

# Эффективный радиус фемтосекундного лазерного излучения при его самовоздействии в газовой среде в режиме множественной филаментации

А.А. Землянов, А.Д. Булыгин\*

*Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН  
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1*

Поступила в редакцию 11.09.2008 г.

В рамках феноменологического подхода с использованием многофокусной модели филаментации с целью описания распространения мощного фемтосекундного лазерного импульса получено уравнение для функции Вигнера. В приближении гауссова профиля средней интенсивности лазерного излучения исследовано поведение эффективного радиуса лазерного пучка.

*Ключевые слова:* эффективные параметры, фемтосекундное излучение, самофокусировка, множественная филаментация, функция Вигнера.

## Введение

Распространение мощных фемтосекундных лазерных импульсов тераваттной и мультитераваттной мощностей [1, 2] сопровождается самовоздействием, приводящим к множественной филаментации. При большом числе филаментов множественная филаментация реализуется в так называемом режиме оптической турбулентности [3], представляющей собой частный случай сильной турбулентности. Данный режим характеризуется высокоинтенсивными структурами оптического поля, локализованными в малых пространственных областях на фоне с малой интенсивностью [4].

Численное исследование самовоздействия лазерных пучков в режиме множественной филаментации проводилось в работах [1, 3].

Исследование распространения лазерных пучков на основе численных расчетов, с флуктуирующими начальными условиями, с начальным радиусом до 100 мкм на километровые дистанции в условиях турбулентной атмосферы, в поперечном профиле которых образуются сотни филаментов [2], даже при современных вычислительных возможностях представляется проблематичным [5]. Поэтому важно развивать феноменологический метод, позволяющий, с помощью конечного числа параметров, определяемых из численного или лабораторного эксперимента, предсказывать эволюцию основных наблюдаемых характеристик лазерного пучка, таких как энергия, эффективный радиус, эффективная угловая расходимость.

В работе [6] на основе численных расчетов были установлены основные этапы эволюции эффективных параметров в регулярном режиме распространения центрально-симметричного лазерного пучка. В работе [7] на основе модели движущихся идентичных фокусов [8] была установлена зависимость эффективного радиуса от начальных параметров и световой энергии, поглощенной средой, через феноменологический параметр  $\gamma$ , характеризующий поперечную структуру филамента.

В настоящей статье, являющейся логическим продолжением [7], на основе стохастического нелинейного уравнения Шредингера (СНУШ) в рамках многофокусной модели филаментации получено уравнение для функции Вигнера. Данное уравнение описывает распространение мощного лазерного импульса фемтосекундной длительности в режиме оптической турбулентности, характеризующейся поперечной неустойчивостью Беспалова–Таланова, и используется при получении уравнений для эффективных параметров.

При решении полученных незамкнутых уравнений для эффективных параметров лазерного пучка было предложено ввести феноменологический параметр  $I_{cr}$ . Эта величина характеризует значение макроскопической интенсивности, при котором реализуется режим оптической турбулентности. Для того чтобы замкнуть полученную систему уравнений для эффективных параметров лазерного пучка, использовалось приближение гауссова профиля макроскопической интенсивности лазерного пучка. Соотношения, полученные в результате решения этой системы уравнений для усредненных значений эффективных параметров, и соответственно найденное усредненное распределение фила-

\* Александр Анатольевич Землянов; Андрей Дмитриевич Булыгин (b.a.d@iao.ru).

ментов согласуется с часто используемыми оценками их числа [1, 3].

## Уравнение для функции Вигнера

Стохастическое нелинейное уравнение Шредингера имеет следующий вид:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{2n_0k_0} \nabla_{\perp}^2 + i \frac{k_0'' \partial^2}{\partial t^2} \right\} \tilde{U}(\mathbf{r}, t, z) - i \frac{k_0}{2} (\varepsilon_{NL}(\tilde{I}) + \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}, z)) \tilde{U}(\mathbf{r}, t, z) + \frac{\alpha_{NL}(\tilde{I})}{2} \tilde{U}(\mathbf{r}, t, z) = 0 \quad (1)$$

со случайным начальным условием

$$\tilde{U}(\mathbf{r}, t, z)|_{z=0} = \tilde{U}_0(\mathbf{r}, t).$$

Здесь  $k_0$  — волновое число на центральной частоте излучения  $\omega_0$ ;  $n_0$  — показатель преломления воздуха;  $k_0'' = \partial^2 k / \partial \omega^2|_{\omega=\omega_0}$  — коэффициент при разложении волнового числа  $k \approx k_0 + v_g^{-1}(\omega - \omega_0)^2 + k_0''(\omega - \omega_0)^2/2$ .

В формуле (1) нелинейная диэлектрическая проницаемость представлена в виде суммы:

$$\varepsilon_{NL}(I) = \varepsilon_{ker}(I) + \varepsilon_{pl},$$

где

$$\varepsilon_{ker}(I) = \varepsilon_k I, \quad \varepsilon_{pl}(I) = \eta_{cas} \rho_e(t)/2;$$

$\tilde{\varepsilon}$  — флуктуационная часть диэлектрической проницаемости в атмосфере;  $\alpha_{NL}(I)$  — коэффициент нелинейного поглощения среды (линейными потерями пренебрегается);  $\eta_{cas}$  — скорость каскадной ионизации газа;  $\rho_e(t)$  — концентрация свободных электронов, определяемая из эволюционного уравнения [5–7];  $\varepsilon_{ker}(I)$  — керровская нелинейность кубического типа [9];  $\varepsilon_{pl}$  — диэлектрическая проницаемость плазмы;  $\varepsilon_k$  — коэффициент при нелинейной добавке к  $n_0$ .

Рассмотрим пространственно-временную функцию когерентности — момент второго порядка:

$$\Gamma(z, \bar{t}, \mathbf{R}, \tau, \rho) = \langle \tilde{\psi}(z, \bar{t}, \tau, \rho, \mathbf{R}) \rangle_{\tilde{\varepsilon}, \tilde{U}_0}; \quad (2)$$

$$\tilde{\psi} \equiv \tilde{U}(z, \bar{t} - \tau/2, \mathbf{R} - \rho/2) \tilde{U}^*(z, \bar{t} + \tau/2, \mathbf{R} + \rho/2),$$

где

$$\mathbf{R} = (\mathbf{r} + \mathbf{r}')/2; \quad \rho = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/2;$$

$$\bar{t} = (t + t')/2; \quad \tau = (t - t')/2;$$

$(r, t)$  и  $(r', t')$  — две произвольные точки пространства времени.

Дифференцируя (2) по  $z$  с учетом (1), найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \Gamma(z, \bar{t}, \mathbf{R}, \tau, \rho) &= i \left( \frac{1}{n_0 k_0} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \mathbf{R}} - \frac{2k_0'' \partial^2}{\partial \tau \partial \bar{t}} \right) \Gamma + \\ &+ i k_0 \left\langle \left( \text{sh} \left( \frac{\rho \partial}{2 \partial \mathbf{R}} + \frac{\tau \partial}{2 \partial \bar{t}} \right) \varepsilon_{NL}(\tilde{I}(z, \bar{t}, \mathbf{R})) \right) \tilde{\psi} \right\rangle + \\ &+ i k_0 \left\langle \left( \text{sh} \left( \frac{\rho \partial}{2 \partial \mathbf{R}} + \frac{\tau \partial}{2 \partial \bar{t}} \right) \tilde{\varepsilon}(z, \bar{t}, \mathbf{R}) \right) \tilde{\psi} \right\rangle + \\ &+ \left\langle \left( \text{ch} \left( \frac{\rho \partial}{2 \partial \mathbf{R}} + \frac{\tau \partial}{2 \partial \bar{t}} \right) \alpha_{NL}[\tilde{I}(z, \bar{t}, \mathbf{R})] \right) \tilde{\psi} \right\rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

Выделим из двухточечной функции поля  $\tilde{\psi}$  регулярную часть — функцию когерентности  $\Gamma$  и флуктуационную — функцию случайного возмущения  $\delta\tilde{\psi}$ :

$$\delta\tilde{\psi} \equiv \tilde{\psi} - \Gamma \rightarrow \tilde{I} = \langle \tilde{I} \rangle + \delta\tilde{I}.$$

Тогда (3) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \Gamma(z, \bar{t}, \mathbf{R}, \tau, \rho) &= i \left( \frac{1}{n_0 k_0} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \mathbf{R}} - \frac{2k_0'' \partial^2}{\partial \tau \partial \bar{t}} \right) \Gamma + \\ &+ i k_0 \varepsilon_k \left\langle \text{sh} \left( \frac{\rho \partial}{2 \partial \mathbf{R}} + \frac{\tau \partial}{2 \partial \bar{t}} \right) \langle \tilde{I} \rangle \right\rangle \Gamma + i k_0 \varepsilon_k \left\langle \left( \text{sh} \left( \frac{\rho \partial}{2 \partial \mathbf{R}} + \frac{\tau \partial}{2 \partial \bar{t}} \right) \delta\tilde{I} \right) \delta\tilde{\psi} \right\rangle + \\ &+ i k_0 \left\langle \left( \text{sh} \left( \frac{\rho \partial}{2 \partial \mathbf{R}} + \frac{\tau \partial}{2 \partial \bar{t}} \right) \tilde{\varepsilon} \right) \delta\tilde{\psi} \right\rangle + i k_0 \left\langle \left( \text{sh} \left( \frac{\rho \partial}{2 \partial \mathbf{R}} + \frac{\tau \partial}{2 \partial \bar{t}} \right) \varepsilon_{pl}(\tilde{I}) \right) \tilde{\psi} \right\rangle + \\ &+ \left\langle \left( \text{ch} \left( \frac{\rho \partial}{2 \partial \mathbf{R}} + \frac{\tau \partial}{2 \partial \bar{t}} \right) \alpha_{NL}(\tilde{I}) \right) \tilde{\psi} \right\rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Перейдем с помощью процедуры Фурье-преобразования, обозначаемого в дальнейшем символом  $\hat{F}$ , к спектральной плотности функции Вигнера (функции яркости), определенной следующим образом:

$$\begin{aligned} J_{\omega}[z, \bar{t}, \mathbf{n}, \omega, k(\omega)] &= \frac{c \sqrt{\varepsilon_0}}{8\pi} \hat{F}(\Gamma) \equiv \\ &\equiv \frac{c \sqrt{\varepsilon_0}}{8\pi} (2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho e^{-k\rho\mathbf{n}} \Gamma(z, \bar{t}, \mathbf{R}, \tau, \rho), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\varepsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость воздуха;  $\mathbf{n}$  — единичный вектор.

Пусть  $I \equiv \langle \tilde{I} \rangle$  имеет достаточно гладкий пространственно-временной профиль, тогда можно пренебречь высшими производными в (4) по  $\mathbf{R}$  и  $\bar{t}$ . Отсюда

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial z} + \left( \frac{k}{n_0 k_0} \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + \omega \frac{2k_0'' \partial}{\partial \bar{t}} \right) + \frac{k_0 \varepsilon_k}{2k} \frac{\partial I}{\partial \mathbf{R}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} + \frac{k_0 \varepsilon_k}{2} \frac{\partial I}{\partial \bar{t}} \frac{\partial}{\partial \omega} \right] J_{\omega} = \\ = \frac{c \sqrt{\varepsilon_0}}{8\pi} \hat{F} \left[ i k_0 \varepsilon_{ker} \left\langle \left( \text{sh} \left( \frac{\rho \partial}{2 \partial \mathbf{R}} + \frac{\tau \partial}{2 \partial \bar{t}} \right) \delta\tilde{I} \right) \delta\tilde{\psi} \right\rangle + \right. \\ \left. + i k_0 \left\langle \left( \text{sh} \left( \frac{\rho \partial}{2 \partial \mathbf{R}} + \frac{\tau \partial}{2 \partial \bar{t}} \right) \tilde{\varepsilon} \right) \delta\tilde{\psi} \right\rangle + \right. \\ \left. + i k_0 \left\langle \left( \text{sh} \left( \frac{\rho \partial}{2 \partial \mathbf{R}} + \frac{\tau \partial}{2 \partial \bar{t}} \right) \varepsilon_{pl}(\tilde{I}) \right) \tilde{\psi} \right\rangle + \right. \\ \left. + \left\langle \left( \text{ch} \left( \frac{\rho \partial}{2 \partial \mathbf{R}} + \frac{\tau \partial}{2 \partial \bar{t}} \right) \alpha_{NL}(\tilde{I}) \right) \tilde{\psi} \right\rangle \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Далее перейдем от  $J_{\omega}$  к функции Вигнера

$J = \int_{-\infty}^{\infty} J_{\omega} d\omega$  и, пренебрегая дисперсией, получим уравнение для  $J$ :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{n_0} \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \varepsilon_{ker}(I) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \right] J = D + U + F. \quad (7)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$D \equiv \frac{c\sqrt{\varepsilon_0}}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F} \left[ ik_0 \left\langle \left[ \operatorname{sh} \left( \frac{\rho \partial}{2\partial \mathbf{R}} + \frac{\tau \partial}{2\partial t} \right) \right] \tilde{\varepsilon} \right\rangle \delta \tilde{\psi} \right] d\omega; \quad (8a)$$

$$U \equiv \frac{c\sqrt{\varepsilon_0}}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F} \left( ik_0 \varepsilon_{\text{ker}} \left\langle \left[ \operatorname{sh} \left( \frac{\rho \partial}{2\partial \mathbf{R}} + \frac{\tau \partial}{2\partial t} \right) \right] \delta \tilde{I} \right\rangle \delta \tilde{\psi} \right) d\omega; \quad (8b)$$

$$F \equiv \frac{c\sqrt{\varepsilon_0}}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F} \left( ik_0 \left\langle \left[ \operatorname{sh} \left( \frac{\rho \partial}{2\partial \mathbf{R}} + \frac{\tau \partial}{2\partial t} \right) \right] \varepsilon_{pl}(\tilde{I}) \right\rangle \tilde{\psi} \right) + \left\langle \left[ \operatorname{ch} \left( \frac{\rho \partial}{2\partial \mathbf{R}} + \frac{\tau \partial}{2\partial t} \right) \right] \alpha_{NL}(\tilde{I}) \right\rangle \tilde{\psi} \right) d\omega. \quad (8в)$$

Функция  $D$  определяет диффузионное распывание лазерного пучка. Функция  $U$  связана с моментами поля четвертого порядка и, в частности, характеризует флуктуации интенсивности, которые приводят к модуляционной неустойчивости лазерного пучка, обеспечивающей самофокусировку неоднородностей с выделенными размерами. И, наконец, функция  $F$  выражается через нелинейные слагаемые, вклад которых является существенным лишь в области локальных фокусов (филаментов), и определяет поглощение в локальном фокусе, его дифракционные и дефокусирующие свойства.

Для дальнейшего рассмотрения примем *приближение локальных, обладающих одинаковыми свойствами фокусов*. В этом случае функция  $F$  представима в следующем виде:

$$F(z, \mathbf{R}, \mathbf{n}, \bar{t}) \approx \langle \tilde{N}(z, \mathbf{R}, \bar{t}) \rangle f(\mathbf{n}). \quad (9)$$

Функция  $f(\mathbf{n})$  находится либо из численного, либо из лабораторного эксперимента и характеризует рассеивающие и поглощающие свойства локального фокуса. Она определяется через функции  $\varepsilon_{pl}$  и  $\alpha_{NL}$  в области максимальной интенсивности светового поля. Величина  $\langle \tilde{N}(z, \mathbf{R}, \bar{t}) \rangle$  представляет собой средние значения концентрации локальных фокусов в каждой точке пространства времени.

## Эволюция эффективных параметров

Далее будем рассматривать следующие эффективные параметры [6]:

коэффициент передачи энергии

$$T_e(z) = \int_{-\infty}^{\infty} I(z, \mathbf{R}, \bar{t}) d\mathbf{R} d\bar{t} / E(0), \quad (10a)$$

где

$$E(0) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} I(0, \mathbf{R}, \bar{t}) d\mathbf{R} d\bar{t};$$

эффективный радиус и угловую расходимость лазерного пучка соответственно:

$$R_{ef}^2(z) \equiv \tilde{R}_e^2(z) / T_e(z); \quad \theta_e^2(z) \equiv \hat{\theta}_e^2(z) / T_e(z), \quad (10б)$$

где

$$\tilde{R}_e^2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} I(z, \mathbf{R}, \bar{t}) \mathbf{R}^2 d\mathbf{R} d\bar{t} / E(0);$$

$$\hat{\theta}_e^2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} J(z, \mathbf{n}, \mathbf{R}, \bar{t}) n^2 d\mathbf{n} d\bar{t} d\mathbf{R} / E(0). \quad (10в)$$

Из уравнения (7) с учетом (8) и (9) для эффективных параметров получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial z} T_e(z) = -\chi \int_{-\infty}^{\infty} \langle \tilde{N} \rangle d\mathbf{R} d\bar{t}, \quad \chi \equiv \chi_0 / E(0), \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{R}_e^2 = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S} \mathbf{R} d\mathbf{R} d\bar{t} / E(0) - \chi \int_{-\infty}^{\infty} \langle \tilde{N} \rangle \mathbf{R}^2 d\mathbf{R} d\bar{t}. \quad (12)$$

Здесь  $\mathbf{S} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} J(z, \mathbf{n}, \mathbf{R}, \bar{t}) \mathbf{n} d\mathbf{n}$  – поперечная составляющая вектора Умова–Пойнтинга;  $\chi_0 \equiv - \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{n}) d\mathbf{n}$  –

коэффициент, характеризующий потери энергии лазерным импульсом за счет поглощения в одном локальном фокусе. Последним слагаемым в (12) будем в дальнейшем из-за его малости пренебрегать. Дифференцируя еще раз (12), найдем

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{R}_e^2 = H + H_U + H_D + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \langle \tilde{N} \rangle \mathbf{R} d\mathbf{R} d\bar{t}, \quad (13)$$

$$\mu \equiv \int \mathbf{n} f(\mathbf{n}) d\mathbf{n} / E(0),$$

где

$$H = 2(\hat{\theta}_e^2 - \hat{\theta}_{\text{ker}}^2); \quad \hat{\theta}_{\text{ker}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{\text{ker}}(I) I d\mathbf{R} d\bar{t} / E(0), \quad (14a)$$

$$H_U = -\varepsilon_k \int_{-\infty}^{\infty} \langle \delta \tilde{I} \delta \tilde{I} \rangle d\mathbf{R} d\bar{t} / E(0), \quad (14б)$$

$$H_D = \frac{c\sqrt{\varepsilon_0}}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \delta \tilde{I} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \delta \tilde{\varepsilon} \right\rangle \mathbf{R} d\mathbf{R} d\bar{t} / E(0).$$

Функция  $H_U$ , характеризующая интегральное влияние флуктуации интенсивности светового поля, достигает своего максимального значения в области множественной филаментации, где она оценивается следующим образом:

$$H_U \approx -(V_f / c) (\varepsilon_k I_f)^3 I_f / \int_{-\infty}^{\infty} \langle N \rangle d\mathbf{R} d\bar{t} / E(0),$$

где  $I_f$  – интенсивность в локальном фокусе;  $V_f$  – объем локального фокуса, много меньший объема лазерного импульса, что выражается следующим соотношением:

$$V_f / t_p c R_{ef}^2 \ll 1; \quad I_f \approx 5 \cdot 10^{13} \text{ Вт/см}^2; \quad \varepsilon_k I_f \approx 1,5 \cdot 10^{-5}.$$

Отсюда легко получить оценку  $|H_U/H(0)| \ll 1$ , что позволяет в уравнении (13) пренебречь  $H_U$ .

Величина  $H_D$  соответствует диффузионному расплыванию лазерного пучка. Будем считать, что длина диффузионного расплывания много меньше длины проявления нелинейных эффектов для мощного лазерного импульса фемтосекундной длительности, что позволяет пренебречь слагаемым  $H_D$ . Для рассматриваемого случая аксиальной симметрии последнее слагаемое в (13) равно нулю. Дифференцируя (14а), найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \hat{\theta}_e^2 = & \int \mathbf{S} \nabla_{\perp} \varepsilon_{\text{ker}}(I) d\mathbf{R} d\bar{t} / E(0) + \gamma' \int_{-\infty}^{\infty} \langle \tilde{N} \rangle d\mathbf{R} d\bar{t} + \\ & + \varepsilon_k \int \langle \nabla_{\perp} \delta S \delta \bar{I} \rangle d\mathbf{R} d\bar{t} / E(0) + \frac{c\sqrt{\varepsilon_0}}{8\pi} \int \langle \nabla_{\perp} \delta S \delta \bar{\varepsilon} \rangle d\mathbf{R} d\bar{t} / E(0), \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{\theta}_{\text{ker}}^2 = \int \mathbf{S} \nabla_{\perp} \varepsilon_{\text{ker}}(I) d\mathbf{R} d\bar{t} / E(0) - \chi \varepsilon_{\text{ker}} \int_{-\infty}^{\infty} I \langle \tilde{N} \rangle d\mathbf{R} d\bar{t}. \quad (15b)$$

Здесь  $\gamma' \equiv \int f(\mathbf{n}) \mathbf{n}^2 d\mathbf{n} / E(0)$  — величина, характеризующая скорость приращения квадрата угловой расходимости лазерного пучка по продольной координате после прохождения одного локального фокуса, которая определяется как дифракционными эффектами при поглощении энергии в локальном фокусе, так и дефокусирующими свойствами в возникающей плазме. Последним слагаемым в (15а), ответственным за диффузионное расплывание, мы будем пренебрегать по уже указанным выше причинам. Третье слагаемое в правой части (15а) можно оценить как  $\chi \varepsilon_k I_f \int \langle N \rangle d\mathbf{R} d\bar{t}$ . Его учет приведет к незначительному переопределению параметра  $\gamma'$ , которое можно не принимать во внимание.

Дальнейшее проведение анализа возможно при некоторых дополнительных предположениях. Например, гипотеза о критической интенсивности: предположим, что при достижении некоторого порогового значения макроскопической интенсивности  $I_{cr}$  реализуется состояние максимальной поперечной неустойчивости, проявляющейся в том, что среднее число фокусов  $\delta N$  в сечении лазерного пучка на единицу площади  $\delta S$  (плотность фокусов) с интенсивностью  $I \geq I_{cr}$  определяется соотношением

$$\delta N / \delta S = (P_{\delta S} / P_{cr}) / \delta S = I / P_{cr},$$

где  $P_{cr} \approx 3,2 \cdot 10^9$  Вт — критическая мощность самофокусировки в воздухе [9].

Естественно, что одиночные филаменты случайным образом будут зарождаться и до достижения критического значения максимальной интенсивности лазерного импульса, однако мы будем пренебрегать влиянием этих единичных событий на

эволюцию эффективных параметров лазерного импульса. И только с той дистанции, когда интенсивность лазерного излучения достигнет критического значения, мы будем считать, что реализуется массовое зарождение филаментов, поэтому именно эту точку трассы мы будем считать началом филаментации. Для качественного анализа будем полагать, что выполняется условие макроскопической (крупномасштабной) гауссовости: макроскопическая интенсивность (усредненная по пространственным масштабам, которые много больше размеров филамента) лазерного пучка в процессе своего распространения сохраняет гауссов профиль с постоянной длительностью  $t_p$ :

$$I(\mathbf{r}, t, z) = I_0(z) \exp(-r^2 / R_e^2 - t^2 / t_p^2).$$

В рамках этих предположений в зоне множественной филаментации  $I_0(z) \geq I_{cr}$  из соотношений (11)–(15) получим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений для  $T_e$ ,  $\hat{\theta}_e^2$  и  $Y_e^2 \equiv \hat{R}_e^2(z) / \hat{R}_e^2(z_{mf})$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial z_R^2} Y_e^2 = 2(\hat{\theta}_e^2 - \hat{\theta}_{\text{ker}}^2) L_R^2 / \hat{R}_e^2(z_{mf}), \\ \frac{\partial}{\partial z_R} \hat{\theta}_e^2 = \frac{\partial}{\partial z_R} [\hat{\theta}_{\text{ker}}^2 + \gamma(1 - T_e)], \\ \frac{\partial}{\partial z_R} T_e(z) = -L_R \chi N(T_e, Y_e^2); \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} N(T_e, Y_e^2) \equiv & \int_{-\infty}^{\infty} \langle N(z, \bar{t}, \mathbf{R}) \rangle d\bar{t} d\mathbf{R} = T_e \left\{ \frac{I_{cr} \hat{R}_e^2(z_{mf}) Y_e^2}{\eta P_{cr} T_e^2} \times \right. \\ & \left. \times \sqrt{\ln \left( \frac{\eta P_{cr} T_e^2}{I_{cr} \hat{R}_e^2(z_{mf}) Y_e^2} \right)} - \text{erf} \left[ \sqrt{\ln \left( \frac{\eta P_{cr} T_e^2}{I_{cr} \hat{R}_e^2(z_{mf}) Y_e^2} \right)} \right] \right\}, \end{aligned}$$

где

$$L_R = k_0 \hat{R}_0^2 / 2; \quad z_R = z / L_R; \quad \gamma = \gamma_0 + \sqrt{8} \varepsilon_k I_{cr}; \quad \eta = P_0 / P_{cr};$$

$z_{mf}$  — координата начала множественной филаментации; параметр  $\gamma_0 \equiv \gamma' / \chi$  найден в работе [7] ( $\gamma_0 \approx 1,3 \cdot 10^{-5}$ );  $P_0$  и  $R_0$  — средние значения мощности и радиуса лазерного пучка соответственно.

Начальные условия для системы (16) на входе в зону филаментации, такие как  $V_{mf} \equiv \partial \hat{R}_e^2 / \partial z$ ,  $z_{mf}$  и  $\hat{R}_e^2(z_{mf})$ , определяются из следующих выражений [9]:

$$\begin{aligned} \hat{R}_e^2(z_{mf}) = & \hat{R}_0^2 \left[ \left( 1 - \frac{\eta}{b} \right) \left( \frac{z_{mf}}{2L_R} \right)^2 + \left( 1 + \frac{V_0 z_{mf}}{2} \right)^2 \right], \quad b = 1,62; \\ H_0 = & (1 - \eta/b) \frac{2}{\hat{R}_0^2 k_0^2} + \frac{1}{2} \hat{R}_0^2 V_0^2, \quad V_0 \equiv \partial \hat{R}_e^2 / \partial z \Big|_{z=0}. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь  $H_0$  — так называемая функция Гамильтона лазерного пучка в керровской среде [9];  $V_0$  соответствует начальной кривизне фазового фронта.

В приближении гауссова профиля интенсивности лазерного импульса найдем точку  $z_{mf}$  филаментации из условия достижения максимальной интенсивности лазерного пучка  $I(z)$  критического значения интенсивности  $I_{cr}$ :

$$I(z_{mf}) = E(0)^2 / \hat{R}_e^2(z_{mf}) = I_{cr}, \quad (18a)$$

тогда

$$V_{mf} = V_0 + H_0 z_{mf}. \quad (18b)$$

Решение уравнения (16) с начальными условиями, определенными из (17), (18), легко находится численным расчетом. Параметры модели  $I_{cr} \approx 2,5 \cdot 10^{12}$  Вт/см<sup>2</sup> и  $\chi \approx 0,64 \cdot 10^{-4}$  Дж были определены из сравнения с результатами численного расчета для лазерного пучка радиусом  $R_0 = 2$  мм и начальной мощностью  $\eta \equiv P_0/P_{cr} = 88$  в режиме множественной филаментации [1] по началу и окончанию множественной филаментации (рис. 1).

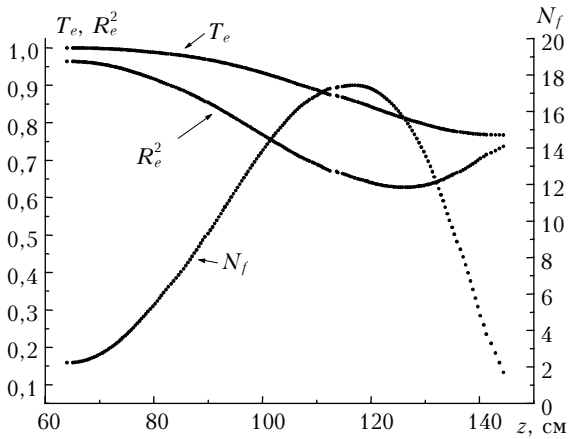


Рис. 1 Зависимость коэффициента передачи энергии  $T_e$ , нормированного начального значения квадрата эффективного радиуса  $R_e^2$ , а также числа филаментов  $N_f$  вдоль трассы от дистанции распространения при  $R_0 = 2$  мм и  $P_0 = 88P_{cr}$

Определим среднее число филаментов  $N_f$  через плотность фокусов в центральном временном срезе лазерного импульса:  $N_f(z) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} N(\mathbf{R}, 0, z) d\mathbf{R}$ , тогда в гауссовом приближении найдем  $N_f = \eta(T_e - Y_e^2/T)$ .

Как видно из рис. 1, 2, полученное распределение филаментов вдоль трассы распространения согласуется с используемой оценкой числа филаментов как  $N_f \approx P_0/P_f$ , где  $P_f \approx (3-5)P_{cr}$  [1], что свидетельствует об адекватности предлагаемой модели множественной филаментации.

На рис. 2 представлен коэффициент распространения  $M^2$  [6, 7] после прохождения глобального фокуса в зависимости от начальной мощности. На рис. 3 для сравнения одиночного и множественного режимов филаментации приведены зависимости длины филаментации  $L_f$ , функции  $T_e$ , а также величины радиуса перетяжки  $R_w^2$ .

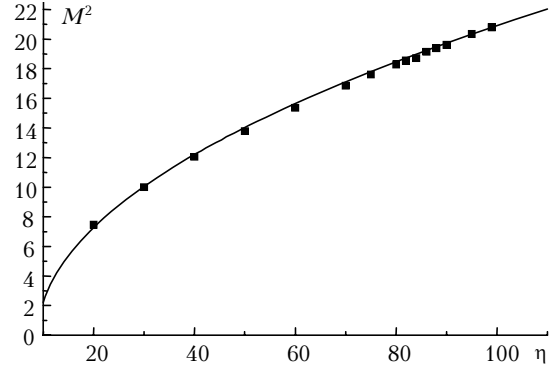


Рис. 2. Зависимость коэффициента распространения после прохождения глобального фокуса от  $\eta = P_0/P_{cr}$  для режима множественной филаментации при  $R_0 = 2$  мм. Квадратиками обозначены результаты, полученные методом численного решения системы уравнений (18). Сплошная кривая построена по формуле (21)

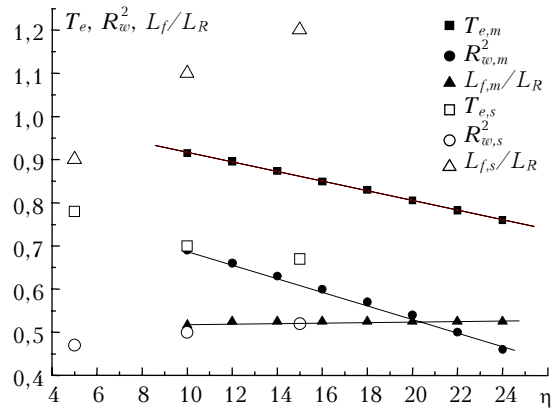


Рис. 3. Зависимость коэффициента передачи энергии  $T_e$ , эффективного значения нормированного на  $R_0^2$  квадрата радиуса перетяжки  $R_w^2$  и длины филаментации  $L_f/L_R$ , нормированной на длину Релея, от  $\eta = P_0/P_c$  для режима множественной филаментации (для наглядности через точки, полученные из численного эксперимента, проведены прямые) и одиночной филаментации при  $R_0 = 1$  мм. Соответствующие величины помечены индексами  $m$  и  $s$

На рис. 4 представлена зависимость коэффициента распространения для режима одиночной  $M_s^2$  и множественной  $M_m^2$  филаментации, построенная по аппроксимационным формулам (19):

$$M_s^2(\eta, R_0^2) = 2\sqrt{H_0/(L_R k_0) + C_s(R_0)\eta}, \quad (19a)$$

$$M_m^2(\eta, R_0^2) = 2\sqrt{H_0/(L_R k_0) + (C_m\eta - \beta R_0^2)}, \quad (19b)$$

где  $C_s|_{R_0=1\text{мм}} \approx 4$ ;  $C_m \approx 9$ ;  $\beta \approx 4 \text{ мм}^{-2}$  — введенные эмпирические константы, характеризующие зависимость приращения квадрата угловой расходимости после прохождения нелинейного слоя от величины  $\eta$ . Заметим, что формула (19b) верна лишь при условии  $\eta C_m \gg \beta R_0^2$  — это ограничение есть следствие используемого приближения гауссова профиля интенсивности лазерного импульса.

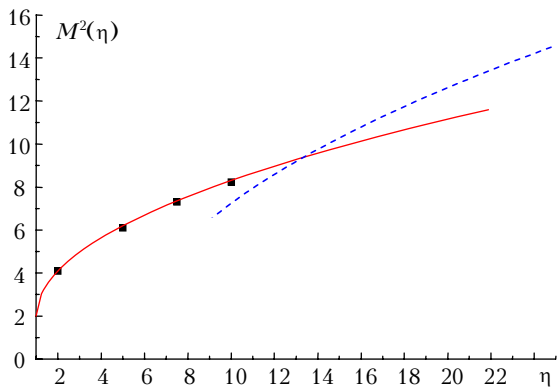


Рис. 4. Зависимость коэффициента распространения после прохождения точки глобального фокуса от  $\eta = P_0/P_{cr}$  для режима одиночной (сплошная кривая) и множественной филаментации (штриховая кривая) при  $R_0 = 1$  мм

Из рис. 3 следует, что с увеличением  $\eta = P_0/P_{cr}$  радиус перетяжки убывает линейным образом с дистанцией, в то время как длина филаментации увеличивается, а коэффициент передачи энергии уменьшается.

### Заключение

На основе СНУШ, в рамках феноменологического подхода с использованием многофокусной модели филаментации, для описания распространения мощного фемтосекундного лазерного импульса в режиме оптической турбулентности предложено уравнение для функции Вигнера (7). Из сформулированных соотношений для функции Вигнера были получены уравнения для эффективных параметров лазерного пучка, исследованных с использованием гипотезы о критической интенсивности для режима оптической турбулентности в приближении гауссова профиля интенсивности (16). Полученное распределение филаментов из численного решения уравнения (18), (19) вдоль трассы распространения согласуется с часто используемой оценкой числа филаментов как  $N_f \approx P_0/P_f$ , где  $P_f \approx (3-5)P_{cr}$ , что свидетельствует об адекватности модели и используемых приближений. В частности, о справедливости гипотезы о существовании критической интенсивности для режима оптической турбулентности, достигающей  $2,5 \cdot 10^{12}$  Вт/см<sup>2</sup>.

*A.A. Zemlyanov, A.D. Bulygin. Effective radius of a femtosecond laser radiation under its self-influence in a gas medium in regime of multiple filamentation.*

On bases of a stochastic non-linear Schrödinger equation (SNLS) and a many-focusing model, the equation for a Wigner function was suggested for describe of a propagation powerful femtosecond laser impulse in the a optical turbulent regime in a phenomenological framework. Using this equation for the Wigner function equation far the effective parameters was founded and investigated in the Gaussian approximation for laser intensity.

Установлено, что закономерности в эволюции эффективных параметров в режиме множественной и одиночной филаментации имеют качественное подобие [6]. В частности, установлена линейная зависимость квадрата коэффициента распространения после прохождения глобального фокуса от начальной мощности лазерного импульса (19).

Работа выполнена при финансовой поддержке комплексного интеграционного проекта 3.13, гранта РФФИ № 06-05-64799.

1. Skupin S., Berge L., Peschel U., Lederer F., Mejean G., Yu J., Kasparian J., Salmon E., Wolf J.P., Rodriguez M., Woste L., Bourayou R., Sauerbrey R. Filamentation of femtosecond light pulses in the air: Turbulent cells versus long-range clusters // Phys. Rev. E. 2004. V. 70. P. 046602-1–046602-15.
2. Bejot P., Bonacina L., Extermann J., Moret M., Wolf J.P., Ackermann R., Lascoux N., Salame R., Kasparian J., Berge L., Champeaux S., Guet C., Blanchot N., Mazataud E., Mennerat G., Patisson L., Prevot V., Raffestin D., Ribolzi J. 32 TW atmospheric white-light laser // Appl. Phys. Lett. 2007. V. 90. P. 151106-1–151106-3.
3. Mlejnek M., Kolesik M., Moloney J.V., Wright E.M. Optically turbulent femtosecond lightguide in Air // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 2938–2941.
4. Robinson P.A. Nonlinear wave collapse and strong turbulence // Rev. of Mod. Phys. 1997. V. 69. N 2. P. 507–573.
5. Шленов С.А., Федоров В.Ю., Кандидов В.П. Филаментация фазово-модулированного фемтосекундного лазерного импульса на километровых трассах в турбулентной атмосфере // Оптика атмосфер. и океана. 2007. Т. 20. № 4. С. 308–318.
6. Землянов А.А., Гейнц Ю.Э. Интегральные параметры мощного фемтосекундного лазерного излучения при филаментации в воздухе // Оптика атмосфер. и океана. 2005. Т. 18. № 7. С. 574–579.
7. Бulyгин А.Д., Землянов А.А., Гейнц Ю.Э. Эволюция эффективного радиуса лазерного пучка фемтосекундной длительности после его глобальной самофокусировки в воздухе // Оптика атмосфер. и океана. 2007. Т. 20. № 11. С. 973–979.
8. Lugovoi V.N., Prokhorov A.M. A possible explanation of the small-scale self-focusing filaments // JETP. Lett. 1968. V. 7. N 5. P. 117–119.
9. Власов С.Н., Таланов В.И. Самофокусировка волн. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1997. 220 с.