

В.А. Тартаковский

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФАЗЫ ОПТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ И МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИГНАЛ

В адаптивной оптике, возможно впервые, реализуется многомерная фазовая модуляция световой волны. В этой связи возникает необходимость формального определения фазы в пространственно-временной области. Предметом данной работы является обобщение формализма аналитического сигнала для этой цели.

1. Введение

Представление колебательного или волнового процесса в виде двух величин – амплитуды и фазы – требует непротиворечивого определения этих понятий. Волновое уравнение или уравнение, описывающее колебательный процесс, такого определения не содержат, поэтому необходимы некоторые дополнительные соображения. Имеется значительное количество работ [2,3,5–9,12,14–17,20,26–31], в которых рассматриваются проблемы определения амплитуды и фазы применительно к одномерному колебательному процессу.

Существуют различные способы введения амплитуды и фазы. Анализ этих способов был проведен в [6,8,27]. Выводы можно сформулировать следующим образом:

– Для гармонических функций – синуса и косинуса – все определения дают одинаковый результат, это есть необходимое условие правильности определения.

– Для узкополосных сигналов результаты различных способов не совпадают, при уменьшении относительной ширины полосы сигнала это несовпадение также уменьшается.

– Наиболее общее определение амплитуды и фазы можно дать с помощью так называемого аналитического сигнала (АС), который ввел Д. Габор [2].

Для данной действительной функции $U(x)$ аналитический сигнал $W(x)$ строится как комплексная функция

$$W(x) = U(x) + iV(x), \quad V(x) = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(s)}{x-s} ds = \mathbf{H}_x U(x). \quad (1)$$

Здесь несобственный интеграл определен в смысле главного значения по Коши (v.p.) в тех случаях, когда $s \rightarrow \pm \infty$ и при $x = s$. Мнимая составляющая аналитического сигнала $V(x)$ является Гильберт-трансформантой его действительной части $U(x)$, а оператор преобразования Гильберта по аргументу x обозначен как \mathbf{H}_x . Затем амплитуда и фаза вычисляются обычным способом:

$$a(x) = \sqrt{U^2(x) + V^2(x)}, \quad \varphi(x) = \arctg \frac{V(x)}{U(x)}.$$

В работе [27] показано, что оператор \mathbf{H}_x является единственным линейным оператором, для которого справедливо равенство

$$\mathbf{H}_x \cos(\alpha_c x + \varphi_0) = \sin(\alpha_c x + \varphi_0),$$

где $\alpha_c > 0$, φ_0 – неизвестные константы, имеющие смысл несущей частоты и начальной фазы. Поэтому определение амплитуды и фазы осуществляется одинаково для сигналов с различными спектрами частот.

Преобразование Гильберта эквивалентно умножению в частотной области на знаковую функцию:

$$\mathbf{H}_x U(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} \alpha e^{-i\alpha x} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} U(y) e^{i\alpha y} dy. \quad (2)$$

Поэтому преобразование Фурье аналитического сигнала $W(x)$ располагается только на одной половине частотной оси и является односторонним или причинным (каузальным).

Определяющим свойством для применения АС в теории модуляции [26] является возможность отделить в амплитудно-модулированном сигнале низкочастотное модулирующее колебание по формуле

$$\mathbf{H}_x \Omega(x) U(x) = \Omega(x) \mathbf{H}_x U(x), \quad (3)$$

где $\Omega(x)$ и $U(x)$ – действительные функции, преобразования Фурье которых не пересекаются в частотной области, причем $U(x)$ – более высокочастотна, нежели $\Omega(x)$. Другие многочисленные свойства преобразования Гильберта обсуждаются в [4,6,8,15].

Оптическая волна является четырехмерной функцией, и это создает проблему для применения аналитического сигнала [25,31]. Возникает вопрос, по какой из координат следует производить преобразование Гильберта, когда это возможно и как различные аналитические сигналы, возникающие при этом, будут соответствовать друг другу. Сохранение единственности определения фазы вызывает необходимость обобщения понятия аналитического сигнала на многомерный случай.

Исследуем численно определение амплитуды и фазы аналитическим сигналом. Сравним амплитуду и фазу нормального случайного процесса, которые определяются аналитическим сигналом, когда $\alpha_c > \Delta\alpha$, с амплитудой и фазой этого же процесса при перемещении его спектральных полос к нулевой частоте и последующем обмене.

Спектральные полосы занимали в области частот по 20 отсчетов, общее число отсчетов процесса $N = 256$. Несущая частота $\alpha_c \in [-14, +14]$, а частота Найквиста равнялась 128. Оценки вычислялись как среднее отношение норм в пространстве $L_2(N)$ по формулам:

$$\varepsilon_a = \sqrt{\frac{N}{\sum_{i=1}^N (a_i - \tilde{a}_i)^2} / \frac{N}{\sum_{i=1}^N a_i^2}}, \quad \varepsilon_\varphi = \sqrt{\frac{N}{\sum_{i=1}^N (\varphi_i - \tilde{\varphi}_i)^2} / \frac{N}{\sum_{i=1}^N \varphi_i^2}},$$

где a_i, φ_i – отсчеты амплитуды и фазы исходного процесса, а $\tilde{a}_i, \tilde{\varphi}_i$ – соответствующие отсчеты для процесса с изменяющимся положением спектральных полос.

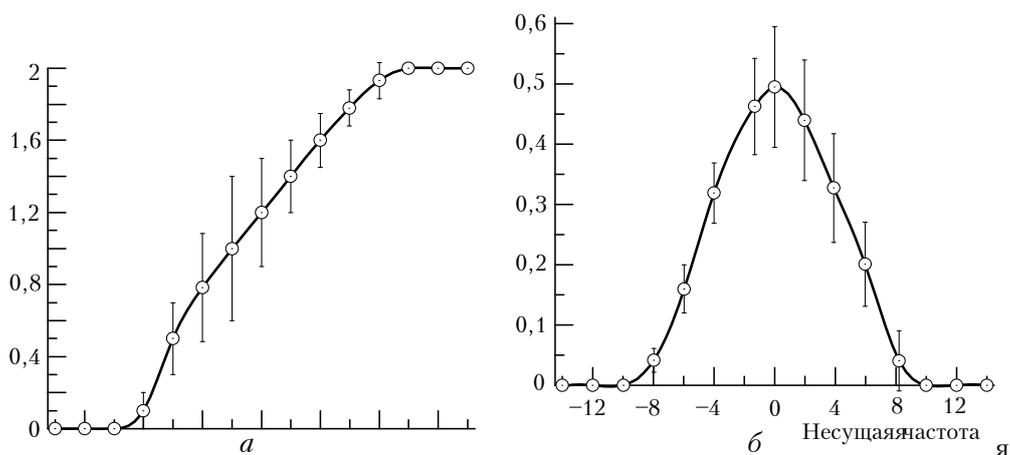


Рис. 1. Оценки несовпадения ε_φ (а) и ε_a (б), фазы и амплитуды комплексной функции при изменении несущей частоты с амплитудой и фазой, которые определены аналитическим сигналом. В качестве доверительных интервалов указаны стандартные отклонения соответствующих величин

Результаты эксперимента приведены на рис. 1. Видно, что в тех случаях, когда спектральные полосы не охватывают точку $\alpha = 0$, оценка ε_a равна нулю. Следовательно, амплитуда инвариантна относительно смены знака несущей частоты, тогда как фаза при этом изменяет свой знак и оценка ε_φ от значения нуля переходит к двум. Если точка $\alpha = 0$ попадает внутрь спектральной полосы, то оценка ε_a становится отличной от нуля, а ε_φ – от нуля и от двух.

Таким образом, когда $\alpha_c \sim \Delta\alpha$ возможность применения аналитического сигнала для определения амплитуды и фазы становится проблематичной. Такая ситуация обычно встречается в интерферометрии, когда интерференционные полосы существенно изменяют свою ширину и кривизну, когда имеют вид колец.

2. Класс функций для представления модели волны

Основное качество математической модели – ее пригодность для исследования – во многом определяется свойствами тех функций, из которых она составлена. При выборе класса функций для представления физической величины примем во внимание два обстоятельства. Первое – это однозначное описание волновой функции, интерферограммы дискретным рядом отсчетов, необходимых для проведения численного анализа. Второе – существование преобразования Гильберта, которым вводится аналитический сигнал.

Представление функций в виде дискретного ряда отсчетов осуществляется на основе теоремы Котельникова, при этом дискретизируемая функция должна иметь финитное преобразование Фурье.

По теореме Винера–Пэли для квадратично интегрируемых функций или Винера–Пэли–Шварца [15], если спектр имеет особенности в виде δ -функций и их производных, функции, имеющие финитный спектр, являются целыми аналитическими функциями экспоненциального типа (ЦФЭТ). Более того, если рассматривать только ограниченные на действительной оси функции, то такая ЦФЭТ будет еще и функцией класса «А» [4] или класса «В», как в [22].

Из ограниченности ЦФЭТ следует абсолютная интегрируемость ее преобразования Фурье или спектра, включая случай, когда она сама не является квадратично интегрируемой. Справедливо и обратное утверждение, а так как преобразование Гильберта от ЦФЭТ не нарушает абсолютной интегрируемости ее спектра, то Гильберт-трансформанта также будет ограниченной функцией. Преобразование Гильберта существует и для функций с непрерывной производной, и для еще более широкого класса функций, которые удовлетворяют условию Гельдера [24], но из-за необходимости дискретного представления эти классы функций применяться не будут.

Выясним, что влечет за собой применение целой функции для представления, например, интерференционной картины. Теорема в [1] позволяет, чтобы модуль разности между действительной непрерывной функцией $U(x)$ и аппроксимирующей ее ЦФЭТ класса «А» был как угодно мал для всех x , если

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \frac{\log M(p)}{\log p} = 0, \quad M(p) = \max |U(x)| \quad \text{при } |x| < p. \quad (4)$$

Из этого выражения следуют ограничения на рост амплитуды и частоты интерференционных полос, который не должен быть больше или меньше, чем любая степень x при $x \rightarrow \pm\infty$.

Априори известно о малости относительной ширины спектра пространственных частот и временного спектра параболической и квазимонохроматической волновой функции $U(x, y, z, t)$: $\Delta\omega/\omega_c \ll 1$, $\Delta\alpha/\alpha_c \ll 1$, где ω_c – несущая частота, а $\Delta\omega$ – полуширина временного спектра; α_c – несущая частота, а $\Delta\alpha$ – полуширина спектра пространственных частот.

Эти свойства световой волны могут быть наиболее естественно выражены, если $U(x, y, z, t)$ будет целой функцией экспоненциального типа каждой из переменных. Тем самым физические свойства – монохроматичность и параболичность – переносятся на аппроксимацию волны $U(x, y, z, t)$. Аппроксимация уже не будет точным решением волнового уравнения. Но в этом нет необходимости, так как понятия амплитуды и фазы существуют лишь в связи с их измерением либо определением и из волнового уравнения не следуют.

3. Способы введения аналитического сигнала

Рассмотрим частное решение скалярного волнового уравнения, соответствующее распространению квазимонохроматической волны в однородной среде в положительном направлении оси z :

$$W(x, y, z, t) = \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha, \beta, \omega) \exp i(\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t) d\alpha d\beta. \quad (5)$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma = (k^2 - \alpha^2 - \beta^2)^{1/2}$ – пространственные частоты; ω – временная частота, $k = 2\pi / \lambda = \omega/c$ – модуль волнового вектора, c – скорость света; $S(\alpha, \beta, \omega)$ – пространственно-временной спектр в плоскости $z = 0$. Знак пространственной частоты γ выбирается, как известно [10,18], из условия затухания неоднородных волн при $z \rightarrow +\infty$, а частоты ω – из условия перемещения фронта волны в том же направлении.

Такого представления достаточно для описания процесса распространения света в оптической системе, например в интерферометре. Частоты γ и ω не меняют знака, поэтому функция $W(x, y, z, t)$ есть аналитический сигнал как по переменной z , так и по переменной t . Условие неизменности знака может быть нарушено из-за появления волн, отраженных поверхностью оптической системы и распространяющихся навстречу основной волне. Но будем считать, что амплитуда встречной волны пренебрежимо мала, так как оптическая система позволяет отделить встречную волну от прямой волны в области пространственных частот α, β .

Аналитический сигнал на плоскости. Интересен анализ поля в плоскости регистрации, нормальной к оси z . Когда z и t зафиксированы, спектр $S(\alpha, \beta, \omega)$ в общем случае и при всех ω будет локализован вокруг начала координат плоскости $\alpha\beta$, и поэтому функция $W(x, y, z_0, t_0)$ не является аналитическим сигналом в каких-либо сечениях плоскости xu .

Повернем плоскость регистрации относительно оси x и оси y в точке $(0, 0, z_0)$ на некоторый угол θ нормально к вектору

$$\{\eta, \zeta, \sqrt{1 - \eta^2 - \zeta^2}\}.$$

В этой новой плоскости $p(x, y, z)$ координата z уже не будет фиксированной, она будет изменяться в соответствии с уравнением

$$z = z_0 - \frac{\eta x}{(1 - \eta^2 - \zeta^2)} - \frac{\zeta y}{(1 - \eta^2 - \zeta^2)}.$$

Подставив его в (5), получим

$$W(p, t) = \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha, \beta, \omega) \exp i[(\alpha)x + (\beta)y + \gamma z_0 - \omega t] d\alpha d\beta, \quad (6)$$

где $(\alpha) = \alpha - \gamma\eta/\sqrt{1 - \eta^2 - \zeta^2}$; $(\beta) = \beta - \gamma\zeta/\sqrt{1 - \eta^2 - \zeta^2}$.

Угол θ и связанные с ним проекции вектора нормали η и ζ могут быть выбраны такой величины, что сомножители $(\alpha), (\beta)$ у переменных x и y не будут изменять знак, например, при

$$\eta = \zeta < -b/k, \quad (7)$$

где $b = \max(|\alpha|, |\beta|)$, при $S(\alpha, \beta, \omega) \neq 0$. Поэтому функции $\cos(\alpha)x$ и $\sin(\alpha)x$, $\cos(\beta)y$ и $\sin(\beta)y$ связаны преобразованием Гильберта по x и y соответственно, что делает функцию $W(x, y, z, t)$ в плоскости $p(x, y, z)$ аналитическим сигналом как по x , так и по y (6).

Оценим численно величину угла θ , необходимую для обеспечения заданного разрешения в плоскости регистрации, для $\lambda = 0,63 \cdot 10^{-3}$ мм, $k \approx 10^4$ мм⁻¹, при $\zeta = \eta$, имея в виду соотношение $\eta = 2\pi \cos \theta / \lambda = 2\pi / \tau$, где τ есть пространственный период волны в этой плоскости. Результаты приведены в табл. 1.

Таблица 1

$\eta / \pi, \text{ мм}^{-1}\text{я}$	$\approx 2000\text{я}$	$\approx 400\text{я}$	200я	100я
$k^2 / \eta^2\text{я}$	$\approx 2,6\text{я}$	$\approx 62\text{я}$	$\approx 256\text{я}$	1000я
$\tau, \text{ ммя}$	0,001я	0,005я	0,01я	$\approx 0,02\text{я}$
$\theta, \text{ °я}$	$\approx 51\text{я}$	$\approx 83\text{я}$	$\approx 86\text{я}$	≈ 88

Из таблицы видно, что в пределах геометрической оптики величина угла θ близка к 90° . Такой угол может быть реализован в оптической системе для большого числа приложений, например при интерференционном контроле формы оптической поверхности. Экспериментально угол θ устанавливается такой величины, что пучок света, падающий на плоскость регистрации, находится по одну сторону от некоторой нормали к этой плоскости. Этим обеспечивается условие причинности для углового спектра функции $W [p(x, y, z), t]$.

Аналитический сигнал на линии. Пусть заданы параметрические уравнения линии $l(t)$ в трехмерном пространстве:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x(t)t, \\ y = y_0 + v_y(t)t, \\ z = z_0 + v_z(t)t. \end{cases}$$

Выясним, при каких условиях волна будет аналитическим сигналом на этой линии. Подставив параметрические уравнения в (5), получим

$$W[l(t)] = \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty S(\alpha, \beta, \omega) \exp i[(\circ)t - \omega t + \varphi_{\alpha\beta}] d\alpha d\beta, \quad (8)$$

где $(\circ) = \alpha v_x(t) + \beta v_y(t) + \gamma v_z(t)$; $\varphi_{\alpha\beta} = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0$.

Т а б л и ц а 2

Размер кадра, см	1×1 я
Число строк в кадре	3×10^4 я
Время сканирования кадра, с	1×10^{-3} я
θ , °	51я
Скорость света в вакууме, см/с	3×10^{10} я
Общая длина скана, см	3×10^4 я
Скорость сканирования v , см/с	3×10^7 я
$\cos \theta$	0,63я
$q \approx$	2×10^{-3}

Положим $\eta = \max(|\alpha|, |\beta|, |\gamma|)$ при $S(\alpha, \beta, \omega) \neq 0$, $v = \max(|v_x(t)|, |v_y(t)|, |v_z(t)|)$ и найдем, что $\max |(\circ)| < 3\eta v$. Покажем на численном примере, что величина $q = 3v\eta/\omega_c = 3v \cos \theta/c < 1$, при $\Delta\omega/\omega_c \ll 1$, где ω_c – несущая частота временного спектра, $\Delta\omega$ – полуширина временного спектра. Исходные данные и результаты для сканирования волны в кадре приведены в табл. 2.

Из полученной оценки для q следует неравенство $(\circ) - \omega_c < 0$. Очевидно, что приемлемые параметры сканирования кадра могут быть подобраны и для интервала $(\omega_c \pm \Delta\omega)$.

Таким образом, множитель при переменной t в (8) знак не меняет, и функция $W[l(t)]$ является аналитическим сигналом на линии с параметром t .

Аналитический сигнал в интерферограмме. Не являясь аналитическим сигналом, поле может получить это свойство при интерференции. Рассмотрим двумерную интерференционную картину $G(x, y)$ исследуемого поля с плоской единичной опорной волной:

$$G(x, y) = |W(x, y, z_0, t_0) + \exp i(\eta x + \zeta y)|^2 = 1 + |W(x, y, z_0, t_0)|^2 + W^*(x, y, z_0, t_0) \exp i(\eta x + \zeta y) + W(x, y, z_0, t_0) \exp -i(\eta x + \zeta y). \quad (9)$$

Так же как и в предыдущем случае, необходимо выбрать величины η, ζ по (7). Связанный с ними наклон фронта опорной волны преобразуется в смещение финитных пространственных спектров двух последних слагаемых в (9), которые являются сопряженными аналитическими сигналами по обеим координатам x, y .

Амплитуда аналитического сигнала и огибающая параметрического семейства функций. Решение волнового уравнения для вакуума (5) может содержать мультипликативную константу, например в виде $\exp i\varphi_0$. Изменяясь, начальная фаза φ_0 создает параметрическое семейство

функций $W(x, y, z, t) \exp i\varphi_0$. Функции семейства, возможно, имеют действительную огибающую $a(x, y, z, t)$, которая касается их в отдельных точках и не зависит от начальной фазы.

Выясним, как соотносятся огибающая и амплитуда поля [8,19]. Для нахождения огибающей [11] необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{Re} [W(x, y, z, t) \exp i\varphi_0] = a, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \operatorname{Re} [W(x, y, z, t) \exp i\varphi_0] = 0. \end{cases}$$

Подставив во второе уравнение системы выражение (5) и выполнив дифференцирование, найдем

$$\begin{cases} \operatorname{Re} [W(x, y, z, t) \exp i\varphi_0] = a, \\ \operatorname{Im} [W(x, y, z, t) \exp i\varphi_0] = 0. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение системы на мнимую единицу и сложим его с первым. Квадрат модуля суммы будет решением системы

$$a^2(x, y, z, t) = |W(x, y, z, t)|^2.$$

В случае монохроматической волны параметром семейства может быть время t . Исключив из выражения (5) интегрирование по частоте ω , получим систему уравнений для нахождения огибающей:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\alpha, \beta)| \cos [\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t + \arg S(\alpha, \beta)] d\alpha d\beta = a, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\alpha, \beta)| \sin [\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t + \arg S(\alpha, \beta)] d\alpha d\beta = 0. \end{cases}$$

Аналогично предыдущему случаю получим решение $a^2(x, y, z) = |W(x, y, z)|^2$. Квадрат огибающей параметрического семейства в данном случае не зависит от времени, как и интенсивность поля.

Таким образом, огибающая и амплитуда аналитического сигнала тождественны в рассмотренных случаях. Но сама возможность параметризации ограничена физическими свойствами задачи, волновым уравнением. В частном случае этим свойством является монохроматичность, в более общем – отсутствие пассивной среды и источников.

4. Взаимосвязь причинности преобразования Фурье комплексной функции и монотонности ее фазы

Анализируя зарегистрированную интерференционную картину, например выражение (9), вне связи с процессом ее получения, трудно сделать вывод, имеет ли поле $W(x, y)$ причинный пространственный спектр, особенно в тех случаях, когда интерференционные полосы криволинейны и переменной ширины. Имея в виду, что сдвиг спектра в области частот эквивалентен добавлению линейной функции к фазе сигнала, свяжем причинность спектра комплексной функции с монотонностью ее фазы [28]. Свойство монотонности проявляется экспериментально в том, что интерференционные полосы имеют полный профиль в линейных сечениях интерферограммы.

Воспользуемся неравенством Бернштейна [13,21]

$$\max \left| \frac{dW(x)}{dx} \right| \leq \Delta\alpha \max |W(x)|, \quad (10)$$

где функция $W(x) = a(x) \exp i\varphi(x)$ принадлежит к классу функций с финитным спектром; $\Delta\alpha$ – полуширина спектра.

Пусть $a(x) = \text{const}$, тогда найдем $\max |\varphi'(x)| \leq \Delta\alpha$. По теореме о сдвиге спектра в частотной области функция $\exp i[\varphi(x) + \Delta\alpha x]$ имеет причинный спектр, а из неравенства Бернштейна следует, что $\varphi(x) + \Delta\alpha x$ заведомо монотонная функция, т.е. причинность есть достаточное ус-

ловие наличия монотонности. Поэтому возможны случаи, когда монотонность присутствует, а причинность нет.

Рассмотрим случай, когда $a(x) \neq \text{const}$. Из неравенства Бернштейна получим

$$\Delta\alpha^2 \geq \max [a'^2(x) + a^2(x) \varphi'^2(x)] / \max a^2(x) \geq \max [a^2(x) \varphi'^2(x)] / \max a^2(x) = r^2 \max \varphi'^2(x),$$

где $r^2 \leq 1$, тогда $\Delta\alpha \geq r \max |\varphi'(x)|$. Последнее неравенство допускает три ситуации: причинность без монотонности, монотонность без причинности и совместное присутствие обоих свойств.

Дисперсионная причинность. Теперь выясним, какое утверждение справедливо для функций, не имеющих, возможно, финитного спектра. Определим полуширину спектра Фурье $S(\alpha)$ для функции $W(x)$ в дисперсионном смысле [23]

$$\Delta\alpha^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |S(\alpha)|^2 (\alpha - \alpha_c)^2 d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{a^2(x) [\varphi'(x) + \alpha_c]^2 + a'^2(x)\} dx.$$

Положим $\alpha_c = 0$ и получим оценку $\Delta\alpha^2 \leq A^2 \max \varphi'^2(x) + B^2$, где

$$A^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a^2(x) dx; \quad B^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a'^2(x) dx.$$

Пусть без ограничения общности $A^2 = 1$, тогда спектр функции

$$a(x) \exp i \{ \varphi(x) + x \sqrt{B^2 + \max \varphi'^2(x)} \}$$

причинен в дисперсионном смысле, а ее фаза является монотонной функцией, как это вытекает из неравенства

$$\Delta\alpha < \sqrt{B^2 + \max \varphi'^2(x)} > \max \varphi'(x).$$

Следовательно, при достаточно большом линейном фазовом сдвиге монотонность и дисперсионная причинность наблюдаются совместно.

Пусть $a(x) = \text{const}$, $\varphi'(x) \in L_2$. Найдем, что $\max \varphi'(x) > \Delta\alpha$, поэтому монотонность при сделанных предположениях есть достаточное условие дисперсионной причинности, в том числе когда $\varphi(x) \in L_2(T)$ и $W(x) \in L_2(T)$ и они являются T -периодическими функциями.

Условная монотонность. Функция косинус, входящая в выражение для интерферограммы, периодическая и четная. Поэтому немонотонная фаза может дать ту же самую интерференционную картину, что и монотонная. Пусть x_0 есть точка экстремума фазы, тогда $\cos \Phi(x) = \cos \tilde{\Phi}(x)$, где

$$\tilde{\Phi}(x) = \begin{cases} \pm\Phi(x), & x \leq x_0, \\ 2\pi n \pm\Phi(x), & x > x_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (11)$$

Даже если фаза $\tilde{\Phi}(x)$ разрывна в точке x_0 , ее производная останется непрерывной и ограниченной по модулю той же самой величиной, что и $\Phi(x)$. Фазовые функции, определенные по (11), в дальнейшем будем называть условно монотонными.

Численный эксперимент. Соответствие причинности и монотонности было исследовано численно. С помощью датчика псевдослучайных чисел с нормальным распределением генерировались периодические дискретные реализации аналитического сигнала $W_k = \{U_k + iV_k\} \exp i \alpha_c k$ при $\alpha_c = +15$, $k \in [1, N]$, $N = 256$. Затем несущая частота α_c изменялась в диапазоне от +15 до -15 с шагом единица. Для каждого значения несущей частоты подсчитывались оценки степени монотонности фазы p_m и степени причинности p_c как их средние значения по тридцати реализациям случайного процесса W_k . Использовались выражения:

$$p_m = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N-1} +p_k^2 - p_k^2}{\sum_{k=1}^{N-1} +p_k^2 + p_k^2}},$$

$$+p = \begin{cases} 0, & p_k < 0 \\ p_k, & p_k > 0, \end{cases} \quad -p = \begin{cases} 0, & p_k > 0 \\ p_k, & p_k < 0, \end{cases} \quad p_k = \arg W_{k+1} - \arg W_k,$$

$$p_c = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{NN} |S_k|^2 - \sum_{k=NN+1}^{NN} |S_k|^2 \right) / \sum_{k=1}^N |S_k|^2}, \quad (12)$$

где $NN = N/2 + 1$ – частота Найквиста, а S_k – дискретный пространственный спектр.

На рис. 2, а приведены результаты эксперимента для случая, когда процесс W_k имел как фазовую, так и амплитудную модуляции. Его спектр мощности был постоянен и отличен от нуля в интервале частот $[\alpha_c - 4, \alpha_c + 4]$, вне этого интервала спектр мощности был равен нулю. На рис. 2, б представлены результаты исследования чисто фазового процесса, когда $|W_k| = \text{const}$. Спектр мощности процесса визуально располагался в том же интервале, но его ширина и форма не контролировались.

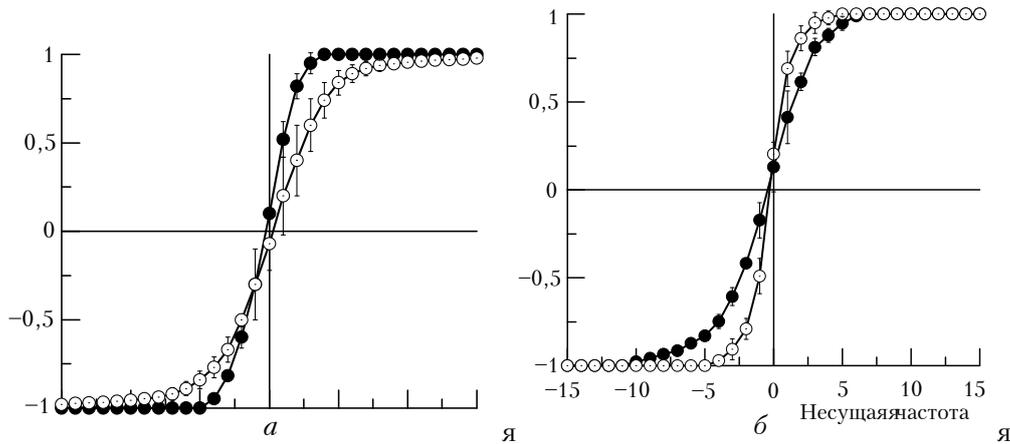


Рис. 2. Оценки степени причинности p_c —○— и степени монотонности p_m —●—: а – сигнал с финитным спектром и амплитудно-фазовой модуляцией; б – сигнал с фазовой модуляцией. В качестве доверительных интервалов указаны стандартные отклонения соответствующих величин

Проведенный анализ и численный эксперимент выявили четыре характерные ситуации.

Первая состоит в том, что причинность и монотонность наблюдаются совместно. Это справедливо как для функций с чисто фазовой модуляцией, так и с амплитудно-фазовой. При этом $\alpha_c > \Delta\alpha$, $W(x)$ является АС, $\alpha_c \in [-15, -5] \cup [7, 11]$ на рис. 2, а.

Во второй ситуации комплексная функция $W(x)$ имеет причинный спектр, является АС, $\alpha_c > \Delta\alpha$, но ее фаза не монотонна. Это наблюдается у функций с финитным спектром, имеющих амплитудно-фазовую модуляцию, $\alpha_c \in [-15, -5] \cup [4, 15]$ на рис. 2, а.

В третьей ситуации $W(x)$ не имеет монотонной фазы и не является АС, $\alpha_c < \Delta\alpha$. Но если интерференционные полосы при этом имеют полный профиль, то у функции $W(x)$ условно монотонная фаза.

Наконец, четвертая ситуация заключается в отсутствии причинного спектра у функции $W(x)$, она не является АС, но ее фаза монотонна, $\alpha_c < \Delta\alpha$, $\alpha_c \in [-9, -5] \cup [5, 7]$ на рис. 2, б.

Первая и вторая ситуации наиболее удобны для применения алгоритмов, основанных на преобразовании Гильберта, и эксперимент должен строиться так, чтобы они реализовались. Но ситуации, в которых причинность спектра отсутствует и имеются монотонность или условная монотонность фазы, также не потеряны. Перейдем к рассмотрению этого вопроса.

5. Преобразование комплексной функции с монотонной фазой в аналитический сигнал

Монотонность дает возможность повысить степень причинности у спектра и улучшить оценки фазы. Пусть функция $W(x) = a(x) \exp i \Phi(x)$ имеет монотонную фазу $\Phi(x)$, но не является АС. Если преобразовать переменную x так, что $\Phi[x(\tau)] = \alpha_c \tau$, то спектр функции $W(\tau)$ станет значительно уже и будет локализован в области вокруг точки $\alpha = \alpha_c$.

Ширина этого спектра относительно α_c , без учета погрешностей преобразования, будет определяться только амплитудой $a(\tau)$, которая мало изменится по сравнению с $a(x)$, если по-

следняя низкочастотна. При $a(x) = \text{const}$ функция $W(x)$ причинна в дисперсионном смысле, а преобразованная функция $W(\tau)$ будет гармоническим колебанием с частотой α_c .

Такое преобразование, «растяжение-сжатие», возможно в соответствии с выражениями $\cos \Phi(x) \rightarrow \cos \Phi[\Phi^{-1}(\alpha_c \tau)] = \cos \alpha_c \tau$,

$$\mathbf{H} \cos \alpha_c \tau = \sin \alpha_c \tau \rightarrow \sin \Phi(x), \quad (13)$$

где Φ^{-1} есть функция, обратная Φ . Однозначность этой обратной функции обеспечивается монотонностью прямой функции. Если к тому же производная $\Phi(x)$ не равна нулю, то обратная функция не будет иметь разрывов, что особенно важно для ее численной реализации. Рис. 3 иллюстрирует обсуждаемое преобразование.

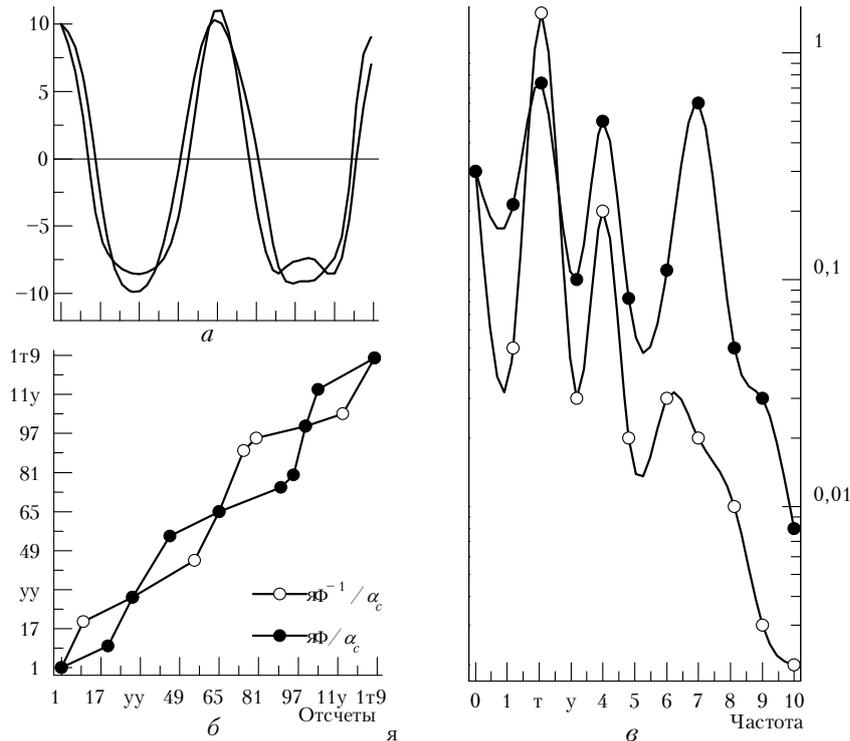


Рис. 3. Преобразование «растяжение-сжатие» сигнала с монотонной фазой: а – сигнал исходный — — — —, сигнал после преобразования — — — —; б – нормированная фаза —●— и нормированная обратная фаза —○— исходного сигнала $W(x)$; в – спектр $S(\alpha)$ исходного сигнала —●—, спектр преобразованного сигнала —○—

Возникает вопрос о реализации описанных операций. Действительно, для того чтобы определить фазу $\Phi(x)$, зная только $U(x)$, эту фазу уже необходимо знать для осуществления преобразований (13). Но здесь можно предположить, что величины

$$\Phi_0(x) = \text{arctg} \left[\mathbf{H} U(x) / U(x) \right] \quad (14)$$

будет достаточно для осуществления начального сжатия спектра. Затем итерационный процесс осуществляется в соответствии с уравнением

$$\Phi_{n+1}(x) = \text{arctg} \left[\mathbf{H} U(\Phi_n^{-1}(\alpha_c \tau)) / U(\Phi_n^{-1}(\alpha_c \tau)) \right] \tau = \Phi_n(x) / \alpha_c. \quad (15)$$

Для численных исследований итерационного преобразования генерировались в пределах одного периода, так же как и в предыдущем эксперименте, реализации случайной фазы φ_k , $k \in [1, N]$, $N = 256$. Спектр мощности этих реализаций был постоянен, когда частота $\alpha \in [2, 5]$, $\sigma_\varphi = \pi/5$, а среднее равнялось нулю. Затем к φ_k добавлялась линейная составляющая, и эта сумма $\Phi_k = \varphi_k + \alpha_c k$ была заведомо монотонной при $\alpha_c = 8$.

Строился комплексный процесс $W_k = \cos \Phi_k + i \sin \Phi_k$ и вычислялись оценки p_c для W_k ,

$$\varepsilon_n = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N [\Phi_k - \Phi_{nk}]^2}{\sum_{k=1}^N \Phi_k^2}}$$

и p_m для Φ_k , при $\alpha \in [0, 8]$. Величина Φ_{nk} определялась из итерационного уравнения (15) при $n = 4$ и из уравнения (14) при $n = 0$. Усреднение оценок проводилось по тридцати реализациям случайного процесса для каждого значения α_c независимо.

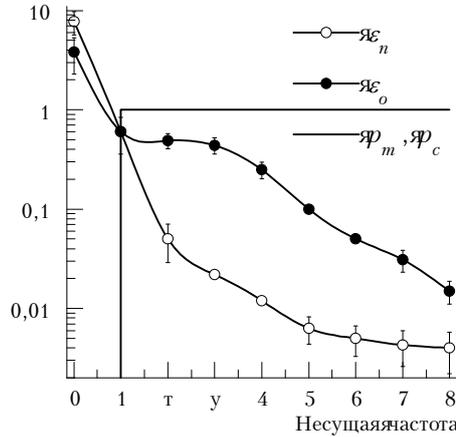


Рис. 4. Исследование итерационного уравнения для оценивания фазы с применением преобразования «растяжение-сжатие». Оценка точности фазы сигнала $W(x)$ без итераций —●— . Оценка точности фазы сигнала $W(x)$ при четырех итерациях —○—. Оценки степени причинности сигнала после его преобразования и степени монотонности фазы сигнала $W(x)$ В качестве доверительных интервалов указаны стандартные отклонения соответствующих величин

Результаты представлены на рис. 4. Видно, что четыре итерации существенно улучшают оценки фазы в тех случаях, когда $p_m = 1$ и Φ_k монотонна.

6. Единственность аналитического сигнала в многомерном случае

Как это видно, аналитические сигналы (6), (8) являются сечениями одной и той же функции $W(x, y, z, t)$. Поэтому амплитуды и фазы этих выражений также являются сечениями одних и тех же четырехмерных функций.

Функция $W(x, y, z_0, t_0)$, будучи сечением выражения (5), не является аналитическим сигналом по переменной x или y , но отличающийся от нее только линейной фазовой добавкой АС содержится в интерферограмме (9). Для функций с монотонной фазой также возможно обратимое преобразование (13) в аналитический сигнал.

Эти свойства являются следствием узкополосности временного спектра и спектра пространственных частот, связанных с направлением распространения волны. Оптическая волна в квазимонохроматическом, геометрооптическом, параболическом приближении обладает этими свойствами. Кроме того, структура решения волнового уравнения, когда пространственные координаты и время аддитивно входят в показатель экспоненты (5), позволяет при анализе пользоваться пространственной и временной несущей совместно.

Все это дает возможность определить единый четырехмерный аналитический сигнал, его амплитуду и фазу соотношениями:

$$W(x, y, z, t) \stackrel{\text{def}}{=} U(x, y, z, t) + iV(x, y, z, t);$$

$$V(x, y, z, t) = \mathbf{H}_t U(x, y, z, t) = \mathbf{H}_z U(x, y, z, t);$$

$$V[p(x, y, z), t] = \mathbf{H}_x U[p(x, y, z), t] = \mathbf{H}_y U[p(x, y, z), t];$$

$$V[x(\tau), y(\tau), z(\tau)] = \mathbf{H}_r U[\Phi^{-1}(\alpha_c r)] \Big|_{r = \Phi(\tau)/\alpha_c}.$$

Практическая ценность этих выражений состоит в том, что они дают возможность конструировать алгоритмы измерения фазы в различных пространственно-временных, одномерных и многомерных сечениях и обеспечивают ее совпадение с единой четырехмерной фазой в этих сечениях. Определяемые АС амплитуда и фаза инвариантны относительно замены аргумента преобразования Гильберта и потому единственны.

7. Выводы

Для описания волнового поля в многомерном случае был введен аналитический сигнал, инвариантный относительно замены аргумента преобразования Гильберта, определяющий единственную многомерную фазу оптической волны.

Показано, что единственная четырехмерная фаза существует только как следствие узкополосности временного и пространственного спектров волны.

Установлено соответствие между причинностью преобразования Фурье комплексной функции и монотонностью ее фазы. Введено понятие дисперсионной причинности, использующее дисперсионное определение ширины.

Показано, что из монотонности фазы следует дисперсионная причинность преобразования Фурье комплексной волновой функции с постоянной амплитудой.

1. Келдыш М. В. О приближении голоморфных функций целыми функциями // Доклады АН СССР. 1945. Т. XLVII. N 4. С. 243–245.
2. Gabor D. Theory of communication // Journ. of IEE. 1946. V. 93. Pt. 3. P. 429–441.
3. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М; Л.: Гостехиздат, 1948. 500 с.
4. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956. 583 с.
5. Тихонов В. И. Один способ определения огибающей квазигармонических флуктуаций // Радиотехника и электроника. 1957. Т. 2. N 4. С. 562–568.
6. Велкер Г. Б. К созданию единой теории модуляции. Ч. 1. Соотношения между огибающей и фазой // ТИИЭР. 1966. Т. 1. N 3. С. 5–20.
7. Mandel L. Complex representation of optical fields in coherence theory // Journ. of the Opt.Soc.Am. 1967. V. 57. N 5. P. 613–617.
8. Коржик В. И. Огибающая сигнала и некоторые ее свойства // Радиотехника. 1968. Т. 23. N 4. С. 1–6.
9. Коржик В. И. Расширенное преобразование Гильберта и его применение в теории сигналов // Проблемы передачи информации. 1969. Т. V. Вып. 4. С. 3–18.
10. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970. 856 с.
11. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления Т. II. М.: Наука, 1970. 672 с.
12. Трахтман А. М., Трахтман В. А. Таблица преобразований Гильберта // Радиотехника. 1970. Т. 25. N 3. С. 85–89.
13. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике. М.: Мир, 1971. 495 с.
14. Сороко Л. М. Основы голографии и когерентной оптики. М.: Наука, 1971. 616 с.
15. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Фinitные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971. 408 с.
16. Трахтман А. М. Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. М.: Сов. радио, 1972. 352 с.
17. Сороко Л. М. Преобразование Гильберта и его применение в оптике // Материалы Пятой всесоюзной школы по голографии. Л.: ЛИЯФ, 1973. С. 40–95.
18. Зверев В. А. Радиооптика. Преобразование сигналов в радио и оптике. М.: Сов. радио, 1975. 304 с.
19. Тартаковский В. А. Об анализе двумерной интерференционной картины // III Всесоюз. симпозиум по распространению лазерного излучения в атмосфере. Томск: ИОА СО АН СССР, 1975. С. 230–231.
20. Нуссенцевейг Х. М. Причинность и дисперсионные соотношения. М.: Мир, 1976. 461 с.
21. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Прогресс в Советском Союзе в области теории финитных функций и ее применений в физике и технике // ТИИЭР. 1977. Т. 65. N 7. С. 16–45.
22. Рекиша А. А. Г. Нули целых функций: Теория и инженерные приложения // ТИИЭР. 1980. Т. 68. N 3. С. 5–30.
23. Похлиг С. К. Длительность сигнала и преобразование Фурье // ТИИЭР. 1980. Т. 68. N 5. С. 100–101.
24. Пыхтев Г. Н. Точные методы вычисления интегралов типа Коши. Новосибирск: Наука, 1980. 121 с.
25. Тартаковский В. А., Покасов В. В. Определение огибающей и фазы в оптике и взаимосвязь между ними. Томск: ИОА СО АН СССР, 1980. 13 с. Деп. в ВИНТИ, 15.01.80. N 356–80.
26. Райс С. О. Огибающие узкополосных сигналов // ТИИЭР. 1982. Т. 70. N 7. С. 5–13.
27. Вайнштейн Л. А., Вакман Д. Е. Разделение частот в теории колебаний и волн. М.: Наука, 1983. 287 с.
28. Тартаковский В. А. Некоторые алгоритмы анализа данных в интерференционных датчиках волнового фронта // Известия вузов. Физика. 1985. N 11. С. 96–105.
29. Золотарев И. Д. Новый подход в решении проблемы «амплитуда», «фаза», «частота» // II Международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы электронного приборостроения». Новосибирск, 1994. С. 17–19.
30. Костюхина И. В. Исследование возможности применения преобразования Гильберта для анализа энцефалограмм // Межвузовская научно-техническая конференция «Микроэлектроника и информатика». Москва, 12–14 апр. 1995. С. 31–32.
31. Tartakovski V. A. Interferogram evaluation by 4D Analytic signal theory // Topical meeting on Adaptive Optics (Oct. 2–6, 1995, Garching bei München) ESO conference and workshop proceedings. N 54. P. 141–147.

V. A. Tartakovskii. **Definition of the Optical Wave Phase and Multidimensional Analytic Signal.**

Multidimensional phase modulation of a light wave is realized, probably, for the first time, in adaptive optics. In this connection, the necessity appears to define formally the phase in spatiotemporal region. The point of the given work is a generalization of an analytic signal formalism into this region.