.«Оптика атмосферы и океана», **10**, N 12 (1997)

УДК 536.6

С.М. Чернявский

ВОССТАНОВЛЕНИЕ МОД ВОЛНОВОГО ФРОНТА ПО ФУНКЦИОНАЛАМ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Предлагается итерационный метод восстановления мод волнового фронта по функционалам от функции рассеивания точки на заданном множестве.

Изображающие свойства оптической системы (ОС) характеризуются функцией аберраций $\Phi(\xi, \eta)$ волнового фронта (ВФ) на выходном зрачке Ω. Волновая функция поля [1], создаваемого точечным источником в плоскости регистрации ($z = \mathrm{const}$) ОС с функцией аберраций $\Phi(\xi, \eta)$, описывается с точностью до несущественного множителя функцией

$$g(x, y, z, \Phi) = \iint\limits_{\Omega} \mathrm{e}^{-iz(\xi^2 + \eta^2)/2}\, \mathrm{e}^{-(x\xi + y\eta) + k\Phi(\xi,\eta)}\, d\xi\, d\eta, \qquad (1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число. В точке (x, y, z) интенсивность поля $h(x, y, z, \Phi) = |g(x, y, z, \Phi)|^2$, а измерительное устройство дает зашумленный вариант этой интенсивности $I(x, y, z, \Phi) = h(x, y, z, \Phi) + \varepsilon(x, y)$. Допустим, что реально реализованному ВФ соответствуют функция аберраций $\bar{\Phi}(\xi, \eta)$ и интенсивность $I(x, y, z, \bar{\Phi})$ на множестве ω плоскости регистрации, а произвольно заданной функции $\Phi(\xi, \eta)$ соответствует интенсивность $h(x, y, z, \Phi)$, вычисленная с помощью интеграла (1). Тогда задача восстановления ВФ по физической модели формирования изображения сводится к определению функции Φ из уравнения

$$I(x, y, z, \bar{\Phi}) = h(x, y, z, \Phi) + \varepsilon(x, y),\ (x, y) \in \omega \qquad (2)$$

с известной левой частью, а также с заданными вероятностными характеристиками шума ε.

Уравнение (2) лежит в основе различных косвенных методов определения функции аберраций. Один из путей решения уравнения (2) заключается в представлении функции $\Phi(\xi, \eta)/\lambda$ конечным отрезком ряда по некоторой системе базисных функций:

$$\Phi/\lambda = \sum_{s=1}^{N} \zeta_s\, \Phi_s(\xi, \eta). \qquad (3)$$

Исходная задача сводится к определению вектора коэффициентов (мод) $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_N)$ из уравнения (2), записываемого в виде

$$I(x, y, z, \bar{\zeta}) = h(x, y, z, \zeta) + \varepsilon(x, y),\ (x, y) \in \omega. \qquad (4)$$

Восстановление функции Φ из уравнения (4) впервые предложил Саутвел [2]. Он решал его методом минимизации взвешенной квадратической невязки $S(z, \zeta)$ между функциями I и h. Численное моделирование в [2] давало надежную оценку решения $\bar{\zeta}$ только при очень малых значениях мод и небольшом их числе.

В работе [3] предложена обобщенная невязка $S(\zeta) = \sum_q S(z_q, \zeta)$, учитывающая измерения в нескольких плоскостях. Численное моделирование по обобщенной невязке давало надежную оценку вектора мод в ряде случаев, когда метод в [2] такой оценки не давал. Интерес к решению уравнения (4) связан с тем, что успешное его решение дает простой в реализации метод восстановления ВФ.

В данной статье рассматривается решение уравнения (4) итерационным модифицированным методом Ньютона [4], исходя из равенств

$$\zeta_0 = 0,\ I(x, y, z, \bar{\zeta}) - h(x, y, z, \zeta_k) = \frac{\partial h(x, y, z, 0)}{\partial \zeta}(\zeta_{k+1} - \zeta_k) + \varepsilon(x, y), \quad k = 0, 1, 2, \dots . \tag{5}$$

Начальное приближение $\zeta_0 = 0$ выбрано не случайно. Во-первых, по условию задачи часто моды не могут быть большими. Во-вторых, при $\zeta = 0$ упрощается анализ вектора-строки частных производных $dh/d\zeta$. В-третьих, если ОС адаптивная, то осуществление коррекции ВФ ведет к тому, что $\bar{\zeta} \to 0$. В адаптивных системах коррекцию можно осуществлять на каждой итерации по оценке мод по первому приближению. Такой подход рассмотрен в [5] и назван аппаратным итерационным методом.

На каждой итерации осуществляется решение линейного равенства (5) относительно разности $\zeta_{k+1} - \zeta_k$, которое из-за наличия шума и ошибки линеаризации сводится к *компромиссному проектированию* левой части уравнения (5) на линейное подпространство L_N, определяемое частными производными $dh/d\zeta_s$ на множестве ω. Поэтому важно, чтобы эти частные производные были линейно независимыми. Свойство линейной независимости производных можно обеспечить изменением параметров схемы измерения и ОС. К ним можно отнести координату z плоскости измерения, область измерения интенсивности ω и т.д.

Задача проектирования левой части уравнения (5) на L_N может быть сведена к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$I_j(z, \bar{\zeta}) - F_j(h(z, \zeta_k)) = \sum_{s=1}^{N} F_j(\partial h(z, 0)/\partial \zeta_s)(\zeta_{k+1} - \zeta_k) + \varepsilon_j, \quad j = 1, \dots, N, \tag{6}$$

в которой F_j – непрерывные линейные функционалы, действующие на функцию $h(z, \zeta) = h(x, y, z, \zeta)$ как функцию переменных x, y при заданных z и ζ, $I_j(z, \zeta)$ – зашумленный вариант значений функционалов $F_j(h(z, \zeta))$ случайными составляющими ε_j. Функционалы F_j назовем функционалами изображения.

Проблема состоит в том, чтобы выбором функционалов F_j обеспечить матрице $A(z, 0) = (F_j(dh(z, 0)/d\zeta_s))$ хорошую обусловленность, а итерационному методу – хорошую сходимость.

Первый метод выбора функционалов изображения очевиден. В качестве таковых надо взять биортогональную систему функционалов $\{F_j\}$, соответствующую системе функций $\{dh(x, y, z, 0)/d\zeta_s\}$. Тогда $A(z, 0) = E$ – единичная матрица. В этом случае левая часть в (6) сразу определяет разность $\Delta\zeta = \zeta_{k+1} - \zeta_k$ с точностью ε_j.

Биортогональная система функционалов находится из линейных равенств

$$F_j(\partial h(z, 0)/\partial \zeta_s) = \delta_{sj}, \quad s = \overline{1, N}, \tag{7}$$

где δ_{js} – символ Кронекера. При фиксированном j задача определения F_j из (7) называется конечномерной проблемой моментов, которая хорошо изучена. Если производные $dh/d\zeta_s$ рассматривать как элементы гильбертова пространства, то линейный функционал задается скалярным произведением $F(dh/d\zeta_s) = (F, dh/d\zeta_s)$, где F – элемент того же пространства. Функционал с минимальной нормой, решающей проблему (7), имеет вид

$$F_j = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial h}{\partial \zeta_k}\gamma_{kj} = \frac{\partial h}{\partial \zeta}\gamma_j .$$

Подстановка этого выражения в (7) приводит к системе, определяющей коэффициенты γ_{kj}:

$$\sum_{k=1}^{N} (\partial h/\partial \zeta_s, \partial h/\partial \zeta_k)\gamma_{kj} = \delta_j$$

или в матричной форме $\Gamma\gamma_j = e_j$, где e_j – j-й столбец единичной матрицы. Отсюда видно, что вектор коэффициентов γ_j есть j-й столбец обратной матрицы Γ^{-1}. Решение $\Delta\zeta$, даваемое с помощью биортогональных функционалов

$$\Delta\zeta_s = F_s(\Delta h),\ \Delta h = h(x, y, z, \bar{\zeta}) - h(x, y, z, \zeta_n), \tag{8}$$

соответствует определению ζ по методу наименьших квадратов

$$\min_{\zeta} \left\| \Delta h - \frac{\partial h}{\partial \zeta}\zeta \right\|^2 .$$

Необходимое условие экстремума приводит к матричному уравнению

$$\Gamma_\zeta = (\Delta h, \partial h/\partial\zeta)^T,$$

из которого $\zeta_j = (\Delta h, \partial h/\partial\zeta)\,\gamma_j = F_j(\Delta h)$.

При тихоновской регуляризации задачи проектирования Δh на L_N вектор ζ является решением задачи

$$\min_{\zeta} \left\| \Delta h - \frac{\partial h}{\partial \zeta}\zeta \right\|^2 + \alpha\|\zeta\|^2,$$

где α – параметр регуляризации, который в нашем случае надо задать так, чтобы имела место сходимость итерационного метода (6) при наличии шумов. Решение этой задачи единственное и определяется тем же неравенством (8), в котором функционал $F_j = (\partial h/\partial\zeta)\,\gamma_j$, где γ_j – j-й столбец матрицы $(\Gamma + \alpha E)^{-1}$.

Функционалы F_j с тихоновской регуляризацией можно получить из решения конечномерной проблемы моментов

$$F_j(\partial h/\partial\zeta) + \alpha\varepsilon^T e_s = \delta_{sj},\quad s = \overline{1, N}\,, \tag{9}$$

где ε – вектор, характеризующий невязку линейных равенств (7).

Левую часть в (9) можно рассматривать как линейный функционал, определяемый парой (F_j, ε) на прямом произведении $L_2(\omega)\times R^N$, который на элементах $(dh/d\zeta_s, e_s)$ принимает значения δ_{sj}. Функционал (F_j, ε) с минимальной нормой $(\|F_j\|^2 + \alpha\|\zeta\|^2)^{1/2}$, решающий конечномерную проблему моментов (9), подставленный в (8), дает вектор, в точности совпадающий с вектором, полученным при тихоновской регуляризации.

Если свойства линейной независимости производных $dh/d\zeta_s$ на ω слабо выражены подобно двум неколлинеарным векторам на плоскости с малым углом между ними, то биортогональные функционалы могут дать по формуле (8) неприемлемо большие значения разности $\Delta\zeta$. В этом случае функционалы изображения можно искать из более общей конечномерной проблемы моментов (9), где $F_j \in U$, $\varepsilon \in V$. Множества U и V определяют свойства и ограничения на F_j и ε и, следовательно, тип регуляризации.

В заключение раздела заметим, что метод восстановления мод, успешно примененный в работе [5], можно интерпретировать как метод восстановления мод по функционалам изображения, в качестве которых были использованы синусное и косинусное преобразования Фурье на дискретных частотах.

Выбор функционалов изображения зависит от базисных функций. Ниже рассматриваются два часто используемых в оптике базиса: полиномы Цернике на круге и кусочно-линейные функции на сегментированном зрачке.

Моды Цернике. Пусть на круглой апертуре $\Omega = \{(\xi,\eta):\xi^2 + \eta^2 \le 1\}$ базисными функциями являются круговые полиномы Цернике

$$\Phi_n^m(\rho, \theta) = \binom{\cos m\theta}{\sin m\theta} R_n^m(\rho),\quad m \le M,\quad n = m + 2l \le N,$$

где (ρ, θ) – полярные координаты на Ω; M и N – числа, ограничивающие число мод. Моды базисных функций обозначим через $\zeta_n^m = \begin{pmatrix} c_n^m \\ s_n^m \end{pmatrix}$.

Покажем, что выбором z можно обеспечить линейную независимость производных $\partial h/\partial\zeta_n^m$ на круге $\omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le V\}$, где величина радиуса V, вообще говоря, зависит от числа мод. Пусть (ν, ψ) – полярные координаты точки (x, y). Учитывая вид функции $g(x, y, z, 0)$ и интегральное представление бесселевых функций 1-го рода [1, 6], найдем:

$$g(\nu, \psi, z, 0) = 2\pi\, g_0^0(\nu, z);$$

$$\partial g(\nu, \psi, z, 0)/\partial\zeta_n^m = 4\pi^2 (i)^{m+1} \binom{\cos m\psi}{\sin m\psi}\, g_n^m(\nu, z),$$

где

$$g_n^m(\nu, z) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-iz\rho^2/2}\, R_n^m(\nu)\, J_m(\nu\rho)\, \rho\, d\rho;$$

$$\partial h/\partial\zeta_n^m = 16\pi^3 \binom{\cos m\psi}{\sin m\psi}\, r_n^m(\nu, z),$$

где обозначили $r_n^m(\nu, z) = \mathrm{Re}\,[i^{m+1}\, g_0^0(\nu, z)\, g_n^m(\nu, z)]$.

Производные $\partial h/\partial\zeta_n^m$ будут линейно независимыми на ω, если таковыми будут функции $r_n^m(\nu, z)$ на $[0, V]$. Покажем, что выбором z можно обеспечить линейную независимость функций $r_n^m(\nu, z)$. Допустим, что координата z достаточно мала и можно осуществить линеаризацию по z функций $r_n^m(\nu, z)$ в точке $z = 0$:

$$r_n^m(\nu, z) = r_n^m(\nu, 0) + \frac{\partial r_n^m(\nu, 0)}{\partial z}\, z.$$

Используя свойства радиальных полиномов, можно найти явный вид

$$g_n^m(\nu, 0) = (-1)^{(n-m)/2}\, J_{n+1}(\nu)/\nu;$$

$$\frac{\partial g_n^m(\nu, 0)}{\partial z} = -\frac{i}{2A_1^m}(-1)^{(n-m)/2}\, [J_{n+3}(\nu) - B_1^m\, J_{n+1}(z) + D_1^m\, J_{n-1}(\nu)]/\nu;$$

при $n > m$ и

$$\frac{\partial g_n^m(\nu, 0)}{\partial z} = -i\left[\frac{J_{m+1}(\nu)}{2\nu} - \frac{J_{m+2}(\nu)}{\nu^2}\right],$$

где A_1^m, B_1^m, D_1^m – коэффициенты рекуррентной формулы для радиальных полиномов [6].

Функции $g_n^m(\nu, 0)$ являются действительными, а производные $\partial g_n^m(\nu, 0)/\partial z$ – мнимыми, поэтому при малых z и нечетных m

$$r_n^m(\nu, z) = (-1)^{(m+1)/2}\, g_0^0(\nu, 0)\, g_n^m(\nu, 0) = (-1)^{(n+1)/2}\, J_1(\nu)\, J_{n+1}(\nu)/\nu^2,$$

а при четных m

$$r_n^m(\nu, z) = (-1)^{m/2}\, zi\left(\frac{\partial g_0^0(\nu, 0)}{\partial z}\, g_n^m(\nu, 0) + g_0^0(\nu, 0)\, \frac{\partial g_n^m(\nu, 0)}{\partial z}\right).$$

Последние выражения показывают, что функции $r_n^m(\nu, z)$ при различных n содержат бесселевы функции различных порядков, поэтому эти функции линейно независимы на любом отрезке $[0, V]$. Примечательно, что структура частных производных $\partial h/\partial\zeta_n^m$ повторяет структуру базисных функций. При этом тригонометрические компоненты угла θ преобразуются в те же компоненты угла ψ, а радиальные функции Цернике преобразуются в функции, пропорциональные $r_n^m(\nu, z)$. Учитывая это обстоятельство и свойство ортогональности тригонометрических компонент функции, определяющие функционалы нужно искать в виде

$$F_n^m(\nu, \psi) = \binom{\cos m\psi}{\sin m\psi} f_n^m(\nu), \quad n = m + 2l \le N.$$

Функции $f_n^m(\nu)$ будут определяться в соответствии с (9) из решения конечномерной проблемы моментов:

$$16\pi^2 f_{m+2p}^m\, (r_{m+2l}^m) + \alpha\varepsilon^T\, \mathbf{e}_l = \delta_{lp},\ l = \overline{1, L}\ ,$$

где $\mathbf{e}_l$ – 1-й столбец матрицы порядка L – целая часть числа $N - m$ и ε – вектор невязки длины L.

Моды сегментного зеркала. Пусть область выходного зрачка образована n гексагональными сегментами Ω_s с центрами в точках (ξ_s, η_s), $s = \overline{1, n}$. На сегменте аберрации ВФ будем описывать линейной функцией $\alpha_s + \beta_s (\xi - \xi_s) + \gamma_s (\eta - \eta_s)$. Здесь α_s характеризует расфазировку сегмента, а углы β_s, γ_s – разъюстировку. Обозначим через $\delta(\xi, \eta)$ характеристическую функцию сегмента с центром в начале координат. Тогда базисными функциями являются ортогональные на Ω функции. Моды базисных функций $\Phi_s(\xi, \eta)$ обозначим $\boldsymbol{\zeta}_s = (\alpha_s, \beta_s, \gamma_s)^T$. Мы предполагаем, что зрачок Ω не содержит центральный сегмент. Сегменты образуют пояса. Первый пояс состоит из 6 сегментов, второй – из 12, 3-й из 18 и так далее. В каждом поясе сегменты можно объединить в группы из 6 сегментов, которые при повороте на угол, кратный π/3 относительно начала координат, переходят друг в друга. Обозначим через $p(s)$ номер сегмента, в который переходит сегмент s при повороте области зрачка на угол ω.

Пусть $F_j = (F_0, F_1, F_2)$ – вектор функционалов, который выделяет вектор мод ζ_j:

$$\int_\omega \mathbf{F}_j(x, y) \frac{\partial h(x, y, z, 0)}{\partial \boldsymbol{\zeta}_s} \boldsymbol{\zeta}_s \, dx \, dy = \boldsymbol{\zeta}_s \delta_{sj}, \quad s = \overline{1, n} .$$

Для сегмента $p(j)$ той же группы, что и сегмент j, рассмотрим функционал

$$\int_\omega \mathbf{F}_j(x \cos\varphi + y \sin\varphi, - x \sin\varphi + y \cos\varphi) \frac{\partial h(x, y, z, 0)}{\partial \boldsymbol{\zeta}_p} \boldsymbol{\zeta}_p \, dx \, dy, \tag{10}$$

где φ – угловое расстояние между центрами сегментов k и p. Повернем системы координат $o\,x\,y$ и $o\,\xi\,\eta$ на угол φ. Координаты точек в новых координатах отметим нижним индексом l. Из симметрии расположения сегментов имеем

$$g(x, y, z, 0) = g(x_l, y_l, z, 0);$$

$$\frac{\partial g(x, y, z, 0)}{\partial \boldsymbol{\zeta}_p} \boldsymbol{\zeta}_p = \frac{\partial g(x_l, y_l, z, 0)}{\partial \boldsymbol{\zeta}_j} \boldsymbol{\zeta}_{pl} ,$$

где $\boldsymbol{\zeta}_{s1} = (1, \beta_{s1}, \gamma_{s1})^T$ – вектор мод сегмента s относительно повернутой системы координат, т.е.

$$\begin{pmatrix} \beta_s \\ \gamma_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{s1} \\ \gamma_{s1} \end{pmatrix} .$$

Интеграл (10) в новых координатах равен

$$\int_{\omega_1 = \omega} \mathbf{F}_j(x_1, y_1) \frac{\partial h(x_1, y_1, z, 0)}{\partial \boldsymbol{\zeta}_s} \boldsymbol{\zeta}_{p(s)1} \, dx_1 \, dy_1 = \boldsymbol{\zeta}_{p(s)1} \delta_{sj}.$$

Итак, доказано, что для сегментов каждой группы распределение значений функций $\mathbf{F}(x, y)$, определяющих функционалы изображения, совпадает с точностью до угла поворота.

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970. 527 с.
2. Адаптивная оптика / Под ред. Д. Фрида. М.: Мир, 1980. 456 с.
3. Дегтярев Г.Л., Чернявский С.М. Адаптивная оптика (обзор) // Адаптивная оптика. Казань: Каз. авиац. институт, 1986. С. 1–7.
4. Канторович Л.И., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 740 с.
5. Дегтярев Г.Л., Маханько А.В., Чернявский А.С. // Оптика атмосферы и океана. 1996. Т. 9. N 3. С. 402–405.
6. Кузнецов Д.С. Специальные функции. М.: Высшая школа, 1965. 272 с.

Казанский государственный технический университет
им. А.Н. Туполева

Поступила в редакцию
1 августа 1997 г.

S.M. Chernyavskii. **Reconstruction of Wave Front Set Modes from Image Functionals.**

An iteration method is proposed for reconstruction of wave front set modes from functionals over function of a point scattering on a given set.