

Спектральные вклады участков степенной структурной функции случайных процессов со стационарными приращениями.

Часть 1. Показатель степени меньше единицы

В.А. Федоров*

*Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634055, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1*

Поступила в редакцию 28.06.2018 г.

Рассматривается частотное поведение спектральных вкладов начальных, средних и «конечных» участков степенной структурной функции (при показателе степени меньше единицы) в спектральную плотность (СП) случайного процесса со стационарными приращениями. Показано, что оно значительно сложнее строго положительной монотонной степенной частотной зависимости исходной СП. Ей соответствует только поведение спектрального вклада начального участка данной структурной функции. Представлены и проанализированы аналитические аппроксимационные зависимости частотного поведения всех указанных спектральных вкладов. Они рекомендуются для широкого практического использования.

Ключевые слова: случайный процесс со стационарными приращениями, степенная структурная функция, спектральная плотность, спектральные вклады; random process with stationary increments, power-law structure function, spectral density, spectral contribution.

Введение

Для описания статистических характеристик различных случайных процессов и полей широко используется аппарат структурных функций (СФ) [1–8]. Его применение полезно, если исследуемый объект относится к случайным процессам со стационарными (первыми) приращениями (СПСП). В пространственной области это соответствует локально-однородному и изотропному скалярному полю. Не менее эффективно аппарат СФ применяется и для частного случая – стационарных случайных процессов (однородных и изотропных случайных полей). Дальнейшее изложение проведем в терминах временных процессов и для СПСП.

К часто используемым моделям процессов относится степенная СФ $D_\mu(\tau) = C^2|\tau|^\mu$, где τ – сдвиг во времени ($-\infty \leq \tau \leq \infty$); C^2 – структурная характеристика соответствующей размерности [1, 3, 4, 8, 9]. Данная функция может быть СФ СПСП с соответствующей положительной спектральной плотностью (СП) $W(\omega)$ лишь при $0 < \mu < 2$ ($\mu \neq 1$) и в ее области определения на всем бесконечном интервале $-\infty \leq \tau \leq \infty$. Для $0 < \mu < 1$ СП вычисляется с помощью соотношения [1–3]:

$$W(\omega) = \frac{C^2\mu}{2\pi\omega} \int_0^\infty \tau^{\mu-1} \sin(\omega\tau) d\tau. \quad (1)$$

При $1 < \mu < 2$ справедливо выражение

$$W(\omega) = \frac{C^2\mu(\mu-1)}{2\pi\omega^2} \int_0^\infty \tau^{\mu-2} \cos(\omega\tau) d\tau.$$

В обоих случаях выражения для СП получаются одинаковыми и имеют вид

$$W(\omega) = \frac{C^2\mu\Gamma(\mu)}{2\pi\omega^{(\mu+1)}} \sin \frac{\pi\mu}{2}, \quad (2)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция. Следовательно, вблизи нулевых частот данная СП СПСП может быть бесконечно большой, но с увеличением ω уменьшается обратно пропорционально ее $(\mu + 1)$ степени, т.е. с точностью до константы

$$W(\omega) \sim \omega^{-(\mu+1)}. \quad (3)$$

Формулы (1)–(3) являются общеизвестными и служат здесь только для сравнения с приведенными далее результатами.

В ряде приложений, в том числе и в теории атмосферной турбулентности, классическое значение показателя степени μ равно $2/3$. Это предполагает выполнение $W(\omega) \sim \omega^{-5/3}$. Однако в реальности, наряду с экспериментальным материалом, подтверждающим выполнение закона «2/3» (или «5/3» в спектральной области), наблюдается и достаточно существенное число данных, размывающих значение указанного параметра до интервала

* Валерий Александрович Фёдоров (fva21@iaon.ru).

$0 < \mu < 2$ [1, 3, 4, 8–12]. Отмечается и частое использование составных моделей СФ. Так, на отдельных интервалах τ (или длины r) применяются аппроксимации функциями типа $D_\mu(\tau)$ с разными значениями показателя степени, включая $\mu = 2$ [1, 3, 4]. При спектральных измерениях полученные данные соотносят с теоретическими кривыми (3) и подбирают наиболее близкие к ним значения μ [8, 10, 12]. В работе [9] подчеркивается, что соотношение (3) справедливо только для бесконечного интервала τ . Следовательно, при ограничении интервала наблюдения мы можем говорить только о спектральных вкладах некоторого фрагмента СФ $D_\mu(\tau)$ в СП $W(\omega)$. Так, проведенная нами обработка многочисленных экспериментальных данных (см., например, [11]) показала, что аппроксимацию СФ в аналитическом виде типа $D_\mu(\tau) = C^2|\tau|^\mu$ можно осуществить только в некотором диапазоне $\tau_1 \leq |\tau| \leq \tau_2$. Поэтому важность изучения спектральных вкладов этого диапазона СФ в общий спектр $W(\omega)$ несомненна. И величина, и структура этих вкладов могут существенно отличаться от описываемых соотношениями (2) и (3), что может быть источником ошибок при интерпретации полученных результатов в спектральной области.

Целью данной работы является исследование спектральных вкладов различных участков степенной СФ СПСП $D_\mu(\tau)$ в СП $W(\omega)$. Так как определения $W(\omega)$ различны для диапазонов $0 < \mu < 1$ и $1 < \mu < 2$, то целесообразно рассмотреть эти варианты раздельно. В первой части статьи анализируется первый случай, во второй части – второй. В конечном итоге необходимо получить одновременно достаточно простые и точные аналитические зависимости поведения спектральных вкладов во всем частотном интервале ω . Также целесообразно получить соотношения, связывающие исходную СП $W(\omega)$ с ее спектральными вкладами.

Оценка спектральных вкладов $W_{0,1}(\omega)$ начального участка СФ $D_\mu(\tau)$ в СП $W(\omega)$.

Область задания $|\tau| \leq \tau_1 < \infty$

Оценим вклад $W_{0,1}(\omega)$ указанного участка СФ $D_\mu(\tau)$ (на положительной оси это соответствует интервалу $0 \leq \tau \leq \tau_1 < \infty$) в СП $W(\omega)$. Для рассматриваемого случая $0 < \mu < 1$ из соотношения (1) непосредственно следует

$$W_{0,1}(\omega) = \frac{C^2 \mu}{2\pi\omega} \int_0^{\tau_1} \tau^{\mu-1} \sin(\omega\tau) d\tau. \quad (4)$$

В принципе, выражение (4) можно представить в виде соответствующих рядов. Однако здесь этот случай приводить не будем. Ограничимся высокоточным численным интегрированием быстро осциллирующих функций, основанном на совместном

использовании глобальных адаптивных схем Гаусса–Кронрода и экстраполяционной процедуры, известной как ϵ -алгорит, позволяющий контролировать и уменьшать абсолютную ошибку вычислений [13].

Для иллюстрации на рис. 1, следуя формуле (2), в терминах циклических частот представлены нормированные на C^2 значения СП (обозначены $W(f)$), соответствующие СФ $D_\mu(\tau)$ при $\mu = 0,01$ и $0,99$. Их частотный ход соответствует соотношению (3). Также по формуле (4) рассчитаны спектральные вклады в данные СП $W(f)$ двух начальных участков СФ $D_\mu(\tau)$ – длительностью $\tau_1 = 10$ с (обозначены $W_{0,1}(f)$) и $\tau_2 = 100$ с (обозначены $W_{0,2}(f)$).

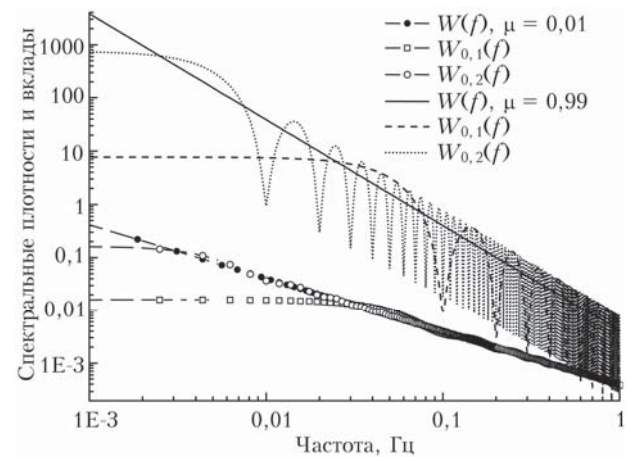


Рис. 1. Нормированные значения СП СПСП $W(f)$ для степенной СФ и спектральные вклады ее начальных участков длительностью $\tau_1 = 10$ с ($W_{0,1}(f)$) и $\tau_2 = 100$ с ($W_{0,2}(f)$) при $\mu = 0,01$ и $0,99$

В этом случае значения $W_{0,1}(f)$ и $W_{0,2}(f)$ всегда положительны. Заметим, что это верно для всех μ в рассматриваемом диапазоне $0 < \mu < 1$. Причем на низких частотах поведение спектральных вкладов существенным образом отличается от хода исходных СП (2) и (3). Так, при $\omega\tau_1 \ll 1$ из соотношения (4) с учетом трех членов разложения Маклорена функции $\sin(\omega\tau)$ получаем

$$W_{0,1}(\omega) \approx \frac{C^2 \mu \tau_1^{\mu+1}}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\mu+1} - \frac{(\omega\tau_1)^2}{6(\mu+3)} + \frac{(\omega\tau_1)^4}{120(\mu+5)} \right\}. \quad (5)$$

Отсюда следует, что, в отличие от безграничного увеличения $W(f)$ при стремлении частоты f к нулю, величины $W_{0,1}(f)$ и $W_{0,2}(f)$ стремятся к конечным значениям (в общем случае к $W_{0,i}(f=0) = C^2 \mu \tau_i^{\mu+1} / [2\pi(\mu+1)]$, где τ_i – длина рассматриваемого начального участка СФ). С ростом f , примерно после превышения $f_i \approx (1-3)/4\tau_i$ Гц (или $\omega_i \approx (1-3)\pi/2\tau_i$ рад/с), частотные зависимости $W_{0,1}(f)$ и $W_{0,2}(f)$ в среднем начинают соответствовать изменению (спаду) $W(f)$ в виде (3). При этом наблюдается мультипликативное взвешивание исходной спектральной зависимости (2) строго положи-

тельными квазипериодическими функциями $K_{0,1}(f)$ и $K_{0,2}(f)$ с «периодами» $F_i \approx 1/\tau_i$ Гц. Без детального анализа и специальных иллюстраций отметим, что амплитуда осцилляций данных спектральных вкладов увеличивается с ростом μ , достигая своего максимума вблизи $\mu \approx 1$. Так, для $\mu = 0,99$ значения $K_{0,1}(f)$ на существенном отрезке частотного интервала заключены в диапазоне 0,05–1,9, что приводит к сильной модуляции $W_{0,1}(f)$. Это хорошо видно на рис. 1. Заметим, что при экспериментальных исследованиях для хорошего видения хода упомянутых осцилляций необходимо обеспечить на их предполагаемом периоде не менее 8–10 вычисляемых отсчетов $W_{0,1}(f)$. Иными словами, для шага расчета Δf этой функции должно выполняться $\Delta f \leq 1/(8 \div 10)\tau_1$ Гц.

Отметим частотную однотипность поведения спектральных вкладов $W_{0,1}(f)$ при варьировании длин начальных участков СФ. Это показывают результаты расчетов $W_{0,1}(f)$ при изменении τ_1 от 0,01 до 10000 с. Данный вывод оставим без иллюстраций.

Выражения для $W_{0,1}(\omega)$ в интегральном виде неудобны для дальнейшего теоретического и практического использования. Их точное вычисление так же достаточно трудоемко. Поэтому целесообразно получить простые аналитические аппроксимационные зависимости поведения $W_{0,1}(\omega)$, желательно на всем частотном интервале от $\omega = 0$ до $\omega = \infty$.

Вначале рассмотрим поведение $W_{0,1}(\omega)$ для $\omega\tau_1 \ll 1$ и $\omega\tau_1 \gg 1$. В первом случае справедливо выражение (5). Во втором случае воспользуемся теоремой Эрдели [14], которая показывает асимптотическое поведение преобразований Фурье-функций, содержащих степенные множители. Предварительно запишем интеграл в соотношении (4) в виде

$$\int_0^{\tau_1} \tau^{\mu-1} \sin(\omega\tau) d\tau = \text{Im} \left\{ \int_0^{\tau_1} \tau^{\mu-1} \exp(i\omega\tau) d\tau \right\}$$

(Im – мнимая часть комплексного выражения в фигурных скобках). Используя методику, описанную в [14], и опуская детали преобразований, после обратного выделения соответствующей мнимой компоненты получаем аппроксимацию спектрально-го вклада $W_{0,1}(\omega)$ в виде

$$W_{0,1\text{appr}}(\omega) = W(\omega) - \frac{C^2 \mu \tau_1^{\mu-1}}{2\pi\omega^2} \times \left\{ \cos\omega\tau_1 - \frac{(\mu-1)}{\omega\tau_1} \sin\omega\tau_1 \right\} + O(\omega^{-4}), \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Здесь $W(\omega)$ – СП СПСП со степенной СФ $D_\mu(\tau)$, определяемая выражением (2).

Таким образом, получены асимптотические зависимости поведения рассматриваемых спектральных вкладов для $\omega\tau_1 \ll 1$ и $\omega\tau_1 \gg 1$. Можно допустить, что совместное использование соотношений (5), (6)

при разумном выборе переходной частоты ω_b между этими режимами позволит с приемлемой точностью описывать поведение $W_{0,1}(\omega)$ на всем частотном интервале ω и при всех возможных значениях τ_1 и $0 < \mu < 1$. Для проверки этого предположения значения $W_{0,1}(\omega)$, рассчитанные по точным интегральным соотношениям, сравнивались с результатами вычислений по приближенным выражениям $W_{0,1\text{appr}}(\omega)$ при широком разбросе входных параметров. Так, параметр μ изменялся от 0,01 до 0,99, а величина τ_1 – от 0,01 до 10000 с. В качестве меры точности аппроксимации $W_{0,1}(\omega)$ функцией $W_{0,1\text{appr}}(\omega)$ использовались как их разность $d(\omega) = W_{0,1\text{appr}}(\omega) - W_{0,1}(\omega)$, так и относительная процентная ошибка $\epsilon(\omega) = [d(\omega)/W_{0,1}(\omega)] \cdot 100\%$. Выбор граничной частоты ω_b проводился исходя из обеспечения минимальных «переходных» ошибок $\epsilon(\omega)$ между двумя областями аппроксимации. Для исключения неправильной интерпретации результатов, ввиду возможного резкого изменения непрерывной $\epsilon(\omega)$, шаг всех расчетов в циклических частотах уменьшался до $\Delta f = 1/(640\tau_1)$ Гц.

В результате проведенных исследований был осуществлен следующий выбор $\omega_b = 2\pi f_b$:

$$f_b = \begin{cases} f_{b0} + 7/64\tau_1, & 0 < \mu \leq 0,1, \\ f_{b0} + 6/64\tau_1, & 0,1 < \mu \leq 0,5, \\ f_{b0} + 5/64\tau_1, & 0,5 < \mu \leq 0,75, \\ f_{b0} + 3/64\tau_1, & 0,75 < \mu \leq 0,9, \\ f_{b0}, & 0,9 < \mu < 1,0, \end{cases} \quad (7)$$

где $f_{b0} = 1/4\tau_1$, или $\omega_{b0} = 2\pi f_{b0} = \pi/2\tau_1$.

На рис. 2 в терминах циклических частот показаны полученные ошибки $\epsilon(f_k)$, ($f_k = k\Delta f$, $k = 0, 1, 2, \dots$) при аппроксимации спектральных вкладов $W_{0,1}(f)$ функциями $W_{0,1\text{appr}}(f)$ при выборе f_b из соотношения (7).

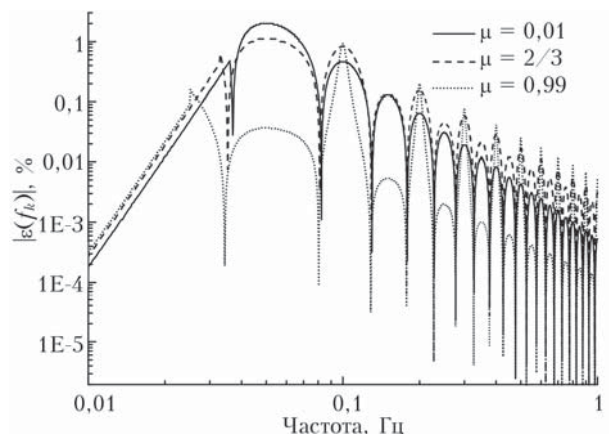


Рис. 2. Модули относительных процентных ошибок $\epsilon(f_k)$ аппроксимации $W_{0,1}(f_k)$ функциями $W_{0,1\text{appr}}(f_k)$ при выборе f_b из соотношения (7) для $\tau_1 = 10$ с при $\mu = 0,01, 2/3$ и $0,99$

Видно, что уровень ошибок по абсолютной величине значимо увеличен (относительно своих других значений) лишь на небольшом частотном интервале

вблизи частоты $2f_{b0}$. Причем наибольшие значения $|\varepsilon(f_k)|$ наблюдаются при $\mu = 0,01$. Однако величины этих ошибок незначительны и не превышают 2%. На остальной части частотного диапазона при удалении от $2f_{b0}$ величиной $|\varepsilon(f_k)|$ вообще можно пренебречь из-за ее крайней малости (десятыи и менее доли процента). Значения $|\varepsilon(f_k)|$ также в целом уменьшаются при стремлении параметра μ к единице.

Если же величину f_b выбирать не из соотношения (7), то точность аппроксимации может существенно ухудшиться. Так, если для $\mu = 0,01$ использовать $f_b = f_{b0}$ и вышеуказанную частотную сетку f_k , то даже при таком незначительном отклонении от оптимального значения f_b ошибка $|\varepsilon(f_k)|$ вблизи f_{b0} возрастает до 14%. Однако при увеличении шага Δf до $\Delta f_1 = 1/16\tau_1$ величины данных ошибок не превышают 4% (это верно для всех $0 < \mu < 1$). Можно сказать, что при такой прореженной частотной сетке $f_k = k\Delta f_1$ не вычисляются аппроксимирующие отсчеты $W_{0,1apr}(f_k)$, которым сопутствуют экстремальные значения $\varepsilon(f_k)$. Данный выбор $\Delta f = \Delta f_1$ обеспечивает достаточно полное и практически неискаженное представление о функции $W_{0,1}(f)$. Его можно рекомендовать для практического использования. Если шаг аппроксимации $\Delta f \geq \Delta f_1$, то в качестве f_b достаточно остановиться на величине $f_b = f_{b0}$ независимо от значения параметра μ указанного диапазона.

Заметим, что при фиксированном значении μ изменение величины τ_1 приводит только к соответствующему сдвигу и масштабированию хода $\varepsilon(\omega)$ на оси частот.

Приведенные аппроксимации (5), (6) с учетом (7) целесообразно объединить в одном выражении, которое и рекомендуется для практического использования при $0 < \mu < 1$:

$$W_{0,1}(\omega) \approx W_{0,1apr}(\omega) = \begin{cases} \frac{C^2 \mu \tau_1^{\mu+1}}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\mu+1} - \frac{(\omega \tau_1)^2}{6(\mu+3)} + \frac{(\omega \tau_1)^4}{120(\mu+5)} \right\}, & \omega \leq \omega_b; \\ W(\omega) - \frac{C^2 \mu \tau_1^{\mu-1}}{2\pi \omega^2} \left\{ \cos \omega \tau_1 - \frac{(\mu-1)}{\omega \tau_1} \sin \omega \tau_1 \right\}, & \omega > \omega_b. \end{cases} \quad (8)$$

Верхнее соотношение описывает поведение плоской части кривой $W_{0,1}(\omega)$ вблизи нулевых частот. Нижнее выражение показывает поведение ее спадающей части при увеличении ω . Одновременно оно характеризует смещение значений спектрального вклада $W_{0,1}(\omega)$ относительно СП $W(\omega)$ вследствие ограниченности интервала наблюдения τ_1 . Также подтверждается отмеченное выше соответствие поведения исходной $W(\omega)$ и $W_{0,1}(\omega)$ с ростом частоты при всех $0 < \mu < 1$. Подчеркнем, что при неограниченном возрастании τ_1 граничная частота ω_b стремится к нулю и справедлива только нижняя часть (8).

В итоге значения $W_{0,1apr}(\omega)$ приближаются к СП $W(\omega)$, т.е. выполняется $\lim_{\tau_1 \rightarrow \infty} W_{0,1apr}(\omega) = W(\omega)$.

Нижнюю часть выражения (8) также можно представить в мультипликативном виде:

$$W_{0,1}(\omega) \approx W_{0,1apr}(\omega) = W(\omega) \cdot K_{0,1apr}(\omega), \quad (9)$$

где

$$K_{0,1apr}(\omega) = 1 - \frac{(\omega \tau_1)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu) \sin(\pi\mu/2)} \left\{ \cos \omega \tau_1 - \frac{(\mu-1)}{\omega \tau_1} \sin \omega \tau_1 \right\}$$

– модулирующая спектральная функция. При $0 < \mu < 1$ она является строго положительной.

Выражение (9) описывает наблюдаемое на рис. 1 мультипликативное взвешивание степенного монотонного частотного хода СП $W(\omega)$ конкретными аддитивно-мультипликативными комбинациями периодических и степенных функций.

Оценка спектральных вкладов $W_{1,2}(\omega)$ среднего участка СФ $D_\mu(\tau)$ в СП $W(\omega)$. Область задания $\tau_1 \leq |\tau| \leq \tau_2$

Для $0 < \mu < 1$ из соотношения (1) непосредственно следует

$$W_{1,2}(\omega) = \frac{C^2 \mu}{2\pi \omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tau^{\mu-1} \sin(\omega \tau) d\tau. \quad (10)$$

На рис. 3, а после численного интегрирования (10) представлены спектральные вклады $W_{1,2}(f)$ участков степенной СФ $D_\mu(\tau)$ от $\tau_1 = 10$ с до $\tau_2 = 100$ с при $\mu = 0,01$ и $0,99$. В отличие от вкладов начальных участков $W_{0,1}(f)$ они знакопеременны и вследствие взаимодействия двух спектральных масштабов $1/\tau_1$ и $1/\tau_2$ носят более сложный частотный характер. Однако на низких частотах значения $W_{1,2}(f)$ всегда положительны и ограничены. Характерным является то, что с ростом частоты скорость спада модуля $W_{1,2}(f)$ практически не зависит от параметра μ , а приближается к обратной пропорциональной частотной квадратичной зависимости. Это верно для всего диапазона $0 < \mu < 1$. Иными словами, асимптотическое поведение спектрального вклада среднего участка данной СФ не соответствует исходному поведению СП $W(\omega)$ в виде (3). Указанное различие наиболее важно при малых значениях μ , что ясно видно на рис. 3, а.

В целом можно констатировать, что $W_{1,2}(\omega)$ при $0 < \mu < 1$ является знакопеременной функцией с затуханием

$$W_{1,2}(\omega) = O(\omega^{-2}), \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (11)$$

На практике для определения $W_{1,2}(\omega)$ вместо интегрирования (10) целесообразно использовать

тождество $W_{1,2}(\omega) = W_{0,2}(\omega) - W_{0,1}(\omega)$, где $W_{0,2}(\omega)$ и $W_{0,1}(\omega)$ – спектральные вклады начальных участков СФ $D_\mu(\tau)$ на интервалах $0 \leq \tau \leq \tau_2$ и $0 \leq \tau \leq \tau_1$ соответственно. Их нужно вычислить отдельно для значений τ_2 и τ_1 , следуя соответствующим аналитическим выражениям (8) и (7). При этом для определения $W_{0,2}(\omega)$ во всех указанных соотношениях величину τ_1 необходимо заменить на τ_2 .

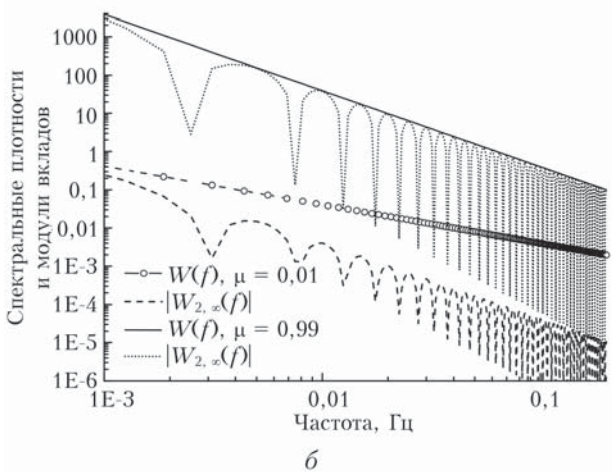
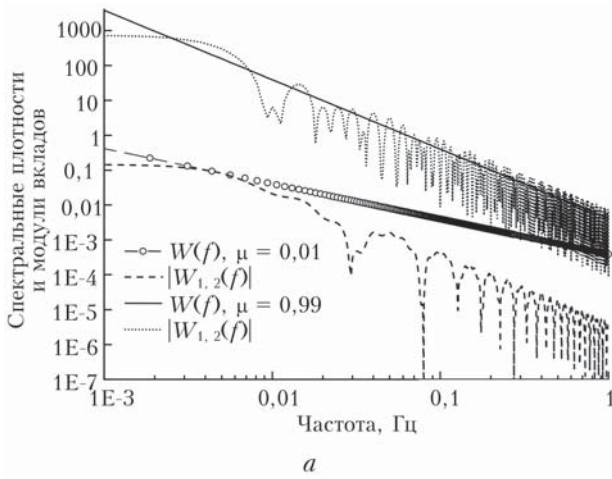


Рис. 3. Нормированные значения СП $W(f)$ для $\mu = 0,01$ и $0,99$ и модули вкладов в нее средних участков СФ $D_\mu(\tau)$ от $\tau_1 = 10$ с до $\tau_2 = 100$ с ($|W_{1,2}(f)|$) (а) и «конечных» – от $\tau_2 = 100$ с до ∞ ($|W_{2,\infty}(f)|$) (б)

В итоге результаты проведенных расчетов $W_{1,2apr}(\omega)$ хорошо совпадают с результатами, ранее полученными численными методами. Лишь относительные ошибки $|\varepsilon(\omega)|$ могут быть завышены вблизи перехода $W_{1,2}(\omega)$ через ноль даже при существенном уменьшении абсолютных ошибок $|d(\omega)|$. Однако такие резкие увеличения $|\varepsilon(\omega)|$ наблюдаются на чрезвычайно малых частотных интервалах, при почти нулевых значениях аппроксимируемой функции и поэтому не приводят к значимым отклонениям хода $W_{1,2apr}(\omega)$ от $W_{1,2}(\omega)$. Указанное подтверждается большим объемом проведенных расчетов

при широком варьировании значений τ_1 и τ_2 . Данный вывод оставим без иллюстраций.

Используя соотношения (8) и (7), аппроксимационные аналитические выражения для $W_{1,2}(\omega)$ можно записать и без разделения на $W_{0,2}(\omega)$ и $W_{0,1}(\omega)$:

$$W_{1,2apr}(\omega) = \begin{cases} \frac{C^2 \mu}{2\pi} \left\{ \frac{\tau_2^{\mu+1} - \tau_1^{\mu+1}}{\mu+1} - \frac{\tau_2^{\mu+1} \beta_2^2 - \tau_1^{\mu+1} \beta_1^2}{6(\mu+3)} + \frac{\tau_2^{\mu+1} \beta_2^4 - \tau_1^{\mu+1} \beta_1^4}{120(\mu+5)} \right\}, & \omega \leq \omega_{b2}; \\ \frac{C^2 \mu}{2\pi \omega^2} \left\{ \tau_1^{\mu-1} \left[\cos \beta_1 - \frac{(\mu-1)}{\beta_1} \sin \beta_1 \right] - \tau_2^{\mu-1} \left[\cos \beta_2 - \frac{(\mu-1)}{\beta_2} \sin \beta_2 \right] \right\}, & \omega > \omega_{b1}, \end{cases}$$

где $\beta_1 = \omega \tau_1$, $\beta_2 = \omega \tau_2$, $\omega_{b1} = \omega_b$ из выражения (7), а для нахождения ω_{b2} необходимо в (7) величину τ_1 заменить на τ_2 . При этом на указанных частотных интервалах будет обеспечена точность аппроксимации не хуже, чем при раздельном вычислении вышеуказанной разности $W_{0,2apr}(\omega)$ и $W_{0,1apr}(\omega)$. Для определения $W_{1,2apr}(\omega)$ на частотах $\omega_{b2} < \omega \leq \omega_{b1}$ можно использовать любое из приведенных соотношений, но хорошая точность аппроксимации не гарантируется. Более точный выбор одной переходной частоты затруднен из-за возможной большой вариации значений τ_1 и τ_2 , поэтому раздельное вычисление $W_{0,2}(\omega)$ и $W_{0,1}(\omega)$ предпочтительно. Приведенные в таком виде соотношения для $W_{1,2apr}(\omega)$ дают ясное представление о поведении спектральных вкладов $W_{1,2}(\omega)$ на большей части частотного диапазона. В частности, они подтверждают ранее полученные численными методами выводы.

Оценка спектральных вкладов $W_{2,\infty}(\omega)$ «конечного» участка СФ $D_\mu(\tau)$ в СП $W(\omega)$. Область задания $\tau_2 \leq |\tau| \leq \infty$

Для полноты изложения оценим вклад $W_{2,\infty}(\omega)$ указанного участка СФ в СП $W(\omega)$. Для $0 < \mu < 1$ из соотношения (1) непосредственно следует

$$W_{2,\infty}(\omega) = \frac{C^2 \mu}{2\pi \omega} \int_{\tau_2}^{\infty} \tau^{\mu-1} \sin(\omega \tau) d\tau. \quad (12)$$

На рис. 3, б после численного интегрирования (12) представлены модули знакопеременных спектральных вкладов $W_{2,\infty}(f)$ при $\tau_2 = 100$ с и $\mu = 0,01$ и $0,99$. Их частотные ходы во многом подобны таковым для $|W_{1,2}(f)|$, но менее изрезаны. На низких частотах функция $W_{2,\infty}(f)$ всегда положительна, однако насыщения не наблюдается.

С ростом f средняя скорость спада $|W_{2,\infty}(f)|$ также практически не зависит от параметра μ , а приближается к обратно пропорциональной частотной квадратичной зависимости. Другими словами, для $W_{2,\infty}(\omega)$ выполняется соотношение (11), справедливое для $W_{1,2}(\omega)$. Причем наибольшее расхождение между частотным спадом исходной СП $W(\omega)$ и спектральным вкладом $W_{2,\infty}(\omega)$ наблюдается при малых значениях μ , что ясно видно на рис. 3, б.

Не вдаваясь в детали анализа, который подобен предыдущим рассуждениям, запишем аналитическую аппроксимацию зависимости $W_{2,\infty}(\omega)$ в виде

$$W_{2,\infty\text{арг}}(\omega) = \begin{cases} W(\omega) - \frac{C^2 \mu \tau_2^{\mu+1}}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\mu+1} - \frac{(\omega \tau_2)^2}{6(\mu+3)} + \frac{(\omega \tau_2)^4}{120(\mu+5)} \right\}, & \omega \leq \omega_b; \\ \frac{C^2 \mu \tau_2^{\mu-1}}{2\pi \omega^2} \left\{ \cos \omega \tau_2 - \frac{(\mu-1)}{\omega \tau_2} \sin \omega \tau_2 \right\}, & \omega > \omega_b, \end{cases}$$

где значения ω_b определяются из соотношения (7) при замене τ_1 на τ_2 .

Заметим, что при уменьшении τ_2 до нуля граничная частота ω_b стремится к бесконечности и справедлива только верхняя часть последнего выражения. В итоге значения $W_{2,\infty\text{арг}}(\omega)$ приближаются к СП $W(\omega)$, т.е. выполняется $\lim_{\tau_2 \rightarrow 0} W_{2,\infty\text{арг}}(\omega) = W(\omega)$.

Результаты проведенных расчетов $W_{2,\infty\text{арг}}(\omega)$ хорошо совпадают с таковыми, полученными после численного интегрирования соотношения (12). При этом ошибки аппроксимации в общем незначительны и их поведение аналогично ранее рассмотренным ошибкам для знакопеременных спектральных вкладов $W_{1,2}(\omega)$.

Правильность полученных результатов можно проиллюстрировать рис. 4.

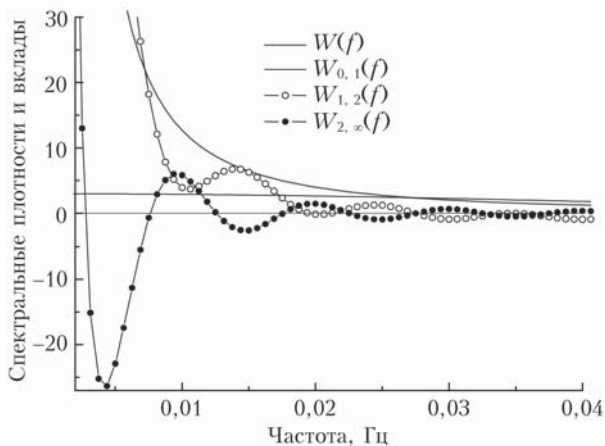


Рис. 4. Нормированные значения СП СПСП $W(f)$ и вклады в нее начальных $W_{0,1}(f)$, средних $W_{1,2}(f)$ и «конечных» участков $W_{2,\infty}(\omega)$ степенной СФ для $\mu = 2/3$, $\tau_1 = 10$ с, $\tau_2 = 100$ с

На нем для $\mu = 2/3$, $\tau_1 = 10$ с, $\tau_2 = 100$ с показаны соответствующие положительные и знакопеременные значения трех последовательных спектральных вкладов $W_{0,1}(\omega)$, $W_{1,2}(\omega)$, $W_{2,\infty}(\omega)$ вблизи нулевых частот. Однако их суммирование дает строго положительную исходную СП $W(\omega)$. В принципе, такое разложение СП $W(\omega)$ можно осуществлять по любому произвольному числу спектральных вкладов.

Заключение

Из представленного материала следует, что частотное поведение спектральных вкладов начальных $W_{0,1}(\omega)$, средних $W_{1,2}(\omega)$ и «конечных» участков $W_{2,\infty}(\omega)$ степенной СФ СПСП $D_\mu(\tau)$ значительно сложнее строго положительной монотонной степенной частотной зависимости (3) исходной СП $W(\omega)$ (2).

Так, всегда положительны только значения $W_{0,1}(\omega)$. При этом наблюдается модуляция хода $W(\omega)$ некоторыми строго положительными квазипериодическими функциями. Их колебательный характер определяется величинами τ_1 и μ . Причем амплитуда осцилляций увеличивается с ростом параметра μ . Однако средний частотный спад $W_{0,1}(\omega)$ соответствует таковому для исходной СП $W(\omega)$, т.е. с увеличением частоты ω уменьшается обратно пропорционально ее $(\mu + 1)$ степени.

Все другие спектральные вклады знакопеременны. При этом наиболее сложный частотный характер вследствие взаимодействия двух спектральных масштабов $1/\tau_1$ и $1/\tau_2$ наблюдается у $W_{1,2}(\omega)$. Характерным является то, что с ростом частоты средняя скорость спада $W_{1,2}(\omega)$ и $W_{2,\infty}(\omega)$ практически одинакова и не зависит от величины параметра μ . Она приближается к обратно пропорциональной частотной квадратичной зависимости, т.е. выполняется соотношение (11). Отсюда следует, что частотное поведение данных спектральных вкладов не соответствует исходному поведению спектральной плотности $W(\omega)$ в виде выражений (2) и (3).

В работе представлены и проанализированы аналитические аппроксимационные зависимости поведения спектральных вкладов $W_{0,1}(\omega)$, $W_{1,2}(\omega)$, $W_{2,\infty}(\omega)$. Показана их высокая точность для описания частотных ходов указанных вкладов при всех возможных значениях μ , τ_1 и τ_2 . В частности, из них следуют полученные численными методами вышеотмеченные выводы об их асимптотическом поведении.

Полученные результаты позволяют более правильно интерпретировать спектрально-структурные связи СПСП со степенной СФ, в том числе и заданной на различных ограниченных интервалах временных (или пространственных) сдвигов.

В дальнейшем планируется опубликовать результаты аналогичного исследования степенной СФ, но для стационарного случайного процесса.

Этот случай имеет существенные отличия от случайных процессов со стационарными приращениями.

1. *Татарский В.И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.
2. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. Часть I. Случайные процессы. М.: Наука, 1976. 496 с.
3. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Часть II. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.
4. *Гандин Л.С., Каган Р.Л.* Статистические методы интерпретации метеорологических данных. Л.: Гидрометеоиздат, 1976. 359 с.
5. *Shapland T.M., McElron A.J., Snyder R.L., Paw U.K.T.* Structure function analysis of two-scale scalar ramps. Part I: Theory and modelling // Bound.-Lay. Meteorol. 2012. V. 145, N 1. P. 5–25.
6. *Shapland T.M., McElron A.J., Snyder R.L., Paw U.K.T.* Structure function analysis of two-scale scalar ramps. Part II: Ramp characteristics and surface renewal flux estimation // Bound.-Lay. Meteorol. 2012. V. 145, N 1. P. 27–44.
7. *Hunt J.C.R., Sandham N.D., Vassilicos J.C., Launder B.E., Monkewitz P.A., Hewitt G.F.* Developments in turbulence research: A review based on the Programme of the Isaac Newton Institute, Cambridge // J. Fluid Mech. 2001. V. 436. P. 353–391.
8. *Golbraikh E., Kopeika N.S.* Behavior of structure function of refraction coefficients in different turbulent fields // Appl. Opt. 2004. V. 43. N 33. P. 6151–6156.
9. *Юшков В.П.* Структурная функция энтропии и масштабы турбулентности // Вестн. МГУ. Физика. Астрономия. 2012. № 4. С. 62–68.
10. *Богусевич А.Я.* Наблюдаемые нарушения закона «2/3» в экспериментальных спектрах турбулентных флуктуаций температуры и условия их возникновения // Турбулентность, динамика атмосферы и климата: междунар. конф., посвящ. памяти акад. А.М. Обухова. Тез. докл. М.: ГЕОС, 2013. С. 12–15.
11. *Гладких В.А., Невзорова И.В., Одицов С.Л., Федоров В.А.* Структурные функции температуры воздуха над неоднородной подстилающей поверхностью. Часть II. Статистика параметров структурных функций // Оптика атмосфер. и океана. 2013. Т. 26, № 11. С. 955–963; *Gladkikh V.A., Nevzorova I.V., Odintsov S.L., Fedorov V.A.* Structure functions of air temperature over an inhomogeneous underlying surface. Part II. Statistics of structure functions parameters // Atmos. Ocean. Opt. 2014. V. 27, N 2. P. 154–163.
12. *Афанасьев А.Л., Банах В.А., Ростов А.П.* Пространственно-временная статистика мелкомасштабной турбулентности приземного слоя атмосферы по результатам измерений с помощью массива ультразвуковых датчиков // Оптика атмосфер. и океана. 1999. Т. 12, № 8. С. 701–707.
13. *Бартењев О.В.* Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. М.: Диалог-МИФИ, 2001. Ч. 3. 368 с.
14. *Панулис А.* Теория систем и преобразований в оптике. М.: Мир, 1971. 496 с.

V.A. Fedorov. Spectral contributions of sections of power-law structure function of random processes with stationary increments. Part 1. The exponent is less than one.

The frequency behavior of the spectral contributions of the initial, middle, and “finite” parts of the power-law structure function (with an exponent less than one) to the spectral density (SD) of a random process with stationary increments is considered. It is shown that it is considerably more complicated than the strictly positive monotonic power-law frequency dependence of the initial SD. The latter corresponds only to the behavior of the spectral contribution of the initial section of the given structure function. The analytical approximation dependences of the frequency behavior of all these spectral contributions are presented and analyzed. They are recommended for wide practical use.