«Оптика атмосферы и океана», **10**, N 3 (1997)

УДК 551.521.3

Г.А. Михайлов, А.С. Середняков

ЧИСЛЕННЫЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ РАЗМЕРНОСТИ МОДЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ НА ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ

С помощью приближенных асимптотических оценок и расчетов по методу Монте-Карло изучается изменение интегральных характеристик радиационного поля при переходе от одномерной модели стохастической среды к трехмерной. Для этой цели стандартные весовые оценки метода Монте-Карло аналитически частично усредняются по распределениям коэффициентов ослабления излучения для специальных «пуассоновских» моделей случайных сред. Полученные асимптотические и численные оценки изменения вероятности прохождения практически совпали для тестовой задачи с индикатрисой Хеньи–Гринстейна, причем введение дополнительной горизонтальной стохастичности уменьшило как вероятность прохождения, так и вероятность альбедо.

1. Введение

Рассматривается процесс переноса излучения в плоском горизонтальном слое вещества, плотность которого является однородной случайной функцией координат. Источником является вертикально падающий на верхнюю поверхность слоя поток излучения «единичной мощности». В одномерном варианте плотность среды является случайной функцией только высоты и моделируется на основе вертикального пуассоновского точечного потока интенсивности λ, между точками которого значения плотности полагаются постоянными. Известно [1], что корреляционная длина для такой случайной функции равна $1/\lambda$.

Проведенные ранее исследования (см., например [1]), показывают, что для оптически толстых случайных одномерных слоев вероятность прохождения в значительной степени определяется корреляционной длиной и средней плотностью. Это связано с тем, что при существенной анизотропии рассеяния вероятность прохождения хорошо приближается асимптотикой $\exp(-\tau/L)$, а флуктуации случайной оптической толщины τ в значительной степени определяются указанными интегральными характеристиками случайной плотности. Таким образом, рассматриваемая модель одномерной случайной среды для изучения прохождения излучения является довольно универсальной.

Переход к трехмерной модели среды осуществляется путем аналогичной рандомизации плотности в горизонтальных слоях вертикального разбиения. Вследствие необходимости ограничения горизонтальных пуассоновских точечных потоков при численном моделировании рассматривается задача об оценке вероятности прохождения и альбедо частицы для параллелепипедальной среды, т.е. конечного плоского горизонтального слоя достаточно большой протяженности. В одномерной модели среды строится пуассоновский поток точек по вертикальной оси в пределах параллелепипеда. Получается разбиение параллелепипеда на случайные слои, после чего в каждом слое независимо выбирается значение плотности, соответствующее заданной одномерной функции распределения. В трехмерной модели строятся пуассоновские потоки по трем координатным осям в пределах параллелепипеда; в каждом полученном случайном элементарном параллелепипеде независимо выбирается значение плотности соответственно заданной одномерной функции распределения. Выполнено аналитическое частичное усреднение весовой оценки метода Монте-Карло по распределению случайной плотности при фиксированном разбиении. Получены условия конечности дисперсии таких частично усредненных оценок. Произведены вычисления вероятности прохождения и вероятности альбедо.

Новый алгоритм позволяет вычислить малые изменения характеристик процесса переноса при переходе от детерминированной среды к стохастической с той же средней плотностью, например изменение альбедо. Такой алгоритм также позволяет вычислять изменение характеристик процесса переноса при переходе от одномерной модели случайного поля к трехмерной. Проведенные для тестовой задачи с индикатрисой Хеньи–Гринстейна расчеты дали оценки изменения вероятности прохождения, практически совпадающие с асимптотическими. Оказалось, что введение дополнительной горизонтальной стохастичности в рассматриваемой задаче уменьшает как вероятность прохождения, так и вероятность альбедо.

2. Моделирование однородных случайных полей на основе точечных потоков

В трехмерном пространстве рассмотрим следующие модели однородных случайных полей.

1) На вертикальной оси x в слое $0 \le x \le H$, $(y, z) \in R^2$ строится пуассоновский поток точек $\tau_0 = 0$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \Delta\tau_i$, где $\Delta\tau_i$ – случайная величина, распределенная с плотностью $\lambda\exp(-\lambda t)$, $\lambda = L^{-1}$. Получается разбиение слоя $\{0 \le x \le H,\ (y, z) \in R^2\}$ на m случайных слоев $\tau_i \le x \le \tau_{i+1}$, $\tau_0 = 0$, $\tau_m = H$. Далее в каждом таком слое независимо выбирается значение σ_i, где

$$\sigma_i = \begin{cases} \sigma^{(1)} & \text{с вероятностью } p, \\ \sigma^{(2)} & \text{с вероятностью } 1 - p. \end{cases}$$

Нормированная корреляционная функция для такого поля равна $\exp(-\lambda x)$ [1], и, следовательно, корреляционная длина равна $1/\lambda$.

2) По каждой оси при $0 \le x \le H_1$, $0 \le y, z \le H_2$ независимо строятся потоки точек указанного выше типа, в результате чего получаются разбиения:

по x: (τ_i, τ_{i+1}), $\quad i = 0, 1, \ldots, m_x$-слоев;

по y: (t_j, t_{j+1}), $\quad j = 0, 1, \ldots, m_y$-слоев;

по z: (l_k, l_{k+1}), $\quad k = 0, 1, \ldots, m_z$-слоев.

Объединяя все три разбиения, получаем разбиение параллелепипеда $0 \le x \le H_1$, $0 \le y, z \le H_2$ на $m_x\, m_y\, m_z$ параллелепипедов. Далее в каждом элементарном параллелепипеде независимо выбирается значение

$$\sigma_{ijk} = \begin{cases} \sigma^{(1)} & \text{с вероятностью } p, \\ \sigma^{(2)} & \text{с вероятностью } 1 - p. \end{cases}$$

Эти модели полей будут в дальнейшем использоваться при решении задачи теории переноса. На самом деле, можно рассматривать более общие модели случайных полей, производя указанные выше случайные разбиения по координатным осям и выбирая независимо в каждом слое (или в параллелепипеде) случайное значение $\sigma_i(\sigma_{ijk})$, соответствующее заданной одномерной функции распределения $F_\xi(x)$.

3. Асимптотические оценки вероятности прохождения с помощью уравнений теории восстановления

Отметим, что для детерминированной плоскопараллельной среды искомая вероятность $I(H)$ прохождения может иногда вполне удовлетворительно оцениваться асимптотической формулой

$$I_{as}(\tau(H)) \asymp e^{-\tau(H)/L}, \quad \tau(H) = \int_0^H \sigma(x)\, dx, \tag{3.1}$$

где L – диффузионная длина. Если рассеяние сильно анизотропно, то для оценки величины L можно воспользоваться «транспортным» приближением для индикатрисы

$$w(\nu, \nu') = (1 - \mu_0)\,(1/4\pi) + \mu_0\, \delta(\nu - \nu'), \tag{3.2}$$

которое сохраняет средний косинус угла рассеяния μ_0. При этом приближенное значение L определяется соотношениями

$$\frac{2\tilde{l}}{\tilde{q}L} = \ln\frac{L + \tilde{l}}{L - \tilde{l}}\,; \;\; \tilde{q} = \frac{q(1 - \mu_0)}{1 - q\mu_0}\,; \;\; \tilde{l} = \frac{l}{1 - q\mu_0}\,.$$

Например, для рассматриваемой в разделе 5 радиационной модели со стандартной индикатрисой Хеньи–Гринстейна и параметрами $\mu_0 = q = 0{,}9$ методом Монте-Карло была получена оценка $I(20) \approx 0{,}0236$, в то время как формула (3.1) с «транспортным» значением $L = 5{,}4$ дает величину $I_{as}(20) = 0{,}0246$. Ясно, что приближение (3.1) в данном случае можно улучшить, введя перед экспонентой коэффициент 0,0236/0,0246 = 0,959 для больших значений $\tau(H)$.

На основе теории восстановления с использованием асимптотической формулы (3.1) в [1] была получена следующая асимптотическая формула для одномерного пуассоновского поля $\sigma(x)$ с параметром λ (т.е. для первого варианта из раздела 2):

$$EI[\tau(H)] = EI_{as}[\tau(H)] \asymp \lambda^{-2}/[E\,(\lambda - \alpha + \sigma/L)^2]\;\mathrm{e}^{-\alpha H}, \tag{3.3}$$

причем значение α находится из уравнения

$$\lambda\, E\,(\lambda - \alpha + \sigma/L)^{-1} = 1.$$

Усреднение здесь осуществляется по одномерному распределению поля σ, т.е. для основного в данной работе бинарного распределения имеем

$$E\,(\lambda - \alpha + \sigma/L)^{-1} = p\,(\lambda - \alpha + \sigma^{(1)}/L) + (1-p)\,(\lambda - \alpha + \sigma^{(2)}/L).$$

Рассмотрим теперь некоторые возможности аналогичных асимптотических оценок для указанного в разделе 2 трехмерного варианта поля $\sigma(x, y, z)$. Ясно, что крупномасштабная горизонтальная (по (y, z)) неоднородность слабо влияет на асимптотику, т.е. при λ_y^{-1}, $\lambda_z^{-1} \gg L$ формула (3.3) с $\lambda = \lambda_x$ должна давать удовлетворительный результат и в трехмерном случае.

С другой стороны, хорошо известно, что в случае мелкомасштабной горизонтальной неоднородности (при λ_y^{-1}, $\lambda_z^{-1} \ll L$) допустимо горизонтальное усреднение, т.е., за исключением строго вертикальных направлений, траектория частицы строится фактически в среде с $\sigma \equiv E\sigma$.

Используя транспортное приближение (3.2), можно перейти к рассмотрению задачи переноса с изотропным рассеянием и параметрами

$$\sigma_{tr} = \nu\,\sigma,\ \sigma_{s,tr} = q\sigma\,(1-\mu_0),\ q_{tr} = q\,(1-\mu_0)/\nu,\ \nu = 1 - q\mu_0.$$

После вертикального падения на верхнюю поверхность слоя в точке $(x_0 = 0, y_0, z_0)$ (ось x предполагается направленной вниз) частица может соответственно (3.2) испытать несколько «дельта-рассеяний», после чего либо вылетает через нижнюю поверхность слоя $x = H$, либо поглощается, либо изотропно рассеивается. Искомый функционал, т.е. вероятность вылета, складывается из двух частей:

$$I^{(0)}(H) = I_1^{(0)}(H) + I_2^{(0)}(H), \tag{3.4}$$

где $I_1^{(0)}$ – вероятность вылета без изотропного рассеяния и поглощения, а

$$I_2^{(0)}(H) = \int_0^H E\, f(t;\sigma)\, i^{(0)}(t, H)\, dt,$$

где $f(t, \sigma)$ – плотность распределения первого изотропного рассеяния для данной реализации σ, а $i^{(0)}(t, H)$ – вклад в искомый функционал, т.е. вероятность вылета для изотропного единичного источника частиц в точке $x = t$, $y = y_0$, $z = z_0$ при $\sigma \equiv E\sigma$. Весовую функцию $E\,f(t, \sigma)$ здесь можно приближенно заменить на

$$f(t; E\sigma) = E\sigma_{s,tr} \exp\,(-\,t\,E\sigma_{s,tr}),$$

т.е. на плотность распределения первого изотропного рассеяния в модифицированной среде с $\sigma \equiv \nu E\sigma$. В результате, на основе сказанного выше о влиянии мелкомасштабной неоднородности на перенос частицы, получаем оценку

$$I_2^{(0)} \approx I_s^{(0)} - \mathrm{e}^{-\nu H E\sigma},$$

где $I_s^{(0)}$ – вероятность прохождения частицы через слой с $\sigma \equiv E\sigma$ в транспортном приближении. Используя асимптотику для $I_s^{(0)}$, получаем

$$I_2^{(0)} \approx C\, \mathrm{e}^{-\nu HE\sigma/L_0} - \mathrm{e}^{-\nu HE\sigma},$$

где коэффициент C близок к единице и может быть определен, как указано выше. Для примера с индикатрисой Хеньи–Гринстейна (см. раздел 5) имеем $\nu = 0{,}19$, $q_{\mathrm{tr}} = 0{,}09/0{,}19 \approx 0{,}4737$, $C = 0{,}959$ и $L_0 = 1{,}034$, т.е.

$$I_2^{(0)} = 0{,}959\, \mathrm{e}^{-0{,}1838H} - \mathrm{e}^{-0{,}19H}.$$

Для определения величины $I_1^{(0)}(H)$ прежде всего отметим, что при использовании транспортного приближения она выражается формулой

$$I_1^{(0)}(H) = E\, \mathrm{e}^{-\tau_{tr}^{(1)}(H)}, \tag{3.5}$$

где

$$\tau_{tr}^{(1)}(H) = \int_0^H [\sigma_{s,tr}(T) + \sigma_{s,tr}(t)] = \int_0^H \nu\sigma(t)\, dt.$$

Таким образом, величина $I_1^{(0)}(H)$ может быть асимптотически оценена формулой (3.3) с заменой L на ν^{-1}.

В качестве примера рассмотрим уже описанную выше задачу (см. также раздел 5) при $\lambda^{-1} = L = 5{,}4$, $H = 20$, $p = 0{,}5$, $\sigma^{(1)} = 0{,}6$, $\sigma^{(2)} = 1{,}4$, $E\sigma = 1$.

Формула (3.3) в транспортном приближении, т.е. при $L = 1{,}034/0{,}19$, приобретает вид

$$EI(\tau(H)) \asymp 0{,}8915\, \mathrm{e}^{-0{,}1582H}.$$

Проведенные методом Монте-Карло контрольные расчеты показали, что здесь целесообразно ввести дополнительный множитель, приближенно равный 1,035, и уточненная асимптотическая формула такова:

$$EI(\tau(H)) \asymp 0{,}9227\, \mathrm{e}^{-0{,}1582H}, \tag{3.6}$$

причем для $H = 20$ значение $EI(\tau(20)) \approx 0{,}03899$.

Для величины (3.5) формула (3.3) дает следующую оценку:

$$I_1^{(0)}(H) \asymp 0{,}8867\, \mathrm{e}^{-0{,}1628H}.$$

Окончательно для $I^{(0)}(H)$ получаем

$$I^{(0)}(H) \approx 0{,}959\, \mathrm{e}^{-0{,}1838H} - \mathrm{e}^{-0{,}19H} + 0{,}8867\, \mathrm{e}^{-0{,}1628H}$$

и $I^{(0)}(20) \approx 0{,}03610$, т.е. вероятность прохождения частицы через стохастический трехмерный слой с мелкомасштабной горизонтальной неоднородностью в данном случае на 7 % меньше аналогичной вероятности для стохастического горизонтально-однородного слоя.

4. Частично усредненные оценки метода Монте-Карло

1. Далее будут использованы обозначения: $r = (x, y, z)$, $X = (r, \rho)$ – точка столкновения в фазовом пространстве координат и направлений.

Рассмотрим случайную величину [2]

$$\xi = Q_N(\sigma) = \prod_{i=1}^{N} \frac{k\,(X_{i-1}, X_i, \mathrm{s})}{p\,(X_{i-1}, X_i)}\, D, \quad Q_0 = 1,$$

где $k(X', X; \sigma)$ – ядро интегрального уравнения переноса частиц [2] с параметрами

$$\sigma_s(r) = q\,\sigma(r), \quad \sigma_c(r) = (1-q)\,\sigma(r), \quad 0< q < 1, \tag{4.1}$$

причем q – вероятность выживания частицы при столкновении, т.е. рассеяния соответственно некоторой заданной индикатрисе $w_s(\mu)$; μ – косинус угла рассеяния. В качестве переходной плотности $p(X', X)$ моделируемой марковской цепи столкновений частиц рассматривается ядро с параметрами

$$\sigma_{s,0} = q_0\,\sigma_0\,, \quad \sigma_{c,0} = (1-q)\,\sigma_0\,, \quad 0< q_0 < 1 \tag{4.2}$$

и с той же индикатрисой; величина D равна нулю или единице в зависимости от варианта вылета, вероятность которого оценивается. Для данной реализации $\sigma(r)$ весовой множитель $k(X_{i-1}, X_i; \sigma)/p(X_{i-1}, X_i)$ представляет собой отношение плотностей вероятностей длины свободного пробега после рассеяния в точке X_{i-1} для моделей сред с параметрами (4.1), (4.2) и с заданной индикатрисой [2]. Искомая вероятность

$$P = E_\sigma\, M_\omega\, \{Q_N(\sigma)\,|\,\sigma\}$$

есть среднее значение оцениваемого функционала для случайной среды (ω – случайная траектория) [2].

Для первой модели случайного поля из раздела 2 имеем

$$\bar{p} = M_{\omega,\{\tau_i\}} \left\{ \prod_{j=1}^{m} \left(p \left(\frac{q\sigma^{(1)}}{q_0\,\sigma_0} \right)^{n_i} \exp\left(-(\sigma^{(1)}-\sigma_0)\, l_i\right) + (1-p) \left(\frac{q\sigma^{(2)}}{q_0\,\sigma_0} \right)^{n_i} \exp\left(-(\sigma^{(2)}-\sigma_0)\, l_i\right) \right) \right\}, \tag{4.3}$$

где m – число случайных слоев по x; σ_i – случайное значение σ в i-м слое; n_i – число столкновений частицы в i-м слое; l_i – длина пробега частицы в i-м слое; N – случайный номер последнего состояния цепи столкновений, т.е. x_N – точка поглощения или первая точка столкновения вне области, которая предполагается окруженной фиктивной средой, в которой $\sigma = \sigma_0$ и $q = 0$.

Для второй модели случайного поля формула (4.3) принимает вид

$$E_\sigma\, M_\omega\, \{Q_N(\sigma)\,|\,\sigma\} = M_{\omega,\{\tau_i\},\{t_j\},\{l_k\}} \left\{ \prod_{i=1}^{m_x} \prod_{j=1}^{m_y} \prod_{k=1}^{m_z} \left(p \left(\frac{q\sigma^{(1)}}{q_0\,\sigma_0} \right)^{n_{ijk}} \exp\left(-(\sigma^{(1)}-\sigma_0)\, l_{ijk}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (1-p) \left(\frac{q\sigma^{(2)}}{q_0\,\sigma_0} \right)^{n_{ijk}} \exp\left(-(\sigma^{(2)}-\sigma_0)\, l_{ijk}\right) \right) \right\}, \tag{4.4}$$

где n_{ijk} – число столкновений частицы в ijk-м параллелепипеде; l_{ijk} – длина пробега в нем; m_x – число слоев по x; m_y – число слоев по y; m_z – число слоев по z.

Как отмечалось выше, распределение случайной величины $\sigma_i(\sigma_{ijk})$ может быть не обязательно бернуллиевским. Оно может иметь любую функцию распределения $F_\xi(x)$. Если при этом удается вычислить аналитически математическое ожидание $E_\sigma\{Q_N(\sigma)\,|\,\omega, \{\tau_i\}\}$ при фиксированных траекториях и границах слоев, то получаются формулы, аналогичные формулам (4.3) и (4.4). Если же интеграл, представляющий собой математическое ожидание,

$$\int_R \left(\frac{q\sigma}{q_0\,\sigma_0} \right)^{n_i} \exp\left(-(\sigma-\sigma_0)\, l_i\right) dF_\xi(\sigma)$$

не удастся вычислить аналитически, то его можно заменить какой-либо приближенной квадратурной формулой.

2. Далее выводятся условия конечности дисперсии частично усредненной весовой оценки.

Дисперсия конечна, если конечна величина

$$E_\sigma\, M_\omega\, \{Q_N^2(\sigma)\,|\,\sigma\},$$

где

$$Q_N(\sigma) = \prod \left(\frac{q\sigma}{q_0\,\sigma_0}\right)^n \exp\,(-(\sigma-\sigma_0)\,l).$$

Здесь σ – случайное значение плотности в ijk-м параллелепипеде; n – число столкновений частицы в ijk-м параллелепипеде; l – длина пробега в нем. Рассмотрим выражение

$$Q_N^2(\sigma) = \prod \left(\frac{q^2\sigma^2}{q_0^2\,\sigma_0^2}\right)^n \exp\,(-2\,(\sigma-\sigma_0)\,l) = \prod \left(\frac{\bar{\sigma}}{q_0\,\sigma_0}\right)^n \frac{\exp\,(-(\bar{\sigma}-\sigma_0)\,l)}{\exp\,(-(\bar{\sigma}-\sigma_0)\,l)} \exp\,(-2\,(\sigma-\sigma_0)\,l),$$

где использовано обозначение

$$\bar{\sigma} = q^2\,\sigma^2/(q_0\,\sigma_0).$$

Если величина $\exp(-2(\sigma-\sigma_0)l)/\exp(-(\bar{\sigma}-\sigma_0)l)$ не превосходит 1, то среднее значение $Q_N^2(\sigma)$ не превосходит среднего значения оцениваемого функционала для сечения $\bar{\sigma}$, которое конечно.

Таким образом, относительно σ необходимо решать неравенство

$$\exp\,(-2\,(\sigma-\sigma_0)\,l + (\bar{s}-\sigma_0)\,l) \le 1,$$

которое равносильно неравенству

$$2\,(\sigma_0-\sigma) + (\bar{\sigma}-\sigma_0) \le 0$$

или, если положить $q_0 = 1$, $\sigma_0 = q^2$, неравенству

$$\sigma^2 - 2\sigma + q^2 \le 0. \qquad (4.5)$$

3. Рассмотрим теперь геометрическую часть алгоритма моделирования. Для каждой траектории строится разбиение заданного параллелепипеда на случайные элементарные параллелепипеды. Используется следующий алгоритм вычисления l_{ijk} – длин пробега в этих параллелепипедах.

Пусть l – длина свободного пробега (выбранная согласно σ_0); (nx, ny, nz) – номер параллелепипеда, в котором произошло очередное столкновение; $(nx1, ny1, nz1)$ – номер параллелепипеда, в котором было предшествующее столкновение. Сначала вычисляются части длины пробега l в каждом слое: по x: $lx[nx1],\ldots, lx[nx]$, сумма всех равна l; по y: $ly[ny1],\ldots, ly[ny]$, сумма всех равна l; по z: $lz[nz1],\ldots, lz[nz]$, сумма всех равна l.

Далее индексам i, j, k присваиваются текущие значения $nx1$, $ny1$, $nz1$ соответственно. Сравниваются три значения: $lx[i]$, $ly[j]$, $lz[k]$. Если $lx[i]$ наименьшее из них, то текущее значение $l[i, j]\,[k]$ увеличивается на $lx[i]$. Изменяется и текущее значение индекса i: если nx больше $nx1$, то значение i увеличивается на единицу, если nx меньше $nx1$, то значение i уменьшается на единицу. Если наименьшим является $ly[j]$ или $lz[k]$, то текущее значение $l[i, j]\,[k]$ увеличивается на $ly[j]$ или $lz[k]$ соответственно. Происходит также изменение текущего значения индекса j или k. Если же $nx1 = nx$ и $ny1 = ny$ и $nz1 = nz$, то $l[i, j]\,[k]$ увеличивается на l. Процесс заканчивается тогда, когда $i = nx$ и $j = ny$ и $k = nz$.

5. Тестовая задача

Рассматривается задача об оценке средней вероятности прохождения и средней вероятности вылета назад (альбедо) частицы для слоя вещества: $0 \le x \le H_1$, $0 \le y, z \le H_2$, плотность которого является случайным полем, описанным в разделе 2, причем p =0,5, $\sigma^{(1)} = 0{,}6$, $\sigma^{(2)} = 1{,}4$, $q = 0{,}9$.

Задача решается моделированием траекторий частиц по стандартной схеме [2]. Моделируется значение косинуса угла рассеяния μ соответственно индикатрисе Хеньи–Гринстейна [2]:

$$w_s(\mu) = \frac{1}{2}\frac{1-\mu_0^2}{(1+\mu_0^2-2\mu\mu_0)^{3/2}}\,;\ -1 \le \mu \le 1,\ \mu_0 = E\mu = 0{,}9.$$

Для такой индикатрисы при $q = 0{,}9$ имеем $L \approx 5{,}4$. Используется весовой алгоритм. Моделирование траекторий частиц осуществляется для детерминированной среды с постоянными $\sigma_0 = 0{,}81$ и $q_0 = 1$. Нетрудно заметить, что вследствие (4.5) здесь выполнены условия конечности дисперсии усредненной весовой оценки метода Монте-Карло. Траектории выпускаются из точки $(0, H_2/2, H_2/2)$ вдоль оси x и отслеживаются до момента выхода из области $0 \le x \le H_1$, $0 \le y, z \le H_2$. Вне области $q_0 = 0$.

Проводились расчеты для рассмотренных выше моделей случайной среды в двух вариантах:

А) $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = 1/L$, $H_1 = 20$, $H_2 = 100$;
В) $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = 1/L$, $H_1 = 20$, $H_2 = 40$.

Для каждого варианта было реализовано по $N = 100000$ траекторий.

Далее используются следующие обозначения: $P^{(p)}$ и $P^{(a)}$ – средняя вероятность прохождения и средняя вероятность альбедо для сред: $3s$ – трехмерная стохастическая; $1s$ – одномерная стохастическая; $1d$ – одномерная детерминированная с коэффициентом ослабления $\sigma \equiv E\sigma$; σ_N – оценка среднеквадратической погрешности результата.

Рассмотрим вкратце результаты, полученные для основного варианта А. Из табл. 1, 2 видно, что для трехмерной модели случайного поля средняя вероятность прохождения приблизительно на 9 % меньше, чем для одномерной модели.

Таблица 1

Результаты расчетов средней вероятности прохождения

	$P^{(p)}_{3s}$	σ_N	$P^{(p)}_{1s}$	σ_N
A	0,0348	0,0004	0,0381	0,0004
B	0,0338	0,0003	0,0366	0,0004

Таблица 2

Изменение средней вероятности прохождения при переходе от одномерной стохастической среды к трехмерной

	$P^{(p)}_{3s} - P^{(p)}_{1s}$	σ_N
A	– 0,0033	0,0003
B	– 0,0027	0,0002

Из табл. 3, 4 видно небольшое уменьшение среднего альбедо при переходе от детерминированной среды к трехмерной стохастической с той же средней плотностью: приблизительно на 2,8 %.

Таблица 3

Результаты расчетов среднего альбедо

	$P^{(a)}_{3s}$	σ_N	$P^{(a)}_{1s}$	σ_N	$P^{(a)}_{1d}$	σ_N
A	0,0662	0,0006	0,0676	0,0008	0,0681	0,0007
B	0,0647	0,0005	0,0653	0,0007	0,0671	0,0006

Таблица 4

Изменение среднего альбедо при переходе от детерминированной среды к трехмерной стохастической

	$P^{(a)}_{1d} - P^{(a)}_{3s}$	σ_N
A	0,0019	0,0004
B	0,0023	0,0003

Табл. 5 показывает, что переход от одномерной стохастической среды к трехмерной уменьшает среднее альбедо приблизительно на 2,1 %.

Таблица 5

Изменение среднего альбедо при переходе от одномерной стохастической модели к трехмерной

	$P^{(a)}_{1s} - P^{(a)}_{3s}$	σ_N
A	0,0014	0,0004
B	0,0006	0,0003

Для выяснения вопроса об изменении среднего альбедо при переходе от детерминированной среды к одномерной стохастической (табл. 6) был проведен дополнительный расчет для бесконечного слоя, причем было реализовано $N = 4000000$ траекторий; в результате была получена оценка

$$P^{(a)}_{1d} - P^{(a)}_{1s} \approx 0{,}0001.$$

Таблица 6

Изменение среднего альбедо при переходе от детерминированной среды к одномерной стохастической

	$P^{(a)}_{1d} - P^{(a)}_{1s}$	σ_N
A	0,0005	0,0006
B	0,0017	0,0004

Это изменение альбедо вполне естественно, так как для слоев большой оптической толщины τ альбедо P_a, очевидно, является выпуклой функцией аргумента τ (т.е. $P'_a(\tau) > 0$, $P''_a(\tau) < 0$), среднее значение которой меньше функции от среднего значения аргумента.

Отметим также, что оценка

$$P_{3s}^{(p)} - P_{1s}^{(p)} = -\,0{,}0033$$

для варианта А с приближенной среднеквадратической погрешностью $\sigma_N =$ = 0,0003 практически совпадает с аналитической оценкой

$$I^{(0)}(20) - EI(\tau(20)) = -\,0{,}00289,$$

полученной в разделе 3 для случая мелкомасштабной горизонтальной неоднородности. Это означает, что рассмотренная в разделе 3 модель удовлетворительна, даже если λ_y^{-1}, $\lambda_z^{-1} \approx L$; здесь, по-видимому, играет роль наличие неоднородности и по y, и по z.

Как уже было указано во введении, несколько неожиданным является тот факт, что переход от одномерной стохастической среды к трехмерной уменьшает не только вероятность прохождения, но и вероятность альбедо.

Сравнение результатов для вариантов А и В дает оценку влияния конечности горизонтального размера параллелепипеда на средние вероятности прохождения и альбедо от «центрированного» источника излучения, в частности, уменьшение горизонтального размера приводит к более существенному изменению среднего альбедо при переходе от детерминированной к стохастической среде.

Рассмотренные выше модели и оценки обладают довольно высокой степенью универсальности, так как ряд расчетов по методу Монте-Карло показал, что среднее значение радиации, проходящей через стохастический оптически толстый слой, в основном определяется корреляционной длиной среды, которая для пуассоновского поля равна λ^{-1}.

6. Заключение

На основе полученных результатов можно констатировать, что для радиационных расчетов в первом приближении стохастически-неоднородный слой можно заменить на однородный слой с полным коэффициентом ослабления $\sigma = \alpha L$, где L – диффузионная длина для заданных индикатрис рассеяния и коэффициента выживания q, а величина α определяется из одномерного пуассоновского приближения поля соответственно (3.3). При этом следует учитывать, что такая замена для слоя достаточно большой оптической толщины хорошо воспроизводит и значения альбедо на разных уровнях. Если существенной является горизонтальная неоднородность, то в случае большой оптической толщины в формуле (3.4) можно учитывать лишь первое слагаемое, т.е. определять значение α по прямо проходящему «дельта-рассеянному» излучению в транспортном приближении.

Предварительно усредненные таким способом константы можно уточнять, рассматривая полученные по методу Монте-Карло результаты для исходных сложных стохастических моделей сред как экспериментальные и затем оценивая константы упрощенных моделей с помощью методов решения параметрических обратных задач [1].

1. Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А. и др. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Новосибирск: Наука, 1976. 280 с. [Engl. Transl.: Springer-Verlag, 1980].
2. Михайлов Г.А. Асимптотика средней интенсивности излучения для некоторых моделей стохастических сред // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1982. Т. 18. С. 1289–1295.

Вычислительный центр СО РАН,
Новосибирск

Поступила в редакцию
10 декабря 1996 г.

G.A. Mikhailov, A.S. Serednyakov. **Numerical and Asymptotical Estimates of Influence of the Dimension of Stochastic Medium to the Radiation Transport.**

Change of integral characteristics of the radiation field when one-dimensional model of stochastic medium is replaced by three-dimensional model is considered using approximate asymptotical estimates and Monte-Carlo calculations. For the testing problem with the Henyey–Greenstein indicatrix, the introducing of additional horizontal stochasticity decreased probabilities of both penetration and albedo.