на рис. 4, а, относятся к ситуации, когда левый край препятствия совпадает с горизонтальной осью. Пунктирная линия соответствует распределению поля за полуплоскостью ( $\pi/\pi$ ). Как видно, распределения поля за угловыми препятствиями и за полуплоскостью существенно различаются, что говорит о значительных погрешностях, вносимых в расчеты аппроксимацией полуплоскостью.

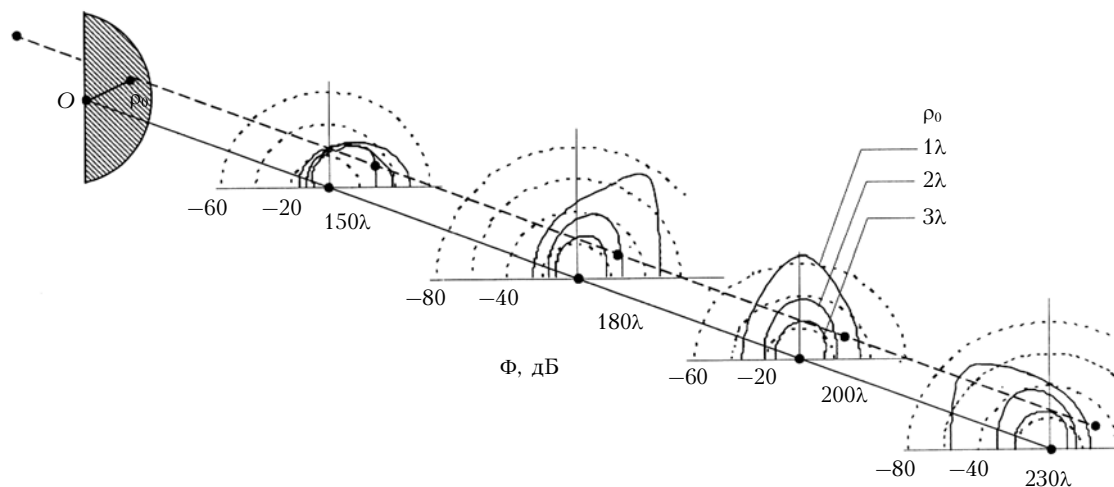


Рис. 3. Пространственные картины поля (множителя дифракционного ослабления  $\Phi$ ) для ослабляющего экрана в виде полукруга радиусом  $R = 10,95\lambda$ . Расстояния от отверстия до источника  $r_1 = 300\lambda$ , до плоскостей наблюдения  $r_2 = 150, 180, 200$  и  $230\lambda$ . Каждая кривая соответствует определенной удаленности от центральной оси:  $\rho_0 = \lambda; 2\lambda; 3\lambda$

## Заклучение

1. Получено аналитическое решение известной задачи дифракции Френеля на секторном отверстии через неполные цилиндрические функции в форме Пуассона, которое справедливо во всех точках наблюдения вблизи оси, проходящей через центр сектора, но удобно для вычислений только в круговой области с радиусом дифрагирующего отверстия. Представлены результаты расчетов пространственной структуры дифракционного поля от секторного отверстия (см. рис. 1) и от защитного экрана в виде полукруга (см. рис. 2).

2. Благодаря большой общности решения дифракционной задачи для сектора получено также аналитическое решение для угловой области, которое справедливо и удобно для вычислений без ограничения во всей плоскости наблюдения. Результаты расчетов показали достаточно сильное влияние профилей препятствий на пространственную структуру поля и необходимость более точного учета этого влияния, для чего могут быть предложены модель угловой области и полученное для нее решение (7) дифракционной задачи.

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики: Пер. с англ. М.: Наука, 1973. 719 с.
2. Lommel E. // Abh. Bayer. Akad. 1885. 15. Abth. 2. S. 233.
3. Lommel E. // Abh. Bayer. Akad. 1886. 15. Abth. 3. S. 531.
4. Агрест М.М., Максимов М.З. Теория неполных цилиндрических функций и их приложения. М.: Атомиздат, 1965. 351 с.
5. Агрест М.М., Бекаури И.Н., Максимов М.З. и др. Таблицы неполных цилиндрических функций. М.: Вычисл. центр АН СССР, 1966. 321 с.
6. Градштейн И.С., Рыжик И.Н. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
7. Фейнберг Е.Л. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. М.: Изд-во АН СССР, 1961. 546 с.
8. Страттон Дж.А. Теория электромагнетизма: Пер. с англ. / Под ред. С.М. Рытова. М.: Гостехиздат, 1948. 539 с.
9. Хенл Х., Мауэ А., Вестфаль К. Теория дифракции: Пер. с нем. / Под ред. Г.Д. Маложинца. М.: Мир, 1964. 428 с.
10. Bachynski M.P., Kingsmill M.C. Effect of obstacle profile on knife-edge diffraction // IRE Trans. on Antennas and Propag. 1962. V. AP-10. N 2. P. 201-205.

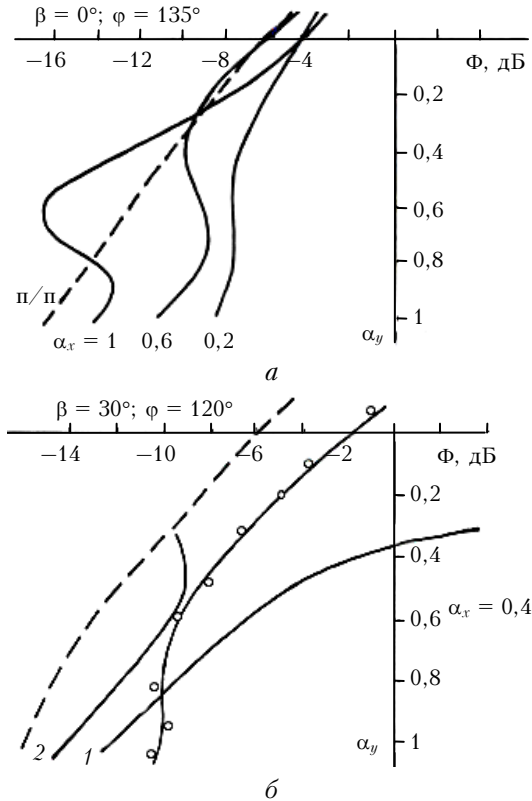


Рис. 4. Пространственное распределение дифракционного поля от угловой области в сравнении с моделью [10] и экспериментальными данными

На рис. 4, б дается сопоставление полученных результатов с экспериментом и с результатами работы [10]. Кривые соответствуют результатам [10] при условиях: 1 — для угловых растворов, близких к  $180^\circ$ ; 2 — для угловых растворов, существенно отличающихся от  $180^\circ$ . Пунктирные кривые относятся к модели в виде полуплоскости, а сплошные — к расчетам по формуле (7). Как показывает сравнение, наблюдается заметная разница в результатах, полученных разными методами. В то же время экспериментальные данные (кружочки) хорошо согласуются с расчетами по формуле (7).

### A.S. Batoroev. Diffraction field for sector areas in a Fresnel zone.

Analytical solutions of the problem of Fresnel diffraction, obtained for the general case of a sector aperture and, as a consequence, for the case of the angular area representing a part of an infinite plane are presented. Evaluations of spatial structure of the diffracted field, carried out with the use the obtained solutions are presented for some practically important situations.