

**Г.С. Ривин, П.В. Воронина**

## **ПЕРЕНОС АЭРОЗОЛЯ В АТМОСФЕРЕ: ВЫБОР КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ**

Проведено сравнение широкого класса монотонных и квазимонотонных схем с порядком аппроксимации не выше второго, применяемых в задачах метеорологии, газовой динамики и физики плазмы. Такой выбор порядка аппроксимации связан с тем, что значения компонент вектора скорости в большинстве моделей атмосферы находятся с точностью не выше второго порядка. Численные эксперименты показали, что из исследованных схем второго порядка для решения уравнения переноса неотрицательных характеристик при моделировании переноса аэрозоля имеет смысл использовать схему Ботта.

### **1. Введение**

В [1] описана развиваемая в ИВТ СО РАН система MAP моделирования атмосферных процессов и переноса примесей в регионе для проведения с помощью вычислительного эксперимента экспертных оценок с помощью данных наблюдений за метеоусловиями и выбросами в атмосферу. Проблемы, которые необходимо решать при этом, включают в себя задачи, связанные с переносом массовых долей воды и водяного пара, с плотностью воздуха и интенсивностью аэрозольной субстанции, мигрирующей вместе с потоком воздуха. В [2] отмечено, что для таких задач требование монотонности используемых конечно-разностных схем и сохранение неотрицательности значений решения являются основными, так как ошибка в знаке для этих функций может привести к совершенно неверному описанию связанных с ними процессов в атмосфере. основополагающей работой по изучению свойств монотонных схем является работа С.К. Годунова [3]. Описание дальнейшего развития монотонных схем и их применение можно найти в [2, 4, 5].

В [6] для задач прогноза погоды, экологии и теории климата проведено сравнение двух схем (вариантов схемы Ван Лира [7] и схемы коррекции потоков [4]), из них выбрана наиболее удачная схема (вариант [8] схемы Ван Лира) и на примере одной из задач экологии с помощью численного эксперимента с реальной информацией показано, что требование монотонности в задачах переноса является фундаментальным, и отмечена перспективность применения монотонных схем при все более нарастающем объеме вычислений в задачах прогноза погоды, экологии и теории климата. Эта схема в дальнейшем была использована для исследования глобального переноса примесей [9].

В данной работе проведено сравнение более широкого, чем в [6], класса монотонных схем за счет привлечения схем, применяемых как в задачах метеорологии (схемы [10–13]), так и в задачах газовой динамики и физики плазмы. При этом расширение класса сравниваемых схем за счет используемых в задачах газовой динамики и физики плазмы произведено на основе проведенного в [14–17] тщательного исследования практически всех современных монотонных схем. Кроме того, в численных экспериментах в качестве начальных данных нами привлечены не только функции с большими градиентами, но и достаточно гладкие. Расширение класса сравниваемых схем позволило выбрать более эффективный метод, чем рекомендуемый в [6].

### **2. Постановка задачи**

Для сравнения рассматриваются следующие три группы схем сквозного счета с порядком аппроксимации не выше второго. Такой выбор порядка аппроксимации связан с тем, что значения компонент вектора скорости в большинстве моделей атмосферы находятся с точностью не выше второго порядка.

Первая группа содержит монотонные схемы, используемые при решении задач метеорологии: модифицированную схему Ван Лира в примененном в [6] виде; схему Ботта [10]; схему Смоляркевича [11–13].

Вторая группа содержит монотонные схемы, показавшие наиболее хорошие результаты при сравнении в [16] довольно широкой группы схем: схему с ограничителем Ван Лира [7]; схему с ограничителем UNO (Uniformly NonOscillatory scheme) [18]; схему с ограничителем SUPERBEE [19]; схему со сжатием Хартена [20].

Третья группа для полноты сравнения содержит две ставшие уже классическими схемы [21]: монотонную явную схему против потока; немонотонную схему Лакса – Вендроффа.

Оценка порядка аппроксимации схем, использованных в данной работе, проведена авторами соответствующих схем в указанных выше статьях.

Сравнение проводится на группе тестов, показательных для метеорологических задач. Эта группа включает в себя решения следующего модельного уравнения:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad (2)$$

где

$$u = \text{const} > 0, \quad a \leq x \leq b, \quad 0 < t < T.$$

Решение этой задачи, как известно, имеет вид

$$\varphi(x, t) = \varphi_0(x - ut). \quad (3)$$

В качестве боковых граничных условий используются условия периодичности.

### 3. Краткое описание сравниваемых схем

Уравнение (1) является частным случаем уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial F(\varphi)}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

(в уравнении (1)  $F(\varphi) = u\varphi$ ).

Рассмотрим следующие сетки и сеточные функции:

$$D_h^\varphi = \{x_j; x_j = a + (J + j)h, j = -J, \dots, J\},$$

$$D_h^F = \{x_{j+1/2}; x_{j+1/2} = x_j + h/2, j = -J, \dots, J-1\},$$

$$D_\tau = \{t_n; t_n = n\tau, n = 0, \dots, N\},$$

$$D(\varphi^{h\tau}) = D_h^\varphi \times D_\tau,$$

$$D(F^{h\tau}) = D_h^F \times D_\tau,$$

где  $D(\varphi^{h\tau})$  и  $D(F^{h\tau})$  – области определения сеточных функций  $\varphi^{h\tau}$  и  $F^{h\tau}$  соответственно и  $b = a + 2Jh, T = N\tau$ .

Если обозначить

$$\lambda = \tau/h, \quad c_j^n = \lambda u_j^n, \quad \varphi_j^n = \varphi^{h\tau}(x_j, t_n), \quad F_{j+1/2}^n = F^{h\tau}(x_{j+1/2}, t_n),$$

где  $c_j^n$  – число Куранта, то, следуя [17], в качестве разностной схемы уравнения (4) можно взять следующую:

$$\varphi_j^{n+1} = \varphi_j^n - \lambda(F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n), \quad (5)$$

где

$$F_{j+1/2}^n = u_{j+1/2} \frac{\varphi_{j+1/2}^r + \varphi_{j+1/2}^l}{2} - |u_{j+1/2}| \frac{\varphi_{j+1/2}^r - \varphi_{j+1/2}^l}{2}$$

и

$$\varphi_{j+1/2}^r = \varphi_{j+1}^r - \frac{1}{2} (1 + c_{j+1}^n) L_{j+1}^n,$$

$$\varphi_{j+1/2}^l = \varphi_j^n + \frac{1}{2} (1 - c_j^n) L_j^n.$$

Значения  $L_j^n$  и  $L_{j+1}^n$  сеточной функции  $L^{ht}$  (функцию  $L^{ht}$  принято называть ограничителем) зависят от приращения функции  $\varphi^{ht}$  на интервалах  $(x_{j-1}, x_j)$  и  $(x_j, x_{j+1})$  соответственно.

Используя следующие обозначения:

$$\Delta\varphi_{j+1/2}^n = \varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n, \quad \Delta\varphi_j^n = \varphi_{j+1}^n - \varphi_{j-1}^n,$$

$$\Delta^2\varphi_j^n = \varphi_{j+1}^n - 2\varphi_j^n + \varphi_{j-1}^n,$$

$$\text{MINMOD}(x, y) = \text{sgn}(x) \max\{0, \min(|x|, y \text{sgn}(x))\},$$

$$\text{MAXMOD}(x, y) = \text{sgn}(x) \max(|x|, |y|),$$

выпишем, также следуя [17], конкретный вид рассмотренных нами ограничителей:

– ограничитель ВЛ (Ван Лира)

$$L_j^n = \begin{cases} \text{sgn}(|\Delta\varphi_{j+1/2}^n|) \min(2|\Delta\varphi_{j-1/2}^n|, |\Delta\varphi_j^n|/2, 2|\Delta\varphi_{j+1/2}^n|), \\ 0, & \text{если } \Delta\varphi_{j+1/2}^n \Delta\varphi_{j-1/2}^n \leq 0; \end{cases} \quad (6)$$

– ограничитель ВЛм (Ван Лира, модифицированный)

$$L_j^n = \frac{1}{2} \Delta\varphi_{j+1/2}^n - \frac{1}{2} S_j \Delta^2\varphi_j^n, \quad (7)$$

$$S_j = \frac{|\Delta\varphi_{j+1/2}^n| - |\Delta\varphi_{j-1/2}^n|}{|\Delta\varphi_{j+1/2}^n| + |\Delta\varphi_{j-1/2}^n|},$$

– ограничитель SB (Superbee)

$$L_j^n = \text{MAXMOD} \{ \text{MINMOD} (2\Delta\varphi_{j+1/2}^n, \Delta\varphi_{j-1/2}^n),$$

$$\text{MINMOD} (\Delta\varphi_{j+1/2}^n, 2\Delta\varphi_{j-1/2}^n) \}, \quad (8)$$

– ограничитель UNO

$$L_j^n = \text{MINMOD} (\Delta\varphi_{j+1/2}^n - \frac{1}{2} d_{j+1/2}^n, \Delta\varphi_{j-1/2}^n + \frac{1}{2} d_{j-1/2}^n), \quad (9)$$

$$d_{j-1/2}^n = \text{MINMOD} (\Delta^2\varphi_{j+1}^n, \Delta^2\varphi_j^n);$$

– сжатие Хартена

$$L_j^n = \text{MINMOD} (\Delta\varphi_{j+1/2}^n, \Delta\varphi_{j-1/2}^n) (1 + w \theta_j), \quad (10)$$

$w$  – параметр сжатия (по рекомендации [20] в экспериментах использовано  $w = 2$ ) и

$$\theta_j = \frac{|\Delta\varphi_{j+1/2}^n - \Delta\varphi_{j-1/2}^n|}{|\Delta\varphi_{j+1/2}^n| + |\Delta\varphi_{j-1/2}^n|}.$$

Остановимся теперь на схемах Смоляркевича [11] и Ботта [10]. В качестве основы для построения схемы Смоляркевича выбирается явная схема (5) «против потока» с

$$F_{j+1/2}^n = \frac{u_{j+1/2}^n + |u_{j+1/2}^n|}{2} \Phi_j^n + \frac{u_{j+1/2}^n - |u_{j+1/2}^n|}{2} \Phi_{j+1}^n. \quad (11)$$

Эта схема первого порядка аппроксимации является монотонной, но, как известно, она обладает большой счетной вязкостью ([21]). Для того чтобы уменьшить влияние этой вязкости, вводится дополнительный корректирующий шаг, являющийся аналогом первого, но в качестве скорости переноса берется «антидиффузионная скорость». Для реализации этого шага определяется «антидиффузионная скорость»

$$\tilde{u}_{j+1/2} = \frac{(|u_{j+1/2}| h - \tau u_{j+1/2}^2)(\Phi_{j+1}^* - \Phi_j^*)}{(\Phi_j^* + \Phi_{j+1}^* + \varepsilon)h}, \quad (12)$$

где  $\varepsilon$  – малый положительный параметр, определяемый свойствами вычислительной машины ( $\varepsilon = 2^{-m}$ ,  $m$  – количество бит, используемых для записи мантиссы вещественного числа, т.е. так называемый машинный ноль).

Заметим, что, вообще говоря, аналогичная идея была высказана ранее в работе [4].

Схема Ботта является обобщением схемы интегральных потоков [22] за счет дополнительных шагов, которые позволяют сохранять неотрицательность решения (при неотрицательных начальных значениях решения) и уменьшают фазовые ошибки. Основу схемы Ботта составляет явная схема (5) с

$$F_{j+1/2}^n = \frac{i_{j+1/2}^+}{i_{ij}} \Phi_j^n - \frac{i_{j+1/2}^-}{i_{ij+1}} \Phi_{j+1}^n, \quad (13)$$

где

$$i_{j+1/2}^+ = \max(0, I_j^+), \quad i_{j+1/2}^- = \max(0, \bar{I}_j), \\ i_{ij} = \max(I_{ij}, i_{ij+1/2}^+ + \bar{i}_{ij-1/2}^- + \varepsilon).$$

Здесь  $\varepsilon$  имеет тот же смысл, что и в (12).

$$I_j^+ = \int_{1/2-c_j^+}^{1/2} \Phi_{j,i}^n(x') dx', \quad (14)$$

$$\bar{I}_j = \int_{-1/2}^{-1/2+c_j^-} \Phi_{j+1,i}^n(x') dx', \quad (15)$$

$$I_j = \int_{-1/2}^{1/2} \Phi_{j,i}^n(x') dx', \quad (16)$$

где  $c_j^{n\pm} = \pm(c_j^n \pm |c_j^n|)/2$ .

Для вычисления интегралов функция  $\Phi$  представляется в виде полинома

$$\Phi_{j,i}^n(x') = \sum_{k=0}^l a_{j,k} x'^k, \quad x' = (x - x_j)/h \quad (17)$$

и  $-1/2 \leq x' \leq 1/2$ .

Тогда

$$I_j^+ = \sum_{k=0}^l \frac{a_{j,k}}{(k+1)2^{(k+1)}} [1 - (1 - 2c_j^+)^{k+1}], \quad (18)$$

$$I_l^- = \sum_{k=0}^l \frac{a_{j+1,k}}{(k+1) 2^{(k+1)}} (-1)^k [1 - (1 - 2c_j^-)^{k+1}], \quad (19)$$

$$I_l = \sum_{k=0}^l \frac{a_{j,k}}{(k+1) 2^{(k+1)}} [(-1)^k + 1]. \quad (20)$$

В экспериментах  $l = 4$  и

$$a_{j,0} = \varphi_j, \quad a_{j,1} = \frac{1}{12} (-\varphi_{j+2} + 8\varphi_{j+1} - 8\varphi_{j-1} + \varphi_{j-2}),$$

$$a_{j,2} = \frac{1}{24} (-\varphi_{j+2} + 16\varphi_{j+1} - 30\varphi_j + 16\varphi_{j-1} - \varphi_{j-2}),$$

$$a_{j,3} = \frac{1}{12} (\varphi_{j+2} - 2\varphi_{j+1} + 2\varphi_{j-1} - \varphi_{j-2}),$$

$$a_{j,4} = \frac{1}{24} (\varphi_{j+2} - 4\varphi_{j+1} + 6\varphi_j - 4\varphi_{j-1} + \varphi_{j-2}).$$

Отметим, что в [23] для повышения эффективности схемы Ботта предложено использовать метод трапеции вместо точного интегрирования.

#### 4. Численные эксперименты

Все расчеты были проведены с различными числами Куранта, меньшими 1, при следующих значениях параметров: шаг по пространству  $h = 3750$  м, время  $T = 24$  ч, скорость переноса  $u = 5$  м/с,  $a = -b = -25$  h. Значения этих параметров совпадают с [6] (в [6]  $T$  равно 3 ч 20 мин). Хотя значения  $a$  и  $b$  для удобства изменены по сравнению с [6], но т.к. длина интервала не изменена, то это отличие не имеет никакого влияния на результаты расчетов.

Для проведения численных экспериментов в качестве начальных были выбраны следующие функции:

$$\varphi_0^{(1)}(x_j) = 0,5 + 0,5 \sin [4\pi x_j/(b-a)]; \quad (21)$$

$$\varphi_0^{(2)}(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{-10} < x_j < x_0, \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad (22)$$

$$\varphi_0^{(3)}(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j = x_{-5}, \\ 0, & \text{если } x_j \neq x_{-5}; \end{cases} \quad (23)$$

$$\varphi_0^{(4)}(x_j) = \begin{cases} 0,2 x_j + 2, & \text{если } x_{-10} \leq x_j \leq x_{-5}, \\ -0,2 x_j, & \text{если } x_{-5} \leq x_j \leq x_0. \end{cases} \quad (24)$$

Отметим, что с помощью задания начального значения решения  $\varphi_0^{(1)}$  моделируется перенос переменной облачности большого масштаба;  $\varphi_0^{(2)}$  – облачного равномерного образования большого масштаба;  $\varphi_0^{(3)}$  – выброса примесей в одной точке;  $\varphi_0^{(4)}$  – неравномерно распределенной субстанции.

Для сравнения результатов использованы следующие величины:

– средняя абсолютная ошибка решения конечно-разностной задачи

$$\varepsilon_a = \left\| (\varphi(x, T))_h - \varphi^h \right\|_1 / M, \quad (25)$$

– ошибка в нахождении максимального значения

$$\varepsilon_{\max} = \left\| \varphi(x, T) \right\|_C - \left\| \varphi^h \right\|_{\infty}, \quad (26)$$

– максимальная абсолютная ошибка решения конечно-разностной задачи

$$\varepsilon_{\infty} = \left\| (\varphi(x, T))_h - \varphi^h \right\|_{\infty}. \quad (27)$$

Здесь  $\varphi^h = \varphi^{h\tau} |^N$  – решение конечно-разностного уравнения при  $t = T$ ;  $M = 2J + 1$  – количество узлов сетки  $D_h^\varphi$ ;  $(\varphi(x, T))_h$  – проекция решения исходного дифференциального уравнения при  $t = T$  в пространство сеточных функций  $\varphi^h$  с областью определения  $D_h^\varphi$ , задаваемая соотношением

$$(\varphi(x, T))_h = \{\varphi(x_j, T); j = -J, \dots, J\}.$$

В качестве норм использованы следующие величины:

$$\|\varphi^h\|_1 = \sum_{j=-J}^J |\varphi_j^h|, \quad \|\varphi^h\|_\infty = \max_{-J \leq j \leq J} |\varphi_j^h|,$$

$$\|\varphi(x, T)\|_C = \max_{a \leq x \leq b} |\varphi(x, T)|.$$

При описании экспериментов использованы следующие обозначения: Я – явная схема; ЛВ – схема Лакса–Вендроффа; С – схема Смоляркевича; ВЛ – схема с ограничителем Ван Лири; ВЛм – схема Ван Лири (модифицированная); UNO – схема с ограничителем UNO; Б – схема Ботта; СВ – схема с ограничителем SUPERBEE; X – схема со сжатием Хартена.

В табл. 1 и на рис. 1 приведены результаты расчетов с решением типа синусоиды. Из таблицы видно, что наихудшие результаты показала явная схема: большая абсолютная ошибка и большое отклонение от точного решения (максимум снизился почти в 2 раза). Небольшая ошибка в нахождении максимального значения в схеме Лакса–Вендроффа говорит о, казалось бы, хороших результатах, полученных с помощью этой схемы, но очень большая средняя абсолютная ошибка показывает, что это совсем не так из-за достаточно большой фазовой ошибки. Схема Смоляркевича тоже неудачна для данного начального поля. С ней, пожалуй, сравнима модифицированная схема Ван Лири, использованная в [6]. Схема с ограничителем Ван Лири дает неплохие результаты. Что касается схемы с ограничителем UNO, то хотя она дает максимальное значение с небольшой ошибкой, но довольно большая средняя абсолютная ошибка говорит о том, что схема не очень хороша для такой начальной функции. Из оставшихся схем схема Ботта показывает лучший результат по сравнению со схемами с ограничителем SUPERBEE и сжатием Хартена и тем более по сравнению с указанными выше. Отметим также, что при разных числах Куранта средняя абсолютная ошибка и ошибка в нахождении максимального значения для схемы Ботта не изменяют первые три значащие цифры соответствующих значений.

Таблица 1

Ошибки решения для начального поля в виде синусоиды

Схема	c = 0,2		c = 0,4		c = 0,6		c = 0,8	
	$\varepsilon_a$	$\varepsilon_{\max}$	$\varepsilon_a$	$\varepsilon_{\max}$	$\varepsilon_a$	$\varepsilon_{\max}$	$\varepsilon_a$	$\varepsilon_{\max}$
Я	0,300	-0,472	0,282	-0,443	0,244	-0,383	0,165	-0,259
ЛВ	0,077	-0,006	0,065	-0,011	0,046	-0,011	0,019	-0,007
С	0,092	-0,098	0,076	-0,067	0,059	-0,041	0,039	-0,015
ВЛм	0,054	-0,107	0,042	-0,092	0,034	-0,074	0,023	-0,048
ВЛ	0,038	-0,072	0,030	-0,062	0,024	-0,051	0,019	-0,034
UNO	0,039	-0,019	0,023	-0,016	0,013	-0,010	0,011	-0,006
Б	0,016	-0,002	0,016	-0,002	0,016	-0,002	0,016	-0,002
СВ	0,031	-0,044	0,028	-0,041	0,024	-0,034	0,019	-0,022
X	0,025	-0,027	0,022	-0,027	0,019	-0,023	0,017	-0,014

В табл. 2 и на рис. 2 приведены результаты решения уравнения переноса с начальным полем в виде прямоугольной ступеньки, указанным в (22). Для этого начального импульса все схемы можно подразделить на три группы. Наиболее неудачные результаты показали явная схема и схемы Лакса–Вендроффа и Смоляркевича. Вторая группа состоит из схем Ван Лири, модифицированной Ван Лири и с ограничителем UNO, показавших результаты, которые значительно лучше, чем у схем первой группы, но они заметно уступают схемам из третьей группы, состоящей из схем Ботта, с ограничителем SUPERBEE и сжатием Хартена. У этой группы схем средние абсолютные ошибки разностного решения близки, но ошибки в определении максимального значения меньше у схемы со сжатием Хартена. Кроме того, был проведен эксперимент с переносом на более длительный, до 10 сут, срок. В этом случае схема со сжатием

Хартена по-прежнему была лучше, хотя схемы с ограничителем SUPERBEE и Ботта давали близкие к ней результаты. На рис. 3 приведены графики решений, найденных для разных чисел Куранта с помощью схемы со сжатием Хартена. Из рисунка видно, что эта схема дает величину ошибки примерно одного порядка (за исключением расчетов с числом Куранта, равным 0,8), причем результаты расчетов, несмотря на столь длительный срок, по-прежнему достаточно хорошие.

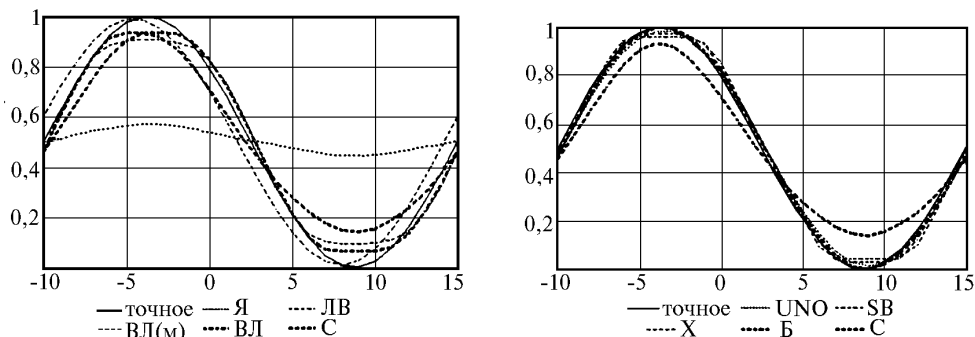


Рис. 1. Точное и приближенные решения для  $T = 24$  ч и  $c = 0,4$ , найденные для синусоидального начального поля

Таблица 2

Ошибки решения для начального поля в виде прямоугольной ступеньки

Схема	$c = 0,2$		$c = 0,4$		$c = 0,6$		$c = 0,8$	
	$\epsilon_a$	$\epsilon_{\max}$	$\epsilon_a$	$\epsilon_{\max}$	$\epsilon_a$	$\epsilon_{\max}$	$\epsilon_a$	$\epsilon_{\max}$
Я	0,232	-0,639	0,216	-0,588	0,191	-0,508	0,146	-0,350
ЛВ	0,151	0,016	0,132	0,016	0,108	0,047	0,083	0,108
С	0,123	-0,222	0,110	-0,160	0,095	-0,091	0,076	0,020
Влм	0,088	-0,172	0,078	-0,135	0,067	-0,089	0,054	-0,033
ВЛ	0,072	-0,096	0,063	-0,067	0,056	-0,039	0,047	-0,010
UNO	0,077	-0,037	0,070	-0,008	0,064	0,005	0,055	0,003
Б	0,049	-0,114	0,046	0,098	0,041	0,072	0,035	0,069
SB	0,038	-0,023	0,036	-0,019	0,035	-0,012	0,032	-0,004
X	0,044	-0,006	0,042	-0,005	0,039	-0,002	0,037	0,005

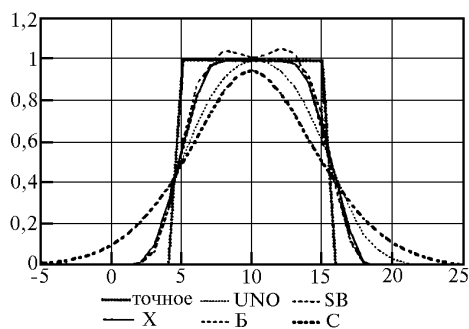


Рис. 2. То же, что на рис. 1, для схем UNO, SUPERBEE, Хартена, Ботта, Смоляркевича для начального поля с шириной ступеньки, равной 9 шагам сетки

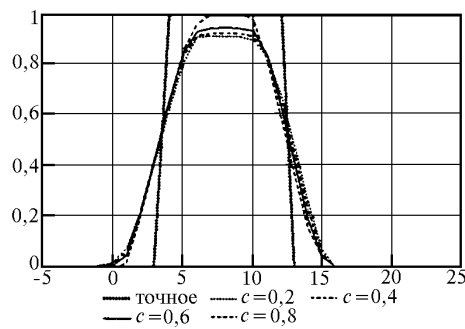


Рис. 3. Точное и приближенные решения для  $T = 240$  ч и различных значений числа Куранта, найденные с помощью схемы Хартена для начального поля с шириной ступеньки, равной 9 шагам сетки

На рис. 4 приведены результаты экспериментов, в которых начальным полем являлся прямоугольный импульс с уменьшением ширины «ступеньки». Из рисунка следует, что все схемы сохраняют тот же профиль решения, что и при ширине «ступеньки» из 9 точек, но максимальное значение сильно понижено, при этом решение, полученное с помощью схемы Ботта, меньше остальных отклонено от максимума точного решения.

Как предельное уменьшение ступеньки можно рассматривать начальное поле в виде точечного источника, указанного в (23). В табл. 3 для всех схем приведены ошибки решений в этом случае. Из таблицы видно, что хотя схемы дают примерно одинаковые ошибки, но несколько лучшие результаты показывает схема Ботта.

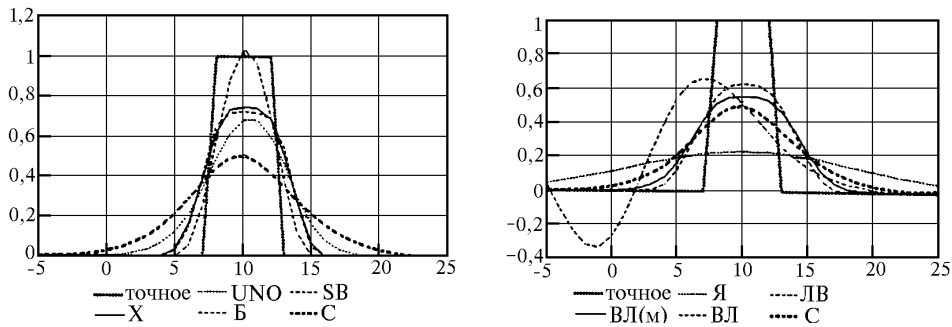


Рис. 4. То же, что на рис. 1, но для начального поля с шириной ступеньки, равной 5 шагам сетки

Таблица 3

Ошибки решения для начального поля в виде точечного импульса

Схема	$c = 0,2$		$c = 0,4$		$c = 0,6$		$c = 0,8$	
	$\epsilon_a$	$\epsilon_{\max}$	$\epsilon_a$	$\epsilon_{\max}$	$\epsilon_a$	$\epsilon_{\max}$	$\epsilon_a$	$\epsilon_{\max}$
Я	0,038	-0,958	0,038	-0,952	0,037	-0,941	0,036	-0,917
ЛВ	0,064	-0,864	0,055	-0,856	0,049	-0,847	0,043	-0,818
С	0,036	-0,908	0,035	-0,897	0,035	-0,883	0,034	-0,854
ВЛм	0,035	-0,894	0,035	-0,885	0,034	-0,871	0,033	-0,841
ВЛ	0,034	-0,878	0,034	-0,869	0,034	-0,855	0,032	-0,825
UNO	0,034	-0,087	0,034	-0,857	0,033	-0,839	0,032	-0,808
Б	0,030	-0,776	0,030	-0,766	0,029	-0,751	0,028	-0,725
SB	0,034	-0,855	0,033	-0,848	0,033	-0,835	0,032	-0,807
Х	0,033	-0,851	0,033	-0,844	0,033	-0,831	0,032	-0,804

В табл. 4 представлены оценки для начального поля в виде треугольного импульса. Графики решений даны на рис. 5. В этом случае бесспорное преимущество надо отдать схеме Ботта. Остальные схемы сравнимы между собой, чуть лучшие результаты среди них показали схемы с ограничителем SUPERBEE и сжатием Хартена.

Таблица 4

Ошибки решения для начального поля в виде треугольного импульса

Схема	$c = 0,2$		$c = 0,4$		$c = 0,6$		$c = 0,8$	
	$\epsilon_a$	$\epsilon_{\max}$	$\epsilon_a$	$\epsilon_{\max}$	$\epsilon_a$	$\epsilon_{\max}$	$\epsilon_a$	$\epsilon_{\max}$
Я	0,128	-0,797	0,119	-0,767	0,107	-0,719	0,083	-0,619
ЛВ	0,131	-0,393	0,109	-0,328	0,088	-0,350	0,058	-0,287
С	0,072	-0,551	0,063	-0,506	0,053	-0,451	0,041	-0,340
ВЛм	0,052	-0,493	0,045	-0,457	0,036	-0,406	0,023	-0,319
ВЛ	0,040	-0,427	0,034	-0,393	0,027	-0,347	0,015	-0,205
UNO	0,044	-0,381	0,033	-0,333	0,023	-0,272	0,015	-0,205
Б	0,010	-0,130	0,010	-0,123	0,010	-0,113	0,010	-0,100
SB	0,023	-0,320	0,021	-0,304	0,018	-0,273	0,015	-0,221
Х	0,021	-0,303	0,018	-0,285	0,016	-0,256	0,012	-0,210

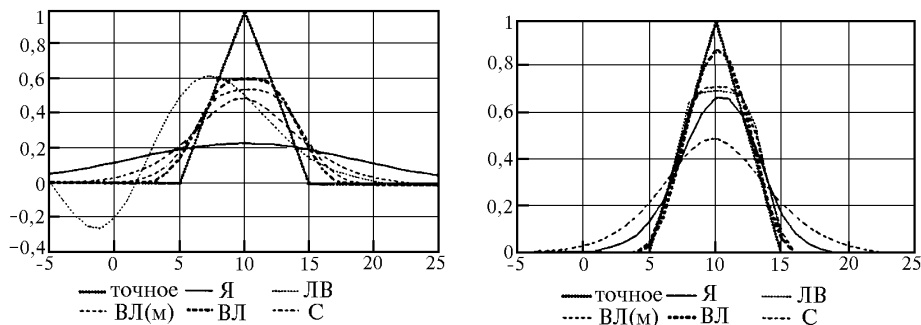


Рис. 5. То же, что на рис. 1, но для начального поля с треугольным импульсом



## 5. Заключение

Численные эксперименты, проведенные для различных тестов с одномерным уравнением переноса, показали, что наиболее удачные результаты для избранного класса тестов дала схема Ботта. Для начального поля в виде прямоугольного импульса с достаточно широкой ступенькой лучшие результаты получены с помощью схемы со сжатием Хартена. Неожиданными оказались сравнительно низкие свойства схемы Смоляркевича. Остальные схемы (конечно, за исключением явной схемы и схемы Лакса–Вендроффа) показали для части тестов довольно неплохие характеристики, хотя модифицированная схема Ван Лиры не показала на этих тестах преимущества перед исходной формулировкой.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант N 95-05-15581.

1. Ривин Г. С. // Оптика атмосферы и океана. 1996. Т. 9. N 6. С. 780–785.
2. Марчук Г. И., Дымников В. П., Залесный В. Б. Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации. Л.: Гидрометеиздат, 1987. 296 с.
3. Годунов С. К. // Мат. сб. 1959. Т. 47(89). N 3. С. 271–306.
4. Boris J. P., Book D. L. // J. Comp. Phys. 1973. V. 11. N 1. P. 38–69.
5. Карамышев В. Б. Монотонные схемы и их приложение к газовой динамике. Новосибирск: НГУ, 1994. 100 с.
6. Дымников В. П., Алюян А. Е. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1990. Т. 26. N 12. С. 1237–1247.
7. Van Leer B. // J. Comp. Phys. 1974. V. 14. P. 360–370.
8. Герасимов Б. П., Елизарова Т. Г., Турчанинов В. И. Применение метода коррекции потоков для решения уравнения Навье–Стокса. М., 1983. 26 с. (Препринт / ИПМ АН СССР, N 25).
9. Марчук Г. И., Алюян А. Е. // Изв. АН. Сер. ФАО. 1995. Т. 31. N 5. С. 597–606.
10. Bott A. // Mon. Wea. Rev. 1989. V. 117. P. 1006–1015.
11. Smolarkiewicz P. K. // Mon. Wea. Rev. 1983. V. 111. P. 479–486.
12. Smolarkiewicz P. I., Clark T. L. // J. Comp. Phys. 1986. V. 67. P. 396–438.
13. Smolarkiewicz P. K., Grabowski W. W. // J. Comp. Phys. 1990. V. 86. P. 355–375.
14. Белецкий Ю. М., Войнович П. А., Ильин С. А. и др. Сравнение квазимоноотонных разностных схем сквозного счета. 1. Стационарные течения. Л., 1989. 67 с. (Препринт / ФТИ им. А. Ф. Иоффе АН СССР, N 1383).
15. Ильин С. А., Тимофеев Е. В. Сравнение квазимоноотонных разностных схем сквозного счета. 2. Линейный перенос возмущений. Л., 1991. 30 с. (Препринт / ФТИ им. А. Ф. Иоффе АН СССР, N 1550).
16. Ильин С. А., Тимофеев Е. В. // Математическое моделирование. 1992. Т. 4. N 3. С. 62–75.
17. Ильин С. А., Тимофеев Е. В. Сравнение квазимоноотонных разностных схем сквозного счета. 3. Нестационарные задачи газовой динамики. СПб., 1993. 49 с. (Препринт / ФТИ им. А. Ф. Иоффе РАН, N 1611).
18. Harten A., Osher S. // SIAM J. Numer. Anal. 1987. V. 24. N 2. P. 279–309.
19. Roe P. L. // Lect. Appl. Math. 1985. V. 22. N 2. P. 163–195.
20. Harten A. A. // J. Comp. Phys. 1983. V. 49. P. 357–393.
21. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.
22. Tremback C. J., Powell J., Cotton W. B., Pielke R. A. // Mon. Wea. Rev. 1987. V. 115. P. 540–555.
23. Syrakov D. On a PC-oriented Eulerian multi-level model for long-term calculations of the regional sulphur deposition: Proc. 21st NATO International Technical meeting on Air-Pollution Modelling and its Applications. 6–10 Nov., 1995. Baltimore, Maryland, USA. P. 125–129.

Институт вычислительных технологий СО РАН,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
16 января 1997 г.

G. S. Rivin, P. V. Voronina. **The Transport of the Aerosol in the Atmosphere: the Choice of the Finite-Difference Scheme.**

The comparison of a variety of monotonous and quasimonotonous schemes with the approximation order at most the second one, used in meteorology, gas dynamics, and plasma physics, was carried out. Such choice of the approximation order is due to the fact that it is used in calculation of wind velocity components in most atmospheric models. Numerical experiments have shown the Bott scheme to fit best for solution of the transfer equation with non-negative characteristics for modeling of the aerosol transport comparative to other investigated schemes of the second order.