

И.П. Лукин

## Статистические характеристики оптической передаточной функции системы «турбулентная атмосфера – телескоп»

Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск

Поступила в редакцию 7.10.2003 г.

изучаются статистические характеристики флуктуаций оптической передаточной функции оптической системы «турбулентная атмосфера – телескоп» при регистрации усредненного изображения. Рассчитываются следующие статистические характеристики флуктуаций оптической передаточной функции: среднее значение, дисперсия и корреляционные функции. Полученные результаты позволяют оценить ухудшение изображения, вызванное влиянием атмосферной турбулентности, а также ввести количественную оценку понятиям «очень длинные» и «очень короткие» выдержки.

Совместное действие атмосферы и оптической системы при формировании изображения некогерентного источника обычно рассматривают как случайную линейную фильтрацию, а систему «атмосфера – оптическая система» характеризуют оптической передаточной функцией [1]. Известно [2–9], что оптическая передаточная функция турбулентной атмосферы существенно зависит от времени усреднения (экспозиции). Наиболее полно изучены предельные случаи «очень длинных» [2–5] и «очень коротких» [3, 5] выдержек. Исследования флуктуаций интенсивности оптического излучения в фокальной плоскости телескопической системы в зависимости от времени усреднения (экспозиции) проводились в [9].

В настоящей статье рассчитываются статистические характеристики оптической передаточной функции турбулентной атмосферы и телескопической оптической системы при произвольном времени экспозиции.

Мгновенное значение оптической передаточной функции атмосферной турбулентности и телескопической оптической системы можно записать в виде [2–5]:

$$M(\mathbf{p}, t) = \int \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{p}' U(\mathbf{p}, t) U^*(\mathbf{p} + \mathbf{p}', t) K(\mathbf{p}) K^*(\mathbf{p} + \mathbf{p}'), \quad (1)$$

где  $U(\mathbf{p}, t)$  – комплексная амплитуда поля в точке  $\mathbf{p}$  на приемной апертуре в момент времени  $t$ , создаваемая точечным некогерентным источником, находящимся в пространстве предмета;  $K(\mathbf{p})$  – функция зрачка приемной апертуры;  $\mathbf{p}$  – пространственный масштаб.

Так как поле  $U(\mathbf{p}, t)$  является случайной величиной из-за флуктуаций диэлектрической проницаемости воздуха, то и оптическая передаточная функция  $M(\mathbf{p}, t)$  оказывается случайной величиной, изменяющейся во времени. Поэтому при регистрации

изображения объекта детектором с конечным временем отклика (например, фотографирование или визуальное наблюдение) будет происходить усреднение оптической передаточной функции. Таким образом, оптическая передаточная функция примет вид

$$\bar{M}(\mathbf{p}, \Delta t) = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt M(\mathbf{p}, t), \quad (2)$$

где  $\Delta t$  – время усреднения (экспозиции). Ввиду того что  $\bar{M}(\mathbf{p}, \Delta t)$  в общем случае также является случайной величиной, то для ее описания воспользуемся методом моментов. Проведем рассмотрение следующих статистических характеристик: среднего значения, дисперсии и корреляционных функций флуктуаций оптической передаточной функции.

Среднее значение оптической передаточной функции получим усреднением выражения (2) по ансамблю реализаций диэлектрической проницаемости атмосферного воздуха:

$$\langle \bar{M}(\mathbf{p}, \Delta t) \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt \langle M(\mathbf{p}, t) \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt \int \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{p}' \Gamma_2(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{p}'; t, t) K(\mathbf{p}) K^*(\mathbf{p} + \mathbf{p}'), \quad (3)$$

где

$$\Gamma_2(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{p}'; t, t) = \langle U(\mathbf{p}, t) U^*(\mathbf{p} + \mathbf{p}', t) \rangle$$

– функция взаимной когерентности второго порядка поля оптической волны [10].

Пусть оптическая волна будет плоской (например, излучение от звезды), т.е.

$$U(\mathbf{p}, t) = U_0 \exp[\psi(\mathbf{p}, t)],$$

где  $U_0$  – амплитуда оптической волны;

$$\psi(\mathbf{p}, t) = \chi(\mathbf{p}, t) + iS(\mathbf{p}, t)$$

– флуктуации комплексной фазы оптической волны;  $\chi(\mathbf{p}, t)$  – флуктуации логарифма амплитуды оптической волны;  $S(\mathbf{p}, t)$  – флуктуации фазы оптической волны. Так как известно [10], что  $\chi(\mathbf{p}, t)$  и  $S(\mathbf{p}, t)$  в области применимости метода плавных возмущений имеют нормальные законы распределения вероятностей, то

$$\Gamma_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; t_1, t_2) = U_0^2 \exp\left[-\frac{1}{2}D(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, t_1 - t_2)\right], \quad (4)$$

где  $D(\mathbf{p}, t)$  – пространственно-временная структурная функция флуктуаций комплексной фазы плоской оптической волны [10].

Подставив выражение (4) в выражение (3), получим следующий результат:

$$\begin{aligned} \langle \bar{M}(\mathbf{p}, \Delta t) \rangle &= \\ &= U_0^2 \exp\left[-\frac{1}{2}D(p)\right] \int \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{p} K(\mathbf{p}) K^*(\mathbf{p} + \mathbf{p}), \quad (5) \end{aligned}$$

где  $D(p) = D(\mathbf{p}, 0)$  – пространственная структурная функция флуктуаций комплексной фазы плоской оптической волны на разное точек наблюдения, равном  $p$ .

Отсюда следует, что  $\langle \bar{M}(\mathbf{p}, \Delta t) \rangle$  не зависит от времени экспозиции и равно значению оптической передаточной функции при «бесконечно длинных» выдержках [2, 3, 5], т.е.

$$\langle \bar{M}(\mathbf{p}, \Delta t) \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt \langle M(\mathbf{p}, t) \rangle = \langle \bar{M}(\mathbf{p}) \rangle.$$

Дисперсию флуктуаций оптической передаточной функции можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_M^2(\mathbf{p}, \Delta t) &= \langle \bar{M}^2(\mathbf{p}, \Delta t) \rangle - \langle \bar{M}(\mathbf{p}) \rangle^2 = \frac{1}{\Delta t^2} \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt' dt'' \times \\ &\times \int \int \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{p}' d\mathbf{p}'' \Gamma_4(\mathbf{p}', \mathbf{p}' + \mathbf{p}; \mathbf{p}'' + \mathbf{p}, \mathbf{p}''; t', t'') \times \\ &\times K(\mathbf{p}') K^*(\mathbf{p}' + \mathbf{p}) K^*(\mathbf{p}'') K(\mathbf{p}'' + \mathbf{p}) - \langle \bar{M}(\mathbf{p}) \rangle^2, \quad (6) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_4(\mathbf{p}', \mathbf{p}' + \mathbf{p}; \mathbf{p}'' + \mathbf{p}, \mathbf{p}''; t', t'') &= \\ &= \langle U(\mathbf{p}', t') U^*(\mathbf{p}' + \mathbf{p}, t') U(\mathbf{p}'' + \mathbf{p}, t'') U^*(\mathbf{p}'', t'') \rangle \end{aligned}$$

– функция когерентности четвертого порядка оптической волны [10].

Делая те же самые предположения, какие были сделаны ранее при получении функции взаимной когерентности второго порядка поля оптической волны, и считая, что  $\langle \chi^2(\mathbf{p}, t) \rangle \ll 1$  (условие хорошо выполняется в плоской волне для трасс, пронизывающих всю толщу атмосферы Земли с зенитными

углами  $\leq 80^\circ$ ), получим

$$\begin{aligned} \Gamma_4(\mathbf{p}', \mathbf{p}' + \mathbf{p}; \mathbf{p}'' + \mathbf{p}, \mathbf{p}''; t', t'') &\cong \\ &\cong U_0^4 \exp\left[-D(\mathbf{p}, 0) + \frac{1}{2}D(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'' - \mathbf{p}, t' - t'') + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}D(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'' + \mathbf{p}, t' - t'') - D(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'', t' - t'')\right]. \quad (7) \end{aligned}$$

Оказывается, что  $\sigma_M^2(\mathbf{p}, \Delta t)$  зависит не только от времени усреднения, но также от формы и размеров входного зрачка телескопической системы. Поэтому для дальнейшего рассмотрения требуется задать конкретный вид функции зрачка приемной апертуры. Пусть флуктуирующая волна падает на круглый объектив площадью  $S_R = \pi R^2$ , где  $R$  – радиус приемной апертуры, а функцию зрачка приемной апертуры выберем в виде квадратичной экспоненты [5, 6]:

$$K(\mathbf{p}) = K_0 \exp\left(-\frac{1}{2R^2}p^2\right), \quad (8)$$

где  $K_0$  – амплитудное пропускание телескопа на оптической оси системы. При этом  $\langle \bar{M}(\mathbf{p}) \rangle_{\mathbf{p}=0} = \pi U_0^2 R^2$ .

После вычисления интеграла по одной пространственной переменной (6) получим более простое выражение для дисперсии оптической передаточной функции

$$\begin{aligned} \sigma_M^2(\mathbf{p}, \Delta t) &\cong \frac{\pi U_0^4 K_0^4 R^2}{2\Delta t^2} \exp\left(-\frac{1}{2R^2}p^2\right) \times \\ &\times \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt' dt'' \int \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{p} \exp\left(-\frac{1}{2R^2}p^2\right) \times \\ &\times \exp\left[-D(\mathbf{p}, 0) + \frac{1}{2}D(\mathbf{p} - \mathbf{p}, t' - t'') + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}D(\mathbf{p} + \mathbf{p}, t' - t'') - D(\mathbf{p}, t' - t'')\right] - \langle \bar{M}(\mathbf{p}) \rangle^2. \quad (9) \end{aligned}$$

Для телескопических систем небольших размеров ( $R < L_0$ , где  $L_0$  – внешний масштаб атмосферной турбулентности) с помощью гипотезы «замороженности» Тейлора структурную функцию комплексной фазы можно записать в виде

$$D(\mathbf{p}, t) = 0,73 C_\epsilon^2 k^2 h |\mathbf{p} - \mathbf{v}t|^{5/3},$$

где  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  – длина волны излучения в свободном пространстве;  $C_\epsilon^2$  – приземное значение структурного параметра флуктуаций диэлектрической проницаемости турбулентной атмосферы;  $h = C_\epsilon^{-2} \int_0^\infty dx C_\epsilon^2(x, \theta)$

– эффективная толщина оптически активного слоя атмосферной турбулентности;  $C_\epsilon^2(x, \theta)$  – высотный профиль структурного параметра флуктуаций

диэлектрической проницаемости турбулентной атмосферы, зависящий от зенитного угла  $\theta$ ;  $\mathbf{V}$  — скорость ветра в направлении, перпендикулярном направлению распространения света.

Асимптотический анализ выражения (9) показал, что в области малых пространственных масштабов  $p \ll D^{-3/5}(R)R$  и  $p \ll R$

$$\sigma_M^2(\mathbf{p}, \Delta t) \cong \pi^2 U_0^4 K_0^4 R^4 f\left(\frac{V\Delta t}{R}\right) D(R) \left(\frac{p}{R}\right)^2, \quad (10)$$

где

$$f(x) \cong \begin{cases} 0,69 \left(1 - \frac{1}{48}x^2\right), & x \leq 1, \\ 0,99x^{-1/3}, & x > 1. \end{cases}$$

В промежуточной области пространственных масштабов  $D^{-3/5}(R)R \ll p \ll R$  (которая имеет место лишь в том случае, когда структурная функция флуктуаций комплексной фазы на размере апертуры велика по сравнению с 1)

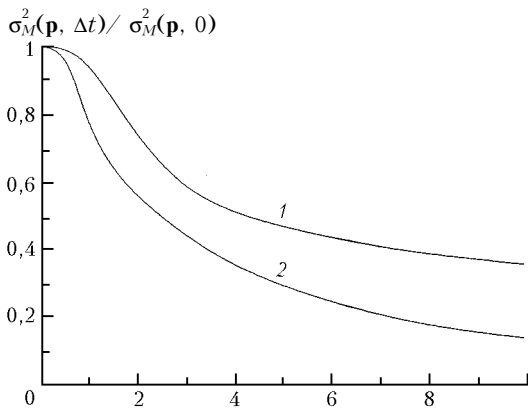
$$\sigma_M^2(\mathbf{p}, \Delta t) \cong \pi^2 U_0^4 K_0^4 R^4 \varphi\left(\frac{V\Delta t}{R}\right) \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{p}{R}\right)^2\right], \quad (11)$$

где

$$\varphi(x) \cong \begin{cases} \frac{1}{2} D^{-6/5}(R) \left(1 - \frac{1}{12}x^2\right), & x \leq 1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} x^{-1}, & x > 1. \end{cases}$$

И наконец, для больших пространственных масштабов ( $p > R$ )  $\sigma_M^2(\mathbf{p}, \Delta t) \cong 0$  из-за наличия множителя вида  $\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{p}{R}\right)^2\right]$ .

Из полученных результатов видно, что с увеличением времени экспозиции флуктуации  $M(\mathbf{p}, \Delta t)$  уменьшаются и при  $\Delta t \gg \Delta t_0 = R/V$  они совсем исчезают. На рисунке представлена зависимость отношения  $\sigma_M^2(\mathbf{p}, \Delta t)/\sigma_M^2(\mathbf{p}, 0)$  от нормированного времени усреднения  $\Delta t/\Delta t_0$ .



Поведение нормированной дисперсии флуктуаций оптической передаточной функции от нормированного времени усреднения при различных условиях распространения: 1 — при  $D(R) < 1$ ; 2 — при  $D(R) > 1$

Кривая 1 построена для области малых пространственных масштабов ( $p \ll D^{-3/5}(R)R$  и  $p \ll R$ ), т.е. когда

$$\sigma_M^2(\mathbf{p}, \Delta t)/\sigma_M^2(\mathbf{p}, 0) \cong f(\Delta t/\Delta t_0) f^{-1}(0),$$

а кривая 2 — для промежуточной области пространственных масштабов ( $D^{-3/5}(R)R \ll p \ll R$ ):

$$\sigma_M^2(\mathbf{p}, \Delta t)/\sigma_M^2(\mathbf{p}, 0) \cong \varphi(\Delta t/\Delta t_0) \varphi^{-1}(0).$$

Поведение этих кривых показывает, что характерным масштабом изменения  $\sigma_M^2(\mathbf{p}, \Delta t)$  в зависимости от времени усреднения  $\Delta t$  является отношение размера апертуры к модулю средней скорости ветра ( $\Delta t_0$ ). Таким образом, величину времени усреднения  $\Delta t_0$  можно считать количественным критерием понятий «очень длинные» ( $\Delta t \gg \Delta t_0$ ) и «очень короткие» ( $\Delta t \ll \Delta t_0$ ) выдержки.

Для характеристики статистической связи флуктуаций оптической передаточной функции на разных пространственных масштабах рассмотрим функцию корреляции флуктуаций оптической передаточной функции на разных пространственных масштабах:

$$B_M(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \Delta t) = \langle \bar{M}(\mathbf{p}_1, \Delta t) \bar{M}^*(\mathbf{p}_2, \Delta t) \rangle - \langle \bar{M}(\mathbf{p}_1) \rangle \langle \bar{M}(\mathbf{p}_2) \rangle.$$

Интегральное выражение для функции корреляции имеет структуру, аналогичную выражению (9), поэтому легко провести асимптотический анализ тем же самым способом, что и для дисперсии оптической передаточной функции.

В области малых пространственных масштабов:  $p_{1,2} \ll R$  и  $p_{1,2} \ll D^{-3/5}(R)R$ , имеет место почти полная корреляция флуктуаций на всех масштабах

$$b_M(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \Delta t) = \frac{B_M(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \Delta t)}{\sigma_M(\mathbf{p}_1, \Delta t) \sigma_M(\mathbf{p}_2, \Delta t)} \cong 1.$$

В промежуточной области ( $D^{-3/5}(R)R \ll p_{1,2} \ll R$ ) корреляция спадает по экспоненте:

$$b_M(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \Delta t) \cong \exp\left[-\left(\frac{|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|}{p_{cor}}\right)^{5/3}\right],$$

где  $p_{cor} = 2D^{-3/5}(R)R$ , т.е. область корреляции флуктуаций  $M(\mathbf{p}, \Delta t)$  оказывается ограниченной размером спекла. Нетрудно заметить, что нормированная функция корреляции флуктуаций оптической передаточной функции на разных пространственных частотах практически не зависит от времени усреднения.

Практический интерес представляет возможность определения  $M(\mathbf{p}, \Delta t)$  с одним временем усреднения по статистическим характеристикам флуктуаций оптической передаточной функции с другим временем усреднения. Для этого рассмотрим корреляционную функцию вида

$$B_M(\mathbf{p}; \Delta t_1, \Delta t_2) = \langle \bar{M}(\mathbf{p}, \Delta t_1) \bar{M}^*(\mathbf{p}, \Delta t_2) \rangle - \langle \bar{M}(\mathbf{p}) \rangle^2,$$

которая характеризует статистическую связь флуктуаций  $M(\mathbf{p}, \Delta t)$  усредненной за время экспозиции  $\Delta t_1$  и  $\Delta t_2$ .

В случае, если  $\Delta t_1 \ll \Delta t_0$ , а  $\Delta t_2 = \Delta t_1 + \Delta t$ , можно показать, что нормированная корреляционная функция

$$b_M(\mathbf{p}; \Delta t_1, \Delta t_2) = \frac{B_M(\mathbf{p}; \Delta t_1, \Delta t_2)}{\sigma_M(\mathbf{p}, \Delta t_1)\sigma_M(\mathbf{p}, \Delta t_2)}$$

в области малых пространственных масштабов  $p$  ( $p \ll R$  и  $p \ll D^{-3/5}(R)R$ ) будет иметь вид

$$b_M(\mathbf{p}; \Delta t_1, \Delta t_2) \equiv \begin{cases} 1 - \frac{3}{96} \left( \frac{\Delta t}{\Delta t_0} \right)^2, & \Delta t \leq \Delta t_0, \\ 0,70 \left( \frac{\Delta t}{\Delta t_0} \right)^{-1/6}, & \Delta t > \Delta t_0, \end{cases}$$

а в промежуточной области изменения по пространственному масштабу  $p$  ( $D^{-3/5}(R)R \ll p \ll R$ )

$$b_M(\mathbf{p}; \Delta t_1, \Delta t_2) \equiv \begin{cases} 1 - \frac{1}{8} \left( \frac{\Delta t}{\Delta t_0} \right)^2, & \Delta t \leq \Delta t_0, \\ 0,79 \left( \frac{\Delta t}{\Delta t_0} \right)^{-1/2}, & \Delta t > \Delta t_0. \end{cases}$$

Следовательно, корреляция флуктуаций  $M(\mathbf{p}, \Delta t)$  с разными временами усреднения уменьшается с увеличением времени  $\Delta t$ , причем характерным масштабом корреляционной функции является величина  $\Delta t_0$  (время проноса средней скоростью ветра турбулентных неоднородностей на расстояние, равное характерному масштабу апертуры).

Одной из стандартных характеристик качества изображения, получаемого оптической системой, является интегральное разрешение. Интегральное разрешение оптической системы при конечных длительностях осреднения можно записать в виде [3, 6–8]:

$$\bar{\mathfrak{R}}(\Delta t) = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt \mathfrak{R}(\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{p} \bar{M}(\mathbf{p}, \Delta t). \quad (12)$$

Среднее значение интегрального разрешения, получаемое усреднением выражения (12) по ансамблю реализаций флуктуаций диэлектрической проницаемости атмосферы, как и среднее значение оптической передаточной функции вида (5), не зависит от времени осреднения. Для оптической системы, чья функция зрачка описывается формулой (8), среднее значение интегрального разрешения имеет вид

$$\langle \bar{\mathfrak{R}} \rangle = \langle \bar{\mathfrak{R}}(\Delta t) \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt \mathfrak{R}(t) =$$

$$= 2\pi^2 U_0^2 K_0^2 R^4 \int_0^{\infty} dp p \exp \left[ -\frac{1}{4} p^2 - \frac{1}{2} D(R) p^{5/3} \right].$$

Зависимость среднего значения интегрального разрешения  $\langle \bar{\mathfrak{R}} \rangle$  от параметров атмосферной турбулентности входит через единственный параметр — структурную функцию флуктуаций комплексной фазы  $D(R)$ , вычисленную на размере апертуры. Увеличение структурной функции флуктуаций комплексной фазы  $D(R)$  приводит к уменьшению разрешающей способности оптической системы.

В заключение необходимо отметить, что описанные выше результаты для функции зрачка вида (8) могут быть получены и для апертуры с резким краем, при этом расхождение результатов будет наблюдаться лишь в области больших пространственных масштабов  $p > R$ .

1. Goodman J.W. Introduction in Fourier Optics. New York: McGraw-Hill, 1968. 41 p.
2. Hufnagel R.E., Stanley N.R. Modulation transfer function associated with image transmission through turbulent media // J. Opt. Soc. Amer. 1964. V. 54. N. 1. P. 52–61.
3. Fried D.L. Optical resolution through a randomly inhomogeneous medium with for very long and very short exposures // J. Opt. Soc. Amer. 1966. V. 56. N. 10. P. 1372–1379.
4. Fried D.L. Limiting resolution looking down through the atmosphere // J. Opt. Soc. Amer. 1966. V. 56. N. 10. P. 1380–1385.
5. Лукин И.П. Потенциальные возможности методов постдетекторной обработки изображений некогерентно освещенных объектов, наблюдаемых через турбулентную атмосферу // Оптика атмосф. и океана. 1995. Т. 8. № 3. С. 455–466.
6. Лукин И.П. Интегральное разрешение оптической системы «турбулентная атмосфера — телескоп» // Оптика атмосф. и океана. 1995. Т. 8. № 3. С. 479–483.
7. Lukin I.P. Potentialities of the methods of the posterior processing of incoherently illuminated objects through the turbulent atmosphere // Proc. ESO Conference and Workshop N. 54. Adaptive Optics / Ed. by M. Cullum. ESO, Garching bei Munchen, Germany, 1996. P. 179–184.
8. Lukin I.P. Integral resolution of the atmosphere and telescopic system for Knox — Thompson and triple correlation of the image intensity methods // Proc. SPIE. 2003. V. 5026. P. 155–162.
9. Roddier C., Roddier F. Influence of exposure time on spectral properties of turbulence-degraded astronomical images // J. Opt. Soc. Amer. 1975. V. 65. N. 6. P. 664–667.
10. Рытов С.М., Крайцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Часть II. М.: Наука, 1978. 464 с.

**I.P. Lukin. Statistical characteristics of the optical transfer function of the system «turbulent atmosphere — telescope».**

Statistical characteristics of fluctuations of the optical transfer function of optical system «turbulent atmosphere — telescope» the mean value, the variance, and the correlation functions are theoretically studied. The results obtained allow estimating image degradation caused by the influence of atmospheric turbulence, as well as quantitatively estimating the concepts of «very long» and «very short» exposures.