

К.В. Шишаков, В.И. Шмальгаузен

ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ АТМОСФЕРНЫХ АБЕРРАЦИЙ

Рассмотрена проблема выбора оптимальных ортонормированных базисных функций, возникающая при восстановлении атмосферных aberrаций по результатам измерений. Предложена система полиномов, позволяющая провести разложение aberrаций для приемных апертур кольцевой формы. Показано, что используемые полиномы уменьшают ошибку воспроизведения волнового фронта для круглой апертуры приблизительно на 10% по сравнению с полиномами Цернике.

Для повышения эффективности лазерных систем, работающих в условиях атмосферных искажений, применяются методы адаптивной оптики [1]. Измерение искаженного волнового фронта и последующая его коррекция позволяют существенно уменьшить дрожание, мерцание и размытие оптических пучков и изображений [2].

При описании фазовых искажений световых полей на атмосферных трассах обычно используют их разложение на моды в системе базисных функций. Теоретически наиболее точное представление позволяют получить функции Карунена—Лоева, имеющие некоррелированные коэффициенты разложения [3]. Выбор базисных функций для задачи восстановления волнового фронта по результатам измерений обсуждается в [4]. В практических приложениях из-за табличной формы записи и трудоемкости вычисления функции Карунена—Лоева часто заменяют на ортонормированные полиномы [5]. Так, например, для круглых апертур обычно применяются полиномы Цернике. В то же время их использование для приемных апертур другой формы не всегда целесообразно из-за нарушения условий ортонормированности и возрастающей коррелированности коэффициентов разложения. Рассмотрим задачу построения базисных функций в классе полиномов для таких случаев.

Разложим фазовый профиль $\varphi(\mathbf{r})$ приходящего светового поля по системе базисных функций $G_i(\mathbf{r})$ с коэффициентами разложения β_i ($i = \overline{1, n}$). Качество оптической системы в присутствии атмосферных aberrаций описывается фактором Штреля St [2]:

$$St = \left| \int A(\mathbf{r}) e^{i\Delta\varphi(\mathbf{r})} d^2\mathbf{r} \right|^2 / \left| \int A(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} \right|^2, \tag{1}$$

где $A(\mathbf{r})$ — модуль комплексной амплитуды световой волны; $\Delta\varphi(\mathbf{r})$ — пространственная остаточная ошибка аппроксимации $\Delta\varphi = \varphi - \sum_{i=1}^n \beta_i G_i$.

Будем считать, что $|\Delta\varphi| \ll 1$. В этом случае выражение (1) допускает простое приближенное представление

$$St \simeq 1 - \Delta, \quad \Delta = \frac{1}{S} \int A(\mathbf{r}) [\Delta\varphi(\mathbf{r})]^2 d^2\mathbf{r} = \frac{1}{S} (\Delta\varphi, \Delta\varphi), \tag{2}$$

где $S = \int A(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r}$, круглые скобки обозначают скалярное произведение функций с весом $A(\mathbf{r})$. Из полученного выражения следует, что в задачах оптимального восстановления волнового фронта целесообразно силу остаточных aberrаций оценивать по критерию Δ , т. е. по взвешенному скалярному квадрату функций $\Delta\varphi(\mathbf{r})$.

Рассмотрим вопрос о выборе оптимальных ортонормированных базисных функций $G_i(\mathbf{r})$ $\left(\frac{1}{S} (G_i, G_j) = \delta_{ij} \right)$ при восстановлении атмосферных aberrаций по результатам измерений. Представим коэффициенты разложения β_i ($i = \overline{1, n}$) в виде линейной суперпозиции сигналов ξ_j ($j = \overline{1, m}, m \geq n$) датчиков измерительного устройства: $\beta_i = \sum_{j=1}^m B_{ij} \xi_j$, где B_{ij} — постоянные коэффициенты, вычисляемые из условия минимизации усредненной ошибки $\langle \Delta \rangle$:

$$\sum_{j=1}^m B_{ij} \langle \xi_j \xi_k \rangle = \frac{1}{S} \langle \xi_k (\varphi, G_i) \rangle, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, m}. \tag{3}$$

В этом случае ошибка $\langle \Delta \rangle$ определится выражением

$$\langle \Delta \rangle = \frac{1}{S} \langle (\varphi, \varphi) \rangle - \frac{1}{S^2} \sum_{i=1}^n \iint A(\mathbf{r}) A(\boldsymbol{\rho}) L(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) G_i(\mathbf{r}) G_i(\boldsymbol{\rho}) d^2\mathbf{r} d^2\boldsymbol{\rho}, \quad (4)$$

где

$$L(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_{j=1}^m \sum_{\kappa=1}^m c_{j\kappa} \langle \xi_j \varphi(\mathbf{r}) \rangle \langle \xi_\kappa \varphi(\boldsymbol{\rho}) \rangle, \quad (5)$$

$c_{j\kappa}$ — элементы матрицы, обратной к матрице с элементами $\langle \xi_j \xi_\kappa \rangle$.

По аналогии с процедурой получения функций Карунена—Лоева [3] определим функции $G_i(\mathbf{r})$ в виде собственных форм интегрального уравнения:

$$\lambda_i^2 G_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{S} \int A(\boldsymbol{\rho}) L(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) G_i(\boldsymbol{\rho}) d^2\boldsymbol{\rho}, \quad (6)$$

где λ_i^2 — собственные значения.

Можно показать, что при этом будут справедливы следующие выражения:

$$\langle \Delta \rangle = \frac{1}{S} \langle (\varphi, \varphi) \rangle - \sum_{i=1}^n \lambda_i^2; \quad (7)$$

$$\langle \beta_i \beta_j \rangle = \frac{1}{S^2} \sum_{\kappa=1}^m \sum_{l=1}^m c_{\kappa l} \langle \xi_\kappa(\varphi, G_i) \rangle \langle \xi_l(\varphi, G_j) \rangle = \lambda_i^2 \delta_{ij}.$$

Из уравнения (6) нетрудно заметить, что полиномиальную форму записи функции $G_i(\mathbf{r})$ будут иметь при разложении ядра $L(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})$ в ряд пространственных полиномов. Если сигналы измерения ξ_j зависят от фазового профиля линейно, это эквивалентно полиномиальной аппроксимации корреляционной функции $\langle \varphi(\mathbf{r})\varphi(\boldsymbol{\rho}) \rangle$.

Таким образом, задачи оптимальной аппроксимации атмосферных aberrаций и задачи восстановления волнового фронта по результатам измерений приводят, по существу, к одинаковым уравнениям для базисных функций, отличающихся только выбором весовой функции.

Рассмотрим построение базисных функций в задачах полиномиального разложения атмосферных aberrаций на круглых и кольцевых приемных апертурах при равномерном распределении интенсивности светового поля. Дополнительно будем предполагать, что фазовые искажения измеряются идеально по всей области апертуры. В этом случае коэффициенты разложения β_i принимают простой вид $\beta_i = \frac{1}{S} \langle \varphi, G_i \rangle$, а уравнение (6) сводится к следующему [3]:

$$\lambda_i^2 G_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{S} \int_{\Omega} \langle \varphi(\mathbf{r}) \varphi(\boldsymbol{\rho}) \rangle G_i(\boldsymbol{\rho}) d^2\boldsymbol{\rho}, \quad (8)$$

где Ω — область апертуры с внешним диаметром D и внутренним aD ; $A(\mathbf{r}) = 1$, $\mathbf{r} \in \Omega$; $A(\mathbf{r}) = 0$, $\mathbf{r} \notin \Omega$.

В выражении (8) пространственная корреляционная функция $\langle \varphi(\mathbf{r})\varphi(\boldsymbol{\rho}) \rangle$ допускает линейное представление через структурную функцию $D_\varphi(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho})$ [3]:

$$\langle \varphi(\mathbf{r}) \varphi(\boldsymbol{\rho}) \rangle = -\frac{1}{2} \left[D_\varphi(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}) + \frac{1}{S^2} \iint_{\Omega} D_\varphi(\mathbf{r}'-\boldsymbol{\rho}') d^2\mathbf{r}' d^2\boldsymbol{\rho}' - \frac{1}{S} \int_{\Omega} D_\varphi(\mathbf{r}'-\mathbf{r}) d^2\mathbf{r}' - \frac{1}{S} \int_{\Omega} D_\varphi(\boldsymbol{\rho}'-\boldsymbol{\rho}) d^2\boldsymbol{\rho}' \right]. \quad (9)$$

Для колмогоровской модели турбулентности атмосферы $D_\varphi(r') = 6,88(r'/r_0)^{5/3}$, где $r' = |\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|$, r_0 — радиус корреляции Фрида [5].

Получим первые десять полиномов $G_i(\mathbf{r})$. Для этого разложим $D_\varphi(\mathbf{r})$ в следующий ряд [6]:

$$D_\varphi(\mathbf{r}) = \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3} \left[10,788 \left(\frac{r}{D}\right)^2 - 10,795 \left(\frac{r}{D}\right)^4 + 11,620 \left(\frac{r}{D}\right)^6 - 4,768 \left(\frac{r}{D}\right)^8 \right]. \quad (10)$$

В этом случае решениями интегрального уравнения (8) будут являться круговые полиномы [7]:

$$G_1 = 1, \quad G_j = \sum_{k=0}^3 c_{kj} \left(\frac{r}{D}\right)^{q+2k} \begin{cases} \cos q\theta \\ \sin q\theta \end{cases}, \quad j \geq 2, \quad (11)$$

где $q = 0, 1, 2$, c_{kj} — постоянные коэффициенты.

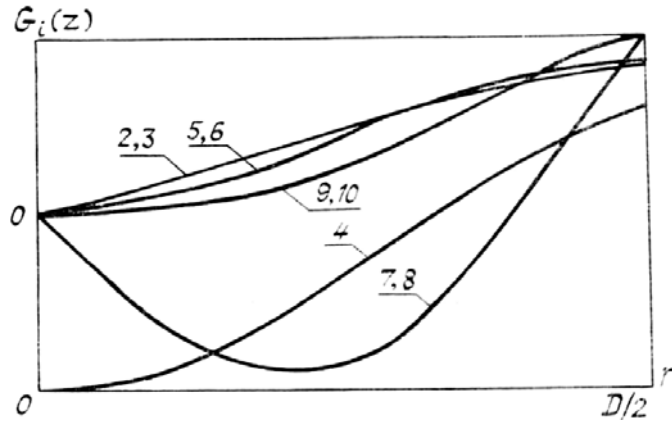
Таблица 1

g	i	a	c_{1i}	c_{2i}	c_{3i}	c_{4i}
1	2,3	0	2,255	-0,543	0,276	-0,082
		0,25	2,188	-0,524	0,267	-0,080
		0,5	2,010	-0,448	0,234	-0,074
		0,75	1,771	-0,307	0,171	-0,068
0	4	0	-2,237	7,105	-5,082	1,513
		0,25	-2,688	8,069	-5,874	1,836
		0,5	-4,453	11,642	-8,949	3,288
		0,75	-7,750	16,274	-13,649	6,971
2	5,6	0	5,024	-4,791	1,605	
		0,25	4,867	-4,642	1,556	
		0,5	4,457	-4,273	1,451	
		0,75	4,018	-3,948	1,451	
1	7,8	0	-7,439	16,105	-6,302	-0,183
		0,25	-7,424	16,044	-6,315	-0,180
		0,5	-9,310	19,692	-8,169	-0,202
		0,75	-25,521	52,554	-24,824	-0,449
3	9,10	0	5,342	-3,203		
		0,25	5,173	-3,101		
		0,5	4,660	-2,801		
		0,75	4,057	-2,511		
0	11	0	1,192	-4,913	-5,197	11,995
		0,25	1,843	-7,132	-2,788	11,017
		0,5	6,136	-20,247	8,646	7,935
		0,75	46,925	-129,729	96,088	-11,136

Для них интегральное уравнение (8) сводится к матричному с размерностью 4, причем все интегралы вычисляются в аналитических функциях. Полученные коэффициенты c_{kj} приведены в табл. 1. Зависимость величин от параметра λ_j^2 рассмотрена в работе [7].

Проведем сравнение полученных полиномов с другими функциями, используемыми для описания атмосферных аберраций на круглых приемных апертурах ($a = 0$).

Радиальные сечения полиномов G_j показаны на рисунке. В [3] приведены истинные функции Карунена—Лоева. Их вид мало отличается от функций G_i ($j \leq 10$). Результаты вычислений показали, что использование первых десяти функций Карунена—Лоева уменьшало ошибку $\langle \Delta \rangle$ на величину, меньшую 1 % по сравнению с аналогичной ошибкой для G_j . По сравнению с полиномами Цернике функции G_j более точно описывают атмосферные аберрации. Отношения коэффициентов корреляции $\langle \beta_i \beta_j \rangle$ для полиномов G_k и полиномов Цернике Z_k ($k \leq 10$), предварительно ортогонализированных для кольцевых апертур [7], приведены в табл. 2. Из таблицы видно, что полиномы $G_k(\mathbf{r})$ ($k \leq 10$) существенно (на порядок) ослабляют коэффициенты корреляции $\langle \beta_2 \beta_8 \rangle$, $\langle \beta_4 \beta_7 \rangle$ и уменьшают усредненную ошибку аппроксимации примерно на 10%.



Радиальные сечения полиномов G_j

Таблица 2

a	$\langle \rho_i \rho_j \rangle_G / \langle \rho_i \rho_j \rangle_z$						$\frac{\langle \Delta \rangle_G}{\langle \Delta \rangle_z}$
	2—2, 3—3	4—4	5—5, 6—6	7—7, 8—8	9—9, 10—10	2—8, 3—7	
0	1,0010	1,037	1,030	1,070	0,994	—0,153	0,90
0,5	1,0007	1,016	1,023	1,059	0,955	—0,086	0,92

Для дальнейшего уменьшения величин $\langle \beta_2 \beta_8 \rangle$, $\langle \beta_3 \beta_7 \rangle$ и повышения точности разложения необходимо в выражении (10) учитывать дополнительные слагаемые [6], что не представляет принципиальных затруднений.

1. Сигналы и помехи в лазерной локации /Под ред. В.Е. Зуева. М.: Радио и связь, 1985, 264 с.
2. Лукин В. П. Атмосферная адаптивная оптика. Новосибирск: Наука, 1986. 156 с.
3. Wang J. Y., Markey J. K. //JOSA. 1978. V. 68. № 1. P. 78.
4. Протасов К. Т. //Оптика атмосферы. 1990. Т. 3. № 1. С. 51—55.
5. Noll J. //JOSA. 1976. V. 66. № 3. P. 207—211.
6. Шишаков К. В., Шмальгаузен В. И. //Оптика атмосферы. 1989. Т. 2. № 2. С. 160—163.
7. Шишаков К. В., Шмальгаузен В. И. //Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия. 1989. Т. 30. № 4. С. 89—91.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
физический факультет

Поступила в редакцию
21 мая 1990 г.

K. V. Shishakov, V. I. Shmal'gauzen. **Series Expansion of the Atmospheric over Polynomials.**

A new method of basic functions construction in the class of polynomials for an arbitrary aperture is described. Polynomials with weakly correlating expansion coefficient are obtained in the paper for ring and circular apertures.