<Оптика атмосферы и океана>, **6**, №12 (1993)

УДК 535.211:533.6

**Б.В. Фортес**

# ЛИНЗОВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В РАСЧЕТАХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПАРАКСИАЛЬНЫХ КОГЕРЕНТНЫХ ПУЧКОВ

Рассматривается теория так называемого <линзового> преобразования, известного также как преобразование координат Таланова, которое позволяет выполнять численное моделирование распространения фокусированных пучков на очень коротких трассах и коллимированных пучков на очень длинных трассах, сводя задачу распространения исходного пучка к задаче распространения эквивалентного пучка с другой начальной кривизной волнового фронта. Выводится формула для пересчета поля показателя преломления на исходной трассе в поле показателя преломления на трассе эквивалентного пучка. Полученная формула используется для пересчета параметров среды в задаче нестационарного теплового самовоздействия.

## 1. Введение

Метод численного моделирования является удобным инструментом исследования нелинейных эффектов, возникающих при транспортировке мощного излучения в атмосфере и других средах. Однако производительность современных компьютеров ограничивает диапазон трасс, для которых можно провести расчеты с приемлемыми затратами времени. Эти ограничения связаны с большим диапазоном изменения размера пучка и с высокочастотными пространственными осцилляциями комплексной амплитуды оптической волны. Первый фактор проявляется по мере распространения пучка и характерен в большей степени для коллимированных пучков. Второй – характерен для фокусированных пучков при большом числе Френеля излучающей апертуры и проявляется в самом начале процедуры численного решения, хотя может маскироваться дефокусирующим влиянием неоднородной среды.

Линзовое преобразование, известное также как преобразование координат Таланова, позволяет в некоторой степени расширить диапазон решаемых задач, сводя задачу распространения исходного пучка к задаче распространения эквивалентного пучка с другой начальной кривизной волнового фронта. В работе В.И. Таланова [1] было показано, что неоднородное параболическое уравнение, описывающее распространение параксиального пучка в среде с квадратичным эффектом Керра, инвариантно относительно замены переменных, устанавливающих связь между комплексными амплитудами пучков, сфокусированных линзами с разным фокусным расстоянием. Отмечалось также, что это преобразование применимо для некоторых других механизмов нелинейности, в том числе и для ограниченного круга нестационарных задач. К счастью, при численном решении задачи распространения инвариантность исходного уравнения или системы уравнений, описывающих распространение пучка, не является обязательной. Поэтому преобразование Таланова можно применять к широкому кругу задач, пересчитывая зависимости параметров среды от продольной координаты таким образом, чтобы сохранить однозначную связь между исходным и эквивалентным пучками.

Уоллес [3] использовал этот метод для решения задачи стационарного теплового самовоздействия с учетом эффекта кинетического охлаждения. Бредли и Херрманн [2] использовали координатную систему, в которой гауссов пучок, распространяющийся в вакууме, сохраняет постоянный размер и фазу в задаче теплового самовоздействия непрерывного и импульсного излучений. Позднее Сиклаш и Сигмен [4] показали, что линзовое преобразование является одним из предельных случаев более общего комплексного преобразования координат.

Флек с авторами [5] использовали преобразование Таланова для расчета сложной нестационарной задачи теплового самовоздействия, учитывающей эффекты околозвукового сканирования пучком, вынужденной и свободной конвекции а также атмосферную турбулентность. Там же была предложена более общая форма преобразования, отличающаяся тем, что кривизна волнового фронта по поперечным координатам $x$ и $y$ преобразуется независимо. Однако в [5] преобразование Таланова применяется не к исходной системе уравнений, а к дифракционным шагам численной схемы, так что после каждого дифракционного шага в численной схеме метода расщепления выполняется <обратное> преобразование и уравнение теплопереноса решается для исходного, а не для эквивалентного пучка. В опубликованной недавно работе Устинова [6] преобразование Таланова обобщено на случай стационарного теплового самовоздействия, в том числе и на случай околозвукового сканирования.

Цель данной статьи – обобщить преобразование Таланова на случай нестационарного теплового самовоздействия. Задача полностью решается для эквивалентного пучка как на дифракционных шагах, так и между ними. Конечно, можно было, как и в [5], применять линзовое преобразование только к дифракционным шагам численной схемы, однако в интересовавшей нас задаче теплового самовоздействия на вертикальных и наклонных атмосферных трассах мы использовали переменные (увеличивающиеся) шаги интегрирования по продольной координате. Они выбирались таким образом, чтобы каждому шагу соответствовали примерно одинаковые фазовые искажения. Для выполнения этого условия нужно знать профиль параметра теплового самовоздействия для эквивалентного, а не для исходного пучка.

Кроме того, нас интересовала возможность обобщения преобразования Таланова на более широкий круг задач. Поэтому сначала мы получили формулу преобразования для произвольного распределения показателя преломления в линейном случае (чего в явном виде нет ни в одной из упомянутых работ), а затем получили формулы для преобразования профилей атмосферных параметров. Отделив, таким образом, оптическую часть задачи от материального уравнения, мы получили возможность работать только с материальным уравнением, что упрощает задачу обобщения преобразования на другие режимы теплового самовоздействия и другие механизмы нелинейности.

## 2. Формула для произвольной линейной среды

Рассмотрим параксиальный пучок с линейной поляризацией векторов электромагнитного поля. Распространение комплексной амплитуды $U(\rho, z)$ в направлении оси $OZ$ в вакууме описывается параболическим волновым уравнением:

$$2\, i\, k \frac{\partial U}{\partial z} = \Delta_{\perp} U\,, \tag{1}$$

где $k$=$2\pi/\lambda$ – волновое число; $\lambda$ – длина волны; $\Delta_{\perp} U = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ –лапласиан по поперечным координатам. Интегрируя это уравнение с помощью метода Фурье-преобразования или метода функции Грина, получаем известный интеграл свертки:

$$U(\rho, z) = \frac{i}{\lambda z} \int\!\!\int d^2\rho'\, U_0(\rho') \exp\left\{-\frac{i}{2}\frac{k}{z}(\rho - \rho')^2\right\}. \tag{2}$$

Рассмотрим две оптические системы с тонкими собирающими линзами в плоскости $z = 0$ с фокусными расстояниями $f_1$ и $f_2$ соответственно. Пусть на входной зрачок каждой из этих систем падает волна с комплексной амплитудой $U_0(\rho)$. Тогда на расстоянии $z_1$ от плоскости входного зрачка первой оптической системы имеем

$$U_1(\rho, z_1) = \frac{i}{\lambda z_1} \exp\left\{-\frac{i\,k}{2\,z_1}\rho^2\right\} \int\!\!\int d^2\rho'\, U_0(\rho') \exp\left\{ i\frac{k}{z_1}\rho\,\rho'\right\} \exp\left\{\frac{i\,k}{2}\rho'^2\left(\frac{1}{f_1}-\frac{1}{z_1}\right)\right\}. \tag{3}$$

Здесь мы учли, что прохождение волны через тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием $f_1$ соответствует умножению комплексной амплитуды на фазовый множитель

$$\exp\left\{(i/2)\,\rho'^2\,(k/f_1)\right\}.$$

Аналогично для второй оптической системы

$$U_2(\rho, z_2) = \frac{i}{\lambda z_2} \exp\left\{-\frac{i\,k}{2\,z_2}\rho^2\right\} \int\!\!\int d^2\rho'\, U_0(\rho') \exp\left\{ i\frac{k}{z_2}\rho\,\rho'\right\} \exp\left\{\frac{i\,k}{2}\rho'^2\left(\frac{1}{f_2}-\frac{1}{z_2}\right)\right\}. \tag{4}$$

В частном случае, когда $z_1 = f_1$ и $z_2 = f_2$, из (3), (4) легко получить связь между распределениями комплексных амплитуд $U_1$ и $U_2$:

$$U_2(\rho, f_2) = U_1\left(\rho\frac{f_1}{f_2},\, f_1\right)\frac{f_1}{f_2}\exp\left\{-\frac{i}{2}\,\rho^2 k\left(\frac{1}{f_2}-\frac{1}{f_1}\right)\right\}. \qquad (5)$$

Из (5) следует формула для интенсивностей:

$$I_2(\rho,\, f_2) = (f_1/f_2)^2\, I_1\,(\rho\, f_1/f_2,\, f_1)\,. \qquad (6)$$

Таким образом, видно, что распределения амплитуд отличаются множителем и масштабом, а фазовые фронты отличаются квадратичным фазовым набегом, пропорциональным разнице оптических сил линз, т.е. $1/f_2 - 1/f_1$. В общем случае, когда $z_1 \neq f_1$ и $z_2 \neq f_2$, выразить одно поле через другое удается, если выполняется соотношение

$$1/f_1 - 1/z_1 = 1/f_2 - 1/z_2\,. \qquad (7)$$

Обозначив $\delta = 1/f_2 - 1/f_1$, получаем

$$z_1 = z_2/(1 - \delta\, z_2)\,; \qquad (8)$$

$$z_2 = z_1/(1 + \delta\, z_1)\,. \qquad (9)$$

Если $z_1$ и $z_2$ удовлетворяют соотношениям (8), (9), то из (3), (4) получаем

$$U_2(\rho, z_2) = \frac{1}{1-\delta\, z_2}\, U_1\left(\frac{\rho}{1-\delta\, z_2},\, z_1\right)\exp\left\{\frac{i\,k}{2}\,\rho^2\,\frac{\delta}{1-\delta\ \ z_2}\right\}. \qquad (10)$$

Подставляя (8) в (10) и опуская нижний индекс у $z$, имеем

$$U_2(\rho, z) = \frac{1}{1-\delta\, z}\, U_1\left(\frac{\rho}{1-\delta\, z},\, \frac{z}{1-\delta\, z}\right)\exp\left\{\frac{i\,k}{2}\,\rho^2\,\frac{\delta}{1-\delta\ \ z}\right\} \qquad (11)$$

и аналогично

$$U_1(\rho, z) = \frac{1}{1+\delta\, z}\, U_2\left(\frac{\rho}{1+\delta\, z},\, \frac{z}{1+\delta\, z}\right)\exp\left\{\frac{i\,k}{2}\,\rho^2\,\frac{-\delta}{1+\delta\ \ z}\right\}. \qquad (12)$$

Таким образом, мы видим, что поля, отличающиеся в плоскости $z = 0$ квадратичным фазовым множителем $\exp\{(i/2)\, k\, \delta\, \rho^2\}$, при дифракции в вакууме или оптической однородной среде связаны соотношениями (11), (12), позволяющими выразить одно поле через другое в сечениях, удовлетворяющих соотношению (6).

В оптически неоднородной среде, когда показатель преломления является функцией координат, распространение комплексной амплитуды поля описывается неоднородным уравнением

$$2\,i\,k\,\frac{\partial U}{\partial z} = \Delta_\perp U + 2\,k^2\,\tilde{n}(\rho, z)\,U\,, \qquad (13)$$

где $\tilde{n}(\rho, z) = n(\rho, z) - 1 \ll 1$.

Пусть

$$U_1(\rho, z) = U_0(\rho, z) \qquad (14)$$

$$U_2(\rho, z) = U_0(\rho, z)\,\exp\left\{\frac{i}{2}\,k\,\delta\,\rho^2\right\}. \qquad (15)$$

Тогда при распространении в вакууме поля $U_1$ и $U_2$ связаны соотношениями (11), (12).

Пусть поле $U_1$ распространяется в среде с показателем преломления $n_1(\rho, z)$. Попытаемся найти такое распределение показателя преломления $n_2(\rho, z)$, что при распространении поля $U_2$

по трассе с таким распределением показателя преломления соотношения (11), (12), полученные для оптически однородной среды, оставались бы справедливыми.

Итак, пусть две функции $U_1$ и $U_2$, определенные в полупространстве $z > 0$, связаны соотношением (11), причем функция $U_1(\rho, z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$2\,i\,k\,(\partial U_1/\partial z) = \Delta_\perp U_1 + 2\,k^2\,\tilde{n}_1(\rho, z)\,U_1\,. \tag{16}$$

Требуется найти такую функцию $\tilde{n}_2(\rho, z)$, что $U_2$ удовлетворяет уравнению

$$2\,i\,k\,(\partial U_2/\partial z) = \Delta_\perp U_2 + \tilde{n}_2(\rho, z)\,U_2\,. \tag{17}$$

Перепишем (16)–(17) в следующем виде:

$$2\,k^2\,\tilde{n}_2(\mathbf{r})\,U_2(\mathbf{r}) = 2\,i\,k\,U'_{2z}(\mathbf{r}) - U''_{2xx}(\mathbf{r}) - U''_{2yy}(\mathbf{r})\,; \tag{18}$$

$$2\,k^2\,\tilde{n}_1(\mathbf{r})\,U_1(\mathbf{r}) = 2\,i\,k\,U'_{1z}(\mathbf{r}) - U''_{1xx}(\mathbf{r}) - U''_{1yy}(\mathbf{r})\,, \tag{19}$$

где $\mathbf{r} = (\rho, z) = (x, y, z)$. Последнюю формулу можно переписать в виде

$$2\,k^2\,\tilde{n}_1\left(\frac{\mathbf{r}}{1-\delta\,z}\right) = 2\,i\,k\,U'_{1z}\left(\frac{\mathbf{r}}{1-\delta\,z}\right) - U''_{1xx}\left(\frac{\mathbf{r}}{1-\delta\,z}\right) - U''_{1yy}\left(\frac{\mathbf{r}}{1-\delta\,z}\right). \tag{20}$$

Поделив (18) на (20) и опуская знак ~ у $n_{1,2}$, получаем:

$$\frac{n_2(\mathbf{r})}{n_1(\mathbf{r}/(1-\delta\,z))} = \frac{U_1(\mathbf{r}/(1-\delta\,z))}{U_2(\mathbf{r})}\,\frac{2\,i\,k\,U'_{2z}(\mathbf{r}) - U''_{2\,xx}(\mathbf{r}) - U''_{2yy}(\mathbf{r})}{2\,i\,k\,U'_{1z}(\mathbf{r}/(1-\delta\,z)) - U''_{1xx}(\mathbf{r}/(1-\delta\,z)) - U''_{1yy}(\mathbf{r}/(1-\delta\,z))}\,. \tag{21}$$

Первая дробь в правой части легко вычисляется из формулы (11):

$$\frac{U_1(\mathbf{r}/(1-\delta\,z))}{U_2(\mathbf{r})} = (1-\delta\,z)\,\exp\left\{-\frac{i\,k}{2}\,\rho^2\,\frac{\delta}{1-\delta\,z}\right\}. \tag{22}$$

Чтобы вычислить вторую дробь, продифференцируем (11) по $\partial\,z$, $\partial^2 x$, $\partial^2 y$. Комбинируя результаты дифференцирования, имеем

$$2\,i\,k\,U'_{2z}(\mathbf{r}) - U''_{2\,xx}(\mathbf{r}) - U''_{2yy}(\mathbf{r}) = \exp\left\{\frac{i\,k}{2}\,\rho^2\,\frac{\delta}{1-\delta\,z}\right\}\frac{1}{(1-\delta\,z)^3}\left[2\,i\,k\,U'_{1z}\left(\frac{\mathbf{r}}{1-\delta\,z}\right) - U''_{1\,xx}\left(\frac{\mathbf{r}}{1-\delta\,z}\right) - U''_{1yy}\left(\frac{\mathbf{r}}{1-\delta\,z}\right)\right] \tag{23}$$

и видим, что вторая дробь в правой части (21) равна

$$\exp\left\{\frac{i\,k}{2}\,\rho^2\,\frac{\delta}{1-\delta\,z}\right\}\frac{1}{(1-\delta\,z)^3}\,. \tag{24}$$

Подставляя (22) и (24) в (21), получаем

$$n_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{(1-\delta\,z)^2}\,n_1\left(\frac{\mathbf{r}}{1-\delta\,z}\right). \tag{25}$$

**3. Обобщение преобразования на случай нестационарного теплового самовоздействия на неоднородной трассе**

Запишем нестационарное уравнение теплопереноса для поглощающей среды, перемещающейся со скоростью $V(z)$, имеющей коэффициент поглощения $\alpha(z)$, плотность $\rho(z)$, теплоемкость $C_P(z)$ и теплопроводность $\chi(z)$, умножив его предварительно на производную показателя преломления по температуре $n'_T(z)$, так что уравнение запишется сразу для показателя преломления $n(\mathbf{r}, t) = n'_T(z)\, T(\mathbf{r}, t)$:

$$n'_t(\mathbf{r}, t) + \mathbf{V}(z)\, \nabla n(\mathbf{r}, t) + \chi(z)\, \Delta_\perp n(\mathbf{r}, t) = q(z)\, I(\mathbf{r}, t)\,, \tag{26}$$

где $\Delta_\perp$ – лапласиан по поперечным координатам $x$ и $y$, $q = \alpha\ n'_T/\rho\ C_P$; $I(\mathbf{r}, t)$ – интенсивность излучения; $t$ – время.

Мы хотим получить связь между профилями параметров $\mathbf{V}_1$, $\chi_1$, $q_1$ исходной трассы и соответствующими профилями $\mathbf{V}_2$, $\chi_2$, $q_2$ трассы эквивалентного пучка. Для этого поделим уравнение для $n_1$, записанное в точке $\mathbf{r}/(1–\delta z)$, на уравнение для $n_2$ в точке $\mathbf{r}$ и учтем, что $I_1[\mathbf{r}/(1-\delta z), t]/I_2(\mathbf{r}, t) = (1-\delta z)^2$. Частные производные функции $n_1$ в точке $\mathbf{r}/(1-\delta z)$ выразим через частные производные функции $n_2$ в точке $\mathbf{r}$, дифференцируя формулу (25), записанную в виде $n_1[\mathbf{r}/(1-\delta z), t] = (1-\delta z)^2 n_2(\mathbf{r}, t)$. Потребуем также, чтобы зависимость от времени $t$ у $n_1$ и $n_2$ была одинаковой. Опуская промежуточные вычисления и сокращая $(1-\delta z)^2$ с обеих сторон, получаем

$$\frac{n'_{2\,t}+(1-\delta z)\,\mathbf{V}_1\!\left(\dfrac{z}{1-\delta z}\right)\nabla n_2+(1-\delta z)^2\,\chi_1\!\left(\dfrac{z}{1-\delta z}\right)\Delta_\perp n_2}{n'_{2\,t}+\mathbf{V}_2(z)\,\nabla n_2+\chi_2(z)\,\Delta_\perp n_2}=\frac{q_1\!\left(\dfrac{z}{1-\delta z}\right)}{q_2(z)}\,, \tag{27}$$

где аргументы $\mathbf{r}$ и $t$ у $n_2\,(\mathbf{r}, t)$ для краткости опущены. Видно, что условие (27) удовлетворяется при следующем соотношении между параметрами исходной и эквивалентной трасс:

$$q_2(z) = q_1\left(\frac{z}{1-\delta z}\right); \tag{28}$$

$$\mathbf{V}_2(z) = (1-\delta z)\, \mathbf{V}_1\left(\frac{z}{1-\delta z}\right); \tag{29}$$

$$\chi_2(z) = (1-\delta z)^2\, \chi_1\left(\frac{z}{1-\delta z}\right). \tag{30}$$

При отсутствии теплопроводности и ветра на трассе и при условии, что параметр $q_1$ не зависит от продольной координаты (однородная трасса), эти уравнения являются инвариантными относительно рассматриваемого преобразования, что соответствует результатам, полученным В.И. Талановым [1].

## 4. Заключение

Полученная в данной статье формула линзового преобразования для произвольной линейной среды позволяет обобщить это преобразование на задачи со сложным механизмом нелинейности, что продемонстрировано на примере нестационарного теплового самовоздействия для неоднородной трассы с учетом теплопроводности среды. Другим возможным применением является обобщение на случайно-неоднородную среду, такую как турбулентная атмосфера. Решением этой задачи являются формулы преобразования для структурной постоянной флуктуаций показателя преломления, внешнего и внутреннего масштабов турбулентности, а в наиболее общем случае – формула для преобразования спектральной плотности.

Однако вывод этих формул требует несколько иного подхода,чем тот, который используется для нелинейных задач. Причина заключается в том, что распространение волн в случайно-неоднородных средах описывается стохастическим уравнением, решить которое можно только с использованием приближенных методов. Кроме того, даже в случае однородной и изотропной турбулентности на исходной трассе турбулентность на трассе эквивалентного пучка придется описывать как случайное поле с плавно изменяющимися средними характеристиками, что также является приближенным подходом.

Выполняя формальные операции с выражением для структурной функции, описывающей инерционный интервал турбулентности, мы получили следующее выражение для преобразования структурной постоянной:

$$C^2_{n(2)}(z) = \frac{(1 - \delta\, z)^{-2/3}}{(1 - \delta\, z)^4}\, C^2_{n(1)}\left(\frac{z}{1 - \delta\, z}\right). \tag{31}$$

Однако нет уверенности, что применение этой формулы даст правильный результат. По-видимому, вид преобразования для параметров турбулентности на трассе должен зависеть от приближения, в котором решается уравнение распространения.


1. Таланов В.И. // Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 11.С. 303–305.
2. Bradley L.C. Herrmann J. // J. Opt. Soc. Am. 1971. V. 61. №5. P. 668A.
3. Wallace J. // J. Opt. Soc. Am. 1972. V. 62. №3. P. 373–378.
4. Sziclas E.A., Siegman A.E. // Proc. IEEE. 1974. V. 62. №3. P. 410–412. (Перевод: Сиклаш, Сигмен. Дифракционные расчеты с помощью методов быстрого преобразования Фурье. // ТИИЭР, 1974. №3. С. 161–162.
5. Fleck J.A., Morris J.R., Feit M.D. // Appl. Phys. 1976. V. 10. №2. P. 129–160.
6. Устинов Е.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34. №1. С. 40–46.



Институт оптики атмосферы СО РАН,
Томск



Поступила в редакцию
20 сентября 1993 г.



B.V. Fortes. **Lens Transform in Calculations of Coherent Paraxial Beams Propagation.**

This paper presents a discussion of a theory of the so-called <lens> transform, also known as Talanov coordinate system transform. Such a transform enables one to make numerical simulations of propagation of focused beams along very short paths and of collimated beams along very long paths reducing the problem on propagation of the initial beam to the problem on propagation of an equivalent beam that has different initial curvature of the wave front. A formula is derived, which allows recalculation of the refractive index field along the initial path to be done for the case of propagation path of an equivalent beam. This formula is used in recalculations of medium parameters in the problem on nonstationary thermal blooming.