

## ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИКИ АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА

УДК 535: 519.6

**В.П. Якубов, Д.В. Лосев**

### **ПАССИВНАЯ ТОМОГРАФИЯ ДВУМЕРНОЙ СТРУКТУРЫ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД**

На основе анализа особенностей получения многокурсных проекций некогерентно излучающих неоднородностей задача томографии их структуры сведена к интегральному уравнению типа Абеля. Предложено новое решение, базирующееся на удобной замене переменных, сводящей задачу к уравнению в свертках, и на использовании преобразования Фурье. Эффективность и устойчивость решения подтверждаются результатами имитационного моделирования.

#### **1. Введение**

В последнее время возрос интерес к использованию томографических методов для дистанционной диагностики различных сред. Широко применяются методы вычислительной томографии, основанные на учете эффектов ослабления излучения в веществе [1]. Основным восстанавливаемым параметром обычно выступает плотность вещества, а измеряемой характеристикой является величина ослабления интенсивности излучения при многокурсном просвечивании исследуемого объекта, например рентгеновским излучением. Предполагается, что ослабление излучения пропорционально интегральной плотности вещества на траекториях волны. Значительные успехи теории и техники томографии сред стали возможны благодаря предложенным эффективным методам обращения возникающих волновых проекций с использованием преобразований типа Радона, Абеля и т.н. сверточных методов [1–6]. Большинство известных томографических методов предполагают использование для просвечивания сред стороннего источника излучения с известными параметрами, располагающегося вне или внутри исследуемого вещества. Этому соответствует активная томография. В пассивной томографии используется собственное излучение вещества, возникающее, например, при его нагревании или ином возбуждении. Воздействие внешнего излучения часто приводит к необратимым изменениям в исследуемом веществе, и поэтому пассивные методы являются более привлекательными, в частности, они более экологически безопасны.

Одним из хорошо известных примеров пассивной томографии является задача термографии, которая состоит в определении внутренней температуры среды и применяется при решении ряда технических и биомедицинских задач [7]. В частности, в медицине информация об изменении температуры внутренних органов облегчает раннюю диагностику различных заболеваний, контроль внутренней температуры необходим также в гипертермии, онкологии и т.д. В термокартировании широко используются радио- и инфракрасное излучение [8]. Термокартирование может быть применено для дистанционной диагностики пожаров. Методы пассивной томографии будут также полезны при радиометрическом анализе микроволнового излучения, сопровождающего появление радиоактивных элементов в атмосфере при ее радиационном загрязнении. К применению методов пассивной томографии сводятся задачи некогерентного рассеяния радиоволн в ионосфере и тропосфере. Число примеров возможного использования пассивной томографии может быть существенно расширено.

Несмотря на важность этого вида томографии, ее математический аппарат не так хорошо развит, как для активной. Точных решений часто не удается записать и приходится сводить задачу к решению плохо обусловленной системы линейных алгебраических уравнений [1, 7, 9]. Возникающие трудности связаны прежде всего с тем, что в отличие от активной томографии здесь пространственное распределение интенсивности источника излучения неизвестно и подлежит определению. К тому же в пассивных методах исследования часто приходится использовать некогерентное излучение малой интенсивности, нерегулярно изменяющееся во времени, что исключает возможность использования априорной информации об излучении и затрудняет достоверное восстановление структуры зондируемого объекта.

Однако следует заметить, что деление томографии на активную и пассивную достаточно условно, так как случай пассивной томографии можно рассматривать как излучение активных источников, распределенных внутри исследуемого объекта с неизвестной плотностью. Эти задачи могут быть сведены к общему виду. В [9] приведена обобщенная схема получения основного уравнения для различных задач томографии. Подобие возникающих интегральных соотношений и обуславливает возможную общность методов, используемых для их решения. Тенденция современного развития пассивных методов исследования состоит в обобщении хорошо развитых методов активной томографии.

В предлагаемой работе делается шаг в этом направлении на примере восстановления структуры объекта, не обладающего осевой симметрией. Показывается подобие получаемого исходного уравнения широко используемому в активной томографии уравнению типа Абеля и анализируется возможность обобщения известных решений. Также предложен альтернативный метод решения обратной задачи зондирования, основанный на сведении интегрального уравнения к уравнению типа свертки. Полученное решение допускает использование быстрых алгоритмов численной реализации и хорошо разработанных методов регуляризации.

## 2. Интегральное уравнение пассивной томографии

Рассмотрим двумерную задачу пассивной томографии для объекта с некогерентным распределением интенсивности источников собственного излучения в слабо поглощающей среде.

Требуется восстановить это распределение по результатам сканирования регистрируемой интенсивности излучения по азимутальному углу  $\psi$  (рис. 1). Приближение слабого поглощения означает, что ослабление излучения происходит в основном только за счет сферической расходимости. Расположение точки приема относительно объема исследования задается углом  $\theta$ , определяющим ракурс наблюдения.

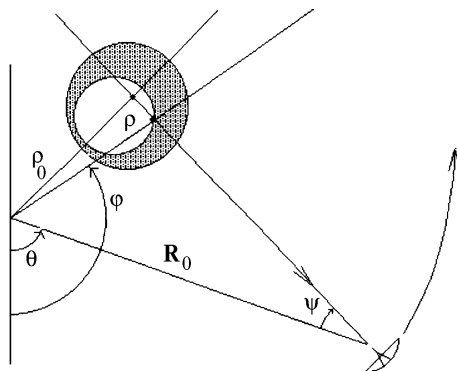


Рис. 1

Величина полной мощности излучения  $P$ , приходящего в точку наблюдения из объема с пространственным распределением интенсивности источников  $I(\rho, \varphi, z)$ , в цилиндрической системе координат определяется соотношением

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{I(\rho, \varphi, z) \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}|^2},$$

где  $R_0$  – расстояние от некоторого выбранного центра объема до точки приема;  $\rho_0 = R_0 \sin \psi$  – прицельное расстояние. Считая по координате  $z$  интенсивность излучения постоянной и переходя от интеграла по  $\varphi$  к интегралу по  $\psi$ , в результате для мощности, принимаемой с направления  $\psi$ , получаем

$$P(\rho_0, \theta) = \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2}} [I(\rho, \varphi_1) + I(\rho, \varphi_2)], \quad (1)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – два различных решения уравнения

$$R_0 \sin \psi = \rho \sin(\varphi - \theta + \psi),$$

соответствующих углу между текущим радиусом точки в среде и направлением, с которого отсчитывается угол  $\theta$  (см. рис. 1):  $\varphi_1 < \pi/2 - \psi$ ,  $\varphi_2 > \pi/2 - \psi$ . Соотношение (1) является интегральным уравнением Вольтерры первого рода для функции плотности распределения  $I(\rho, \varphi)$ .

Для восстановления двумерной структуры объекта в цилиндрической системе координат проведем разложение измеряемой и неизвестной функций в ряд Фурье по круговым гармоникам. Тогда уравнение (1) перейдет к виду

$$P_n(\rho_0) = 2 \int_{\rho_0}^{\infty} I_n(\rho) \exp(i n(\pi/2 - \psi)) \frac{d\rho}{\sqrt{1 - (\rho_0/\rho)^2}} T_n(\rho_0/\rho), \quad (2)$$

где  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$  – полином Чебышева первого рода порядка  $n$ . После обращения уравнения (2) искомое двумерное распределение интенсивности излучения может быть получено путем обращения ряда Фурье для коэффициентов  $I_n$ :

$$I(\rho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(\rho) e^{i n \varphi}.$$

Для среды с осевой симметрией при определении внутренней структуры достаточно одного ракурса, чему соответствует случай  $n = 0$ , и тогда (2) переходит в известное уравнение Абеля.

По своей форме полученное выражение (2) похоже на интегральное уравнение, возникающее в активной томографии для определения неизвестной плотности вещества [1, 10]. Отличие состоит в подынтегральном множителе  $e^{i n \psi}$ , учитывающем кривизну волнового фронта из-за конечности расстояния от точки приема до объема излучения. Подobie уравнений подтверждает общность задач активной и пассивной томографии.

### 3. Решение задачи томографии методом уравнения в свертках

В настоящее время известны три решения интегрального уравнения типа (2). Два из них, известные как каузальное и некаузальное, сводятся к интегральному преобразованию известной функции с ядром, содержащим в себе полиномы Чебышева первого или второго рода [10]. Некаузальное решение по отношению к каузальному имеет некоторое преимущество, поскольку его ядро не содержит особенности вблизи границы интегрирования. Алгоритмизация этих решений сопряжена с необходимостью выбора переменного шага интегрирования с более подробным просчетом подынтегральной функции вблизи начала координат. Это содержит в себе скрытый источник неустойчивости решения к ошибкам измерений и не позволяет сколько-нибудь существенно ускорить процесс восстановления внутренней структуры. Близкими недостатками обладает третий метод решения, основанный на использовании интегрального преобразования Меллина, однако для него разработан эффективный способ регуляризации [9]. Скорость вычислений при этом не увеличивается.

Для решения полученного уравнения (2) может быть применен альтернативный метод, допускающий существенное ускорение вычислений. Для этого сделаем замену переменных:

$$\rho_0 = a e^{\tau_0}, \quad \rho = a e^{\tau}, \quad (3)$$

где  $a$  – некоторая константа. Уравнение перейдет к виду

$$\tilde{P}(\tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{I}(\tau_0) Q(\tau_0 - \tau) d\tau. \quad (4)$$

Здесь обозначено:

$$\tilde{I}(\tau) = a e^{3/2\tau} I_n(a e^{\tau}); \quad \tilde{P}(\tau_0) = e^{\tau_0/2} P_n(a e^{\tau_0}) e^{-i n(\pi/2 - \psi)};$$

$$Q(t) = \frac{\sqrt{2} T_n(e^t)}{\sqrt{\text{sh}(-t)}} \chi(-t)$$

и  $\chi(t)$  – ступенчатая функция Хевисайда.

Уравнение (4) есть интегральное уравнение типа свертки, для решения которого хорошо разработан аппарат регуляризации [9]. Например, при использовании преобразования Фурье решение может быть записано как [11]

$$\tilde{I}(\omega) = \tilde{P}(\omega) Q^*(\omega) [Q^*(\omega) Q(\omega) + \alpha(\omega^2 + 1)]^{-1}, \quad (5)$$

где  $I(\omega)$ ,  $P(\omega)$ ,  $Q(\omega)$  – трансформанты Фурье от соответствующих функций;  $\alpha$  – параметр регуляризации, а «\*» означает комплексное сопряжение. Функцию  $P(\omega)$  можно получить, применяя преобразование Фурье к экспериментальным данным. Вид функции  $Q(\omega)$  удается вычислить аналитически [12]

$$Q(\omega) = 2 \int_0^1 x^{i\omega - 1/2} \frac{T_n(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2^{i\omega}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\omega\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{i\omega + n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{i\omega - n}{2}\right)}.$$

Здесь  $\Gamma(\omega)$  – гамма-функция Эйлера. Для получения решения достаточно взять обратное преобразование Фурье от функции  $\tilde{I}(\omega)$  и совершить обратную к (3) замену переменных.

Преимущество предложенного метода уравнения в свертках заключается в возможности использования для решения преобразования Фурье, которое допускает эффективный алгоритм реализации, известный как быстрое преобразование Фурье (БПФ). Аналитическое представление трансформанты Фурье ядра интегрального уравнения также способствует снижению уровня погрешностей восстановления. К тому же предложенный метод реализует более удобное для точного интегрирования изменение шага дискретизации. При эквидистантном шаге интегрирования по новым переменным обеспечивается адаптивный шаг по переменной  $\rho_0$ . Вблизи начала координат интеграл вычисляется с меньшим шагом, при увеличении прицельного параметра шаг увеличивается. И наконец, использование хорошо известной регуляризации в (5) избавляет от дополнительных затрат на повышение устойчивости решения при наличии шумов измерений.

#### 4. Имитационное моделирование

Для проверки работоспособности предложенного решения было проведено имитационное моделирование углового распределения интенсивности излучения источника в виде цилиндра радиуса  $a$ , смещенного под углом  $\beta$  от центра координат на расстояние  $b$ . Если плотность распределения источников внутри цилиндра равномерна, то угловая зависимость принятой мощности представляется согласно (1) аналитически в виде

$$P(\rho_0, \theta) = 2 \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2(\psi - \alpha)} \chi(a - c \sin(\psi - \alpha)),$$

где  $c^2 = b^2 + R_0^2 - 2bR_0 \sin(\theta - \beta)$ ;  $\sin \alpha = b/c \cos(\theta - \beta)$ . Комбинация вложенных цилиндров разной интенсивности позволяет промоделировать самые разнообразные варианты плотности распределения источников излучения. В реальных условиях функция  $P(\rho_0, \theta)$  будет известна из проведенных измерений.

На рис. 2, 3 представлены примеры восстановления распределения интенсивности источника соответственно с пониженной ( $I = 0$ ) и повышенной ( $I = 2$ ) концентрацией внутри цилиндра с величиной  $I = 1$ . Расчет проведен для  $R_0 = 9$ . При этом параметры внешнего цилиндра были выбраны:  $a_1 = 3$ ,  $b_1 = 2$ ,  $\beta_1 = -45^\circ$ , а внутреннего:  $a_2 = 1$ ,  $b_2 = 1$ ,  $\beta_2 = -45^\circ$ . При восстановлении было использовано 32 ракурса наблюдений и 64 дискрета по азимутальному углу  $\psi$ . Алгоритм оказался достаточно прост, что дало возможность реализовать его в интегрированной системе MathCAD. Форма распределения восстанавливается полностью. О существующей погрешности решения говорит некоторая размытость границ областей разной интенсивности источника излучения в представлении его распределения изолиниями.

Заметим, что точность восстановления изображения может быть существенно улучшена с увеличением числа ракурсов и числа дискретов и в конечном счете определяется лишь шумами измерений. При проведенном имитационном моделировании эти шумы не превышали – 30 дБ.

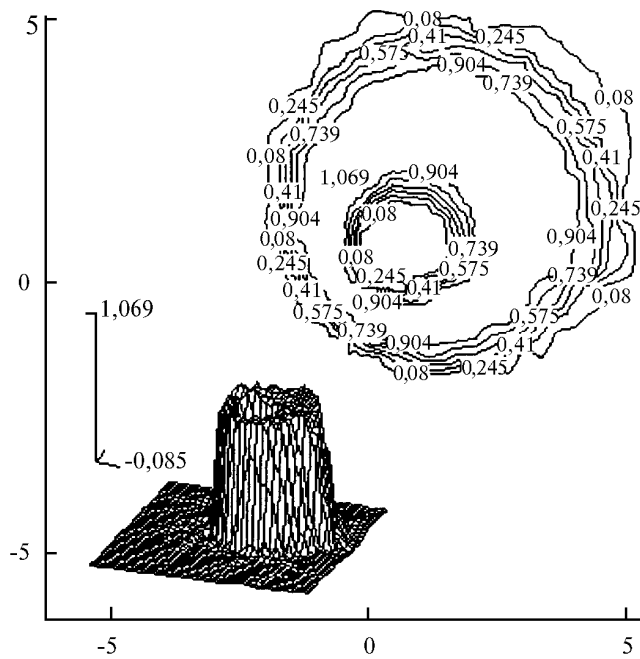


Рис. 2

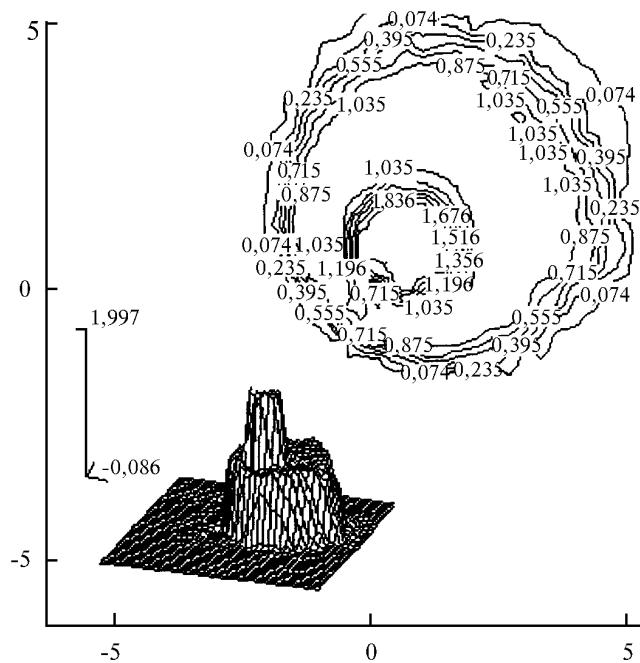


Рис. 3

## 5. Заключение

На основе многокурсного анализа пространственного распределения собственного некогерентного излучения среды в случае слабого поглощения получено интегральное уравнение, которое оказалось подобно уравнению задачи активной томографии с использованием внешнего источника излучения. Обсуждается возможность использования известных решений и предложен альтернативный метод обращения исходного уравнения, основанный на сведении его к интегральному уравнению типа свертки. Алгоритм его решения отличается структурной простотой и возможностью увеличения скорости реализации за счет применения быстрого преобразования Фурье, а также высокой точностью, которая подтверждается результатами

имитационного моделирования. Новый метод может найти применение для более точного и быстрого восстановления внутренней структуры исследуемого объекта в задачах как пассивной, так и активной томографии.

1. Федоров Г.А., Терещенко С.А. Вычислительная эмиссионная томография. М.: Энергоатомиздат, 1990. 184 с.
2. Радон И. Об определении функций по их интегралам вдоль некоторых многообразий // Хелгасон С. Преобразование Радона. М.: Мир, 1983. С. 134–148.
3. Согмаск А.М. Representation of a function by its line integrals, with some radiological application // J. Applied Physics. 1963. V. 34. N 9. P. 2722–2727.
4. Согмаск А.М. Some early radiotherapy optimization work // International Journal of Imaging System and Technology. 1995. V. 6. P. 2–5.
5. Гордон Р. Восстановление по проекциям в медицине и астрономии // Построение изображений в астрономии по функциям когерентности. М.: Мир, 1982. С. 306–313.
6. Якубов В.П., Лосев Д.В. Восстановление внутренней структуры сильно поглощающих сред по ослаблению прошедшего излучения // Оптика атмосферы и океана. 1996. Т.9. N 10. С. 1367–1372.
7. Аносов А.А., Исрефилов М.Г., Пасечник В.И. Точность решения двумерной обратной задачи акустотермографии при некорреляционном приеме // Радиотехника. 1995. N 9. С. 65–68.
8. Сельский А.Г., Фишер А.М. и др. Возможность применения динамического термокартирования в радио- и инфракрасном диапазоне в онкологической клинике // Радиотехника. 1995. N 9. С. 85–89.
9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А. Математические задачи компьютерной томографии. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 160 с.
10. Hansen E.W. Theory of circular harmonic image reconstruction // J. Opt. Soc. Amer. 1981. V. 71. N. 3. P. 304–308.
11. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 232 с.
12. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, гл. ред. физ.-лит., 1983. 753 с.

Томский государственный университет

Поступила в редакцию  
11 октября 1996 г.

V.P. Yakubov, D.V. Losev. **Passive 2-D Structure Tomography of Heterogeneous Media.**

Based on the analysis of many foreshortening projections of incoherent radiation, the tomography problem of their structure is reduced to an integral equation of Abel type. The new decision based on convenient variable replacement, moving the problem to convolution equation, and on use of the Fourier transform. Efficiency and stability of the decision have been proved by the results of simulation.