

Ю.Н. Исаев, Е.В. Захарова

**ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ КАРУНЕНА–ЛОЭВА–ОБУХОВА
В БАЗИСАХ УОЛША И ХААРА**

Найдены аналитические соотношения, позволяющие осуществить переход в разложениях фазы оптической волны из базисов Хаара и Уолша, характеризующихся простотой реализации в корректирующих устройствах систем адаптивной оптики, к статистически оптимальному базису Карунена–Лоэва–Обухова, наиболее полно и точно описывающему критерию приближения адаптивной системы к идеальной дифракционно-ограниченной системе. Полученные соотношения и использование алгоритмов быстрых преобразований Уолша и Хаара позволяют приблизиться к реальным временным масштабам при воспроизведении волновых фронтов. Кроме того, полученная матрица преобразования позволяет учесть влияние внешнего масштаба турбулентности.

В адаптивных оптических системах (АОС) при модальной коррекции волнового фронта фазу волны представляют в виде разложения по заданной системе базисных функций [1–3]. Основным критерием при выборе устройств формирования волнового фронта является простота построения корректирующих устройств [2, 4]. В этом случае коррекцию волновых фронтов предпочтительно осуществлять в базисе дискретных функций Уолша и вэйвлетов Хаара, которые характеризуются простотой технической реализации и относятся к разряду быстрых преобразований. Эти функции принимают только два значения: +1 и –1, в силу чего удается избежать операции умножения при реализации алгоритмов на ЭВМ (рис. 1).

В связи с этим время выполнения дискретного преобразования Уолша в 10 раз меньше времени быстрого преобразования Фурье того же самого массива данных [5]. В свою очередь, вэйвлет-преобразование Хаара является более быстрым по сравнению с преобразованием Уолша. Вэйвлеты представляют собой локальный базис, устойчивый к шумам в исходных данных, т.е. увеличивающий отношение сигнал-шум и позволяющий выделять локальные сингулярности типа импульса, ступеньки, степенных особенностей [6–8]. Такие качества базиса позволяют приблизиться к масштабам реального времени, сократить, в частности, время оценки коэффициентов разложения, ограниченное быстродействием адаптивного контура, а в численных расчетах моделировать образование винтовых дислокаций волнового фронта.

Для оценки потенциальной эффективности модальных корректоров используются статистические показатели, оценивающие степень приближения АОС к идеальной дифракционно-ограниченной системе. Такими показателями являются параметр Штреля, распределение дисперсии фазовой ошибки в пределах апертуры, структурная функция АОС и т.п. [9, 10]. Оценка этих важных параметров существенно упрощается, если фазу $S(\mathbf{p})$ представить в виде универсального разложения по системе функций Карунена–Лоэва–Обухова (КЛО), являющихся согласованными с турбулентной средой распротранения:

$$S(\mathbf{p}) = \sum_{k=0}^N c_k \psi_k(\mathbf{p}). \quad (1)$$

В соответствии с теоремой Карунена–Лоэва–Обухова минимальное значение нормы ошибки при представлении случайной функции в пределах апертуры с функцией зрачка $W(\mathbf{p})$ достигается при использовании N собственных функций, соответствующих N наибольшим собственным значениям интегрального оператора, ядром которого является корреляционная функция фазы [11, 12]. Задача нахождения таких собственных функций ψ_k сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\psi_k(\mathbf{p}) \lambda_k = \int W(\mathbf{p}) B_s(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \psi_k(\mathbf{p}') d^2 \mathbf{p}', \quad (2)$$

где $B_s(\rho, \rho') = \langle S(\rho), S(\rho') \rangle$ – корреляционная функция фазы; $\psi_k(\rho)$, λ_k – собственные функции и собственные значения интегрального уравнения (2) соответственно;

$$W(\rho) = \begin{cases} 1, & |\rho| \leq R, \\ 0, & |\rho| > R \end{cases}$$

– функция зрачка.

Отметим, что разложение (1) наиболее информативно. Коэффициенты разложения ряда (1) не коррелируют между собой, что упрощает дальнейшее использование результатов разложения и их анализ. Дисперсия коэффициентов данного разложения является минимальной по сравнению с любым другим разложением, однако их практическая реализация в задачах адаптивной оптики в виде корректирующих устройств оказывается затруднительной. Поэтому целесообразной становится задача определения связи оптимального разложения КЛО с функциями Уолша и Хаара.

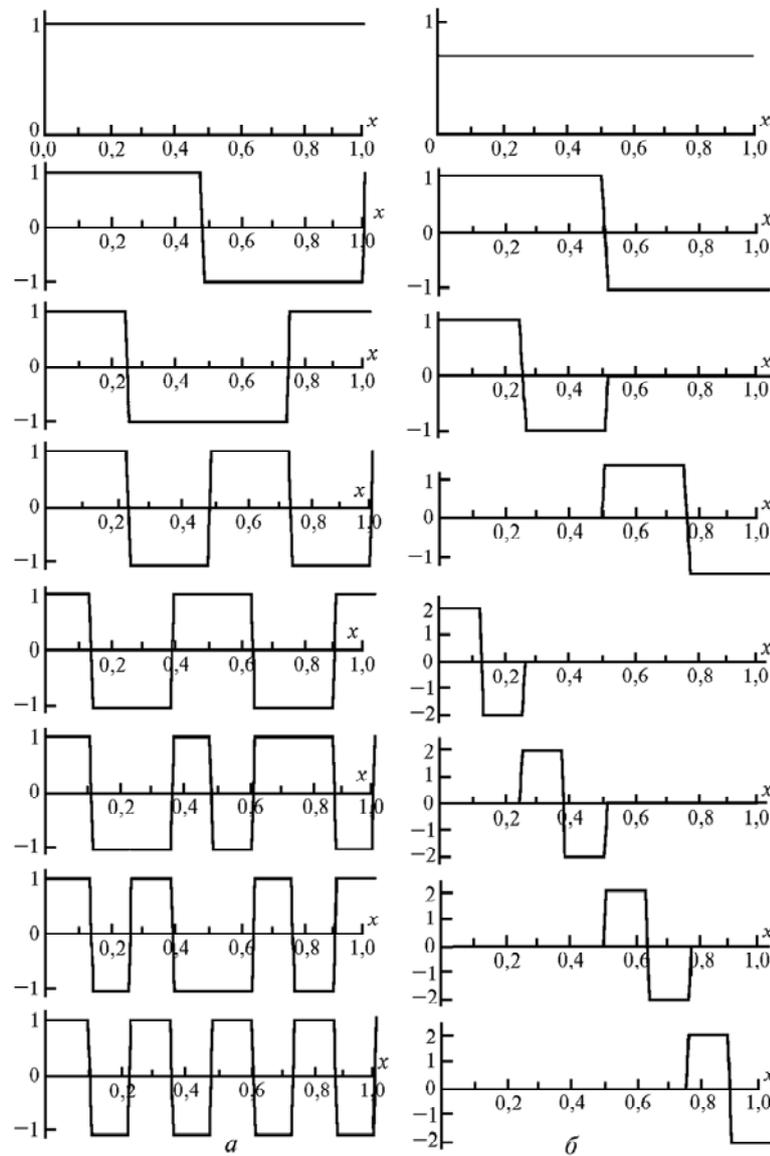


Рис. 1. Вид первых восьми функций Уолша и Хаара от одной координаты: а – функции Уолша $Wal(x)$, б – функции Хаара $H(x)$

Определим матрицу перехода, связывающую коэффициенты разложения базиса КЛО с коэффициентами базисов Уолша и Хаара. Задача установления связи между разложением КЛО и функциями Уолша и Хаара адекватна задаче разложения ядра интегрального уравнения (2), определяющего функции КЛО, в базисы Уолша и Хаара. Коэффициенты разложения ядра образуют матрицу Грама, собственные векторы которой дают нам искомую матрицу преобразования, а собственные числа – дисперсию коэффициентов разложения.

Для определения матрицы преобразования для круглой апертуры функции Уолша $Wal(\rho)$ представим в виде произведения функций Уолша по каждой из координат:

$$Wal_{nm}(\rho) = Wal_n(\rho)Wal_m(\theta),$$

где $\rho = \{x, y\} = (\rho, \theta)$. Пространственный вид этих функций приводится на рис. 2. Аналогично можно представить и функции Хаара $H(\rho)$:

$$H_{nm}(\rho) = H_n(\rho)H_m(\theta).$$

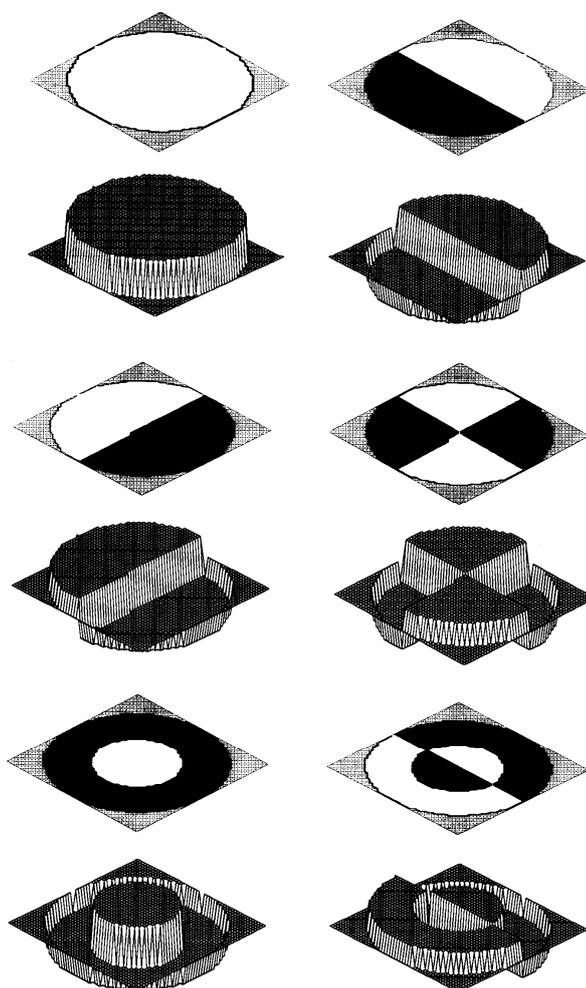


Рис. 2. Пространственный вид функций Уолша $Wal_{nm}(\rho)$, $n = 0, 1, \overline{0, 3}$

Средняя фаза волны в большинстве задач адаптивной оптики незначительна, поэтому член разложения, характеризующий среднюю по апертуре фазу, опускают [1–3]. Учитывая сказанное, искажение волнового фронта в пределах апертуры представим в виде

$$S(\rho) = \varphi(\rho) - \varphi_{\text{ср}}, \quad (3)$$

где

$$\varphi_{cp} = \int W(\rho) \varphi(\rho) d^2\rho \quad (4)$$

– средняя по апертуре фаза.

Корреляционная функция

$$B_s(\rho, \rho') = \langle S(\rho) S(\rho') \rangle = \langle (\varphi(\rho) - \varphi_{cp}) (\varphi(\rho') - \varphi_{cp}) \rangle$$

с учетом соотношения (4) может быть выражена через структурную функцию фазы $D(\rho - \rho')$ [9]:

$$B_s(|\rho - \rho'|) = -\frac{1}{2} D(\rho - \rho') + \frac{1}{2} \int W(\rho) D(\rho - \rho') d^2\rho + \frac{1}{2} \int W(\rho') D(\rho - \rho') d^2\rho' - \frac{1}{2} \int d^2\rho \int d^2\rho' W(\rho) W(\rho') D(\rho - \rho'). \quad (5)$$

Решение интегрального уравнения (2) будем искать в факторизованном виде

$$\psi(\rho) = R(\rho) \Theta(\theta). \quad (6)$$

Прежде всего определим вид азимутальной функции $\Theta(\theta)$. Отметим, что функция $\Theta(\theta)$ должна быть непрерывной и периодической функцией угла θ с периодом 2π . Подставляя решение (6) в уравнение (2), получим

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R W(\rho) B_s(\rho, \theta, \rho', \theta') R(\rho) \Theta(\theta) \rho d\rho d\theta = \lambda R(\rho) \Theta(\theta). \quad (7)$$

Произведем следующую замену переменных: $\zeta = \theta' - \theta$, $d\zeta = d\theta$, $\theta' = \zeta + \theta$:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R W(\rho) B_s(\rho, \rho', \zeta) R(\rho') \Theta(\zeta + \theta) \rho d\rho d\zeta = \lambda R(\rho) \Theta(\theta). \quad (8)$$

Из уравнения (8), в силу непрерывности, периодичности и единственности решения, следует, что $\Theta(\zeta + \theta) = \Theta(\zeta) \Theta(\theta)$. Общее решение этого уравнения, имеющее период 2π , хорошо известно и имеет вид $\exp(i l \theta)$. Следовательно, функция $\Theta(\theta)$ записывается следующим образом:

$$\Theta(\theta) = \exp(i l \theta), \quad (9)$$

где $l \in \mathbf{Z}$, т.е. $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$.

Раскладывая в ряд $\Theta(\theta)$ по функциям $Wal(\theta)$ и $H(\theta)$ или, что то же самое, осуществляя быстрые преобразования Уолша и Хаара, определяем азимутальную матрицу перехода.

Для определения радиальной матрицы перехода подставим выражение (9) в (8) и после некоторых преобразований получим однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\int_0^R \rho d\rho W(\rho) R(\rho) \int_0^{2\pi} d\zeta \exp(i l \zeta) B_s(\rho, \rho', \zeta) = \lambda R(\rho). \quad (10)$$

Задача нахождения связи базиса $R(\rho)$ с базисами Уолша и Хаара эквивалентна задаче разложения ядра интегрального уравнения (10) по этим функциям. Для этого в уравнении (10) необходимо определить явный вид ядра. Введем обозначение

$$M_l(\rho, \rho') = \int_0^{2\pi} d\zeta \exp(i l \zeta) B_s(\rho, \rho', \zeta). \quad (11)$$

Перепишем (11), подставляя $B_s(\rho, \rho', \zeta)$ в явном виде:

$$M_l(\rho, \rho') = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\zeta \exp(il\zeta) D(\rho - \rho') + \frac{1}{2\pi} \int d^2\rho \int_0^{2\pi} d\zeta \exp(il\zeta) W(\rho) D(\rho - \rho') + \\ + \frac{1}{2\pi} \int d^2\rho' \int_0^{2\pi} d\zeta \exp(il\zeta) W(\rho') D(\rho - \rho') - \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\zeta \exp(il\zeta) \int d^2\rho \int d^2\rho' W(\rho) W(\rho') D(\rho - \rho').$$

Вид ядра для $l = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, т.е. для $l \neq 0$, упрощается, так как три последних члена в силу ортогональности функций $\exp(il\zeta)$ обращаются в нуль и, следовательно, ядро принимает вид

$$M_l(\rho, \rho') = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\zeta \exp(il\zeta) D(\rho - \rho').$$

Для колмогоровского спектра турбулентности [1,2] структурная функция имеет вид

$$D(\rho) = \frac{6,88}{r_0^{5/3}} \rho^{5/3},$$

где r_0 – радиус Фрида. Осуществим преобразование Фурье–Бесселя H_0 для функции $D(\rho)$:

$$D(\rho) = \int_0^\infty D(\kappa) J_0(\kappa\rho) \kappa d\kappa, \quad D(\kappa) = \frac{6,88}{r_0^{5/3}} \frac{1}{\kappa^{11/3}},$$

где $J_0(x)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Учитывая теоремы запаздывания, свертки и то, что преобразование Фурье–Бесселя для функции зрачка имеет вид

$$W(\rho) \xrightarrow{H_0} \frac{J_1(\kappa\rho)}{\kappa} R,$$

при $l \neq 0$ получаем

$$M_l(\rho, \rho') = -\frac{6,88\pi}{r_0^{5/3}} \int_0^\infty \frac{J_l(\kappa\rho') J_l(\kappa\rho) \kappa d\kappa}{\kappa^{11/3}}.$$

При $l = 0$ вид ядра становится более сложным и для колмогоровской модели турбулентности получаем

$$M_0(\rho, \rho') = -\frac{6,88\pi}{r_0^{5/3}} \int_0^\infty \frac{J_0(\kappa\rho') J_0(\kappa\rho) \kappa d\kappa}{\kappa^{11/3}} + \frac{6,88}{r_0^{5/3}} \left[\frac{1}{R} \int_0^\infty \frac{J_0(\kappa\rho) J_1(\kappa R) d\kappa}{\kappa^{11/3}} + \frac{1}{R} \int_0^\infty \frac{J_0(\kappa\rho') J_1(\kappa R) d\kappa}{\kappa^{11/3}} \right] - \\ - \frac{6,88\pi}{r_0^{5/3}} \int_0^\infty \frac{J_1^2(\kappa R) d\kappa}{\kappa^{8/3}}.$$

Преимущество представления ядра в таком виде заключается в возможности введения внешнего масштаба турбулентной атмосферы, для чего достаточно в подынтегральных выражениях вместо $\kappa^{8/3}$ подставить $(\kappa^2 + 1/L_0^2)^{8/6}$, где L_0 – внешний масштаб турбулентности.

Разложим ядро $M_l(\rho, \rho')$ по функциям Уолша $Wal_n(\rho)$:

$$\rho M_l(\rho, \rho') = \sum_s^N \sum_p^N A_{ps}^l Wal_p(\rho) Wal_s(\rho').$$

Отметим, что функции Уолша относятся к классу мультипликативных систем и образуют абелеву группу, в которой операция сложения \oplus определяется как суммирование по модулю 2, образующееся путем поразрядного суммирования без переноса единицы в старший разряд $Wal_n(\rho) Wal_m(\rho) = Wal_{n \oplus m}(\rho)$ [5, 13]. Используя данное свойство, можно определить коэффициенты разложения

$$\frac{1}{N^2} \int_0^1 \int_0^1 \rho M(\rho, \rho') Wal_p(\rho) Wal_s(\rho') d\rho d\rho' = A_{ps}^l. \quad (12)$$

Полученная матрица является матрицей Грама, диагонализировав которую, мы можем получить коэффициенты разложения радиальных частей функций КЛЮ через функции Уолша. Произведя аналогичные операции, можно определить коэффициенты разложения $R(\rho)$ по вейвлетам Хаара. Коэффициенты разложения радиальной функции $R(\rho)$ в базисе Хаара можно определить и другим способом, используя тесную связь между функциями Уолша и Хаара, выражающуюся в матрице перехода [13, 14]:

$$\mathbf{M}_{2^n}^{\text{H-W}} = \prod_{r=1}^{n-1} \prod_{p=0}^{r-1} \left(\mathbf{I}_{2^{n-1-r}} \otimes \left[\mathbf{I}_{2^r} \oplus \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2^p} \otimes \mathbf{G}_2^2 \\ \mathbf{I}_{2^p} \otimes \mathbf{G}_2^3 \end{bmatrix} \oplus \mathbf{I}_{2^{r-2^{p+1}}} \right] \right),$$

где \mathbf{I}_t – единичная матрица размера $t \times t$; $\mathbf{G}_2^2 = [1 \ 1]$, $\mathbf{G}_2^3 = [1 \ -1]$; \otimes – знак кронекеровского произведения; \oplus – знак кронекеровской суммы. В этом случае достаточно перемножить матрицы (12) и $\mathbf{M}_{2^n}^{\text{H-W}}$, чтобы получить искомую матрицу преобразования между $R(\rho)$ и $H(\rho)$.

Итак, в настоящей статье нами аналитически рассмотрена возможность перехода из базисов Хаара и Уолша, легко реализуемых в виде корректирующих устройств АОС, в базис КЛЮ, позволяющий полно и точно выявить потенциальные возможности корректирующего базиса АОС. Полученные соотношения позволяют при оценке коэффициентов разложения приблизиться к реальным масштабам временного разрешения случайных вариаций турбулентности за счет использования алгоритмов быстрых преобразований Уолша и Хаара. Кроме того, базис Хаара, в силу своих локальных свойств, позволяет моделировать искажения волнового фронта, имеющего сложную топологию.

Во второй части данной статьи планируется изложить численную реализацию вышеописанного теоретического подхода и привести результаты расчетов матриц преобразования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 96-02-18791.

1. Воронцов М. А., Шмальгаузен В. И. Принципы адаптивной оптики. М.: Наука, 1985. 336 с.
2. Лукьянов Д. П., Корниенко А. А., Рудницкий Б. Е. Оптические адаптивные системы. М.: Радио и связь, 1989. 238 с.
3. Аксенов В. П., Исаев Ю. Н. Оптимальное модовое разложение фазы, восстановленной по измерениям наклонов волнового фронта в турбулентной атмосфере. Ч. I. Представление аберраций в базисе Карунена–Лоэва–Обухова // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. № 7. С. 947–954.
4. Тараненко В. Г., Шанин О. И. Адаптивная оптика. М.: Радио и связь, 1990. 112 с.
5. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М.: Наука, 1987. 344 с.
6. Mallat S. G. Theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 1989 V. 31(7). P. 674–693.
7. Collineau S., Brunet Y. Detection on turbulent coherent motions in a forest canopy. Part I. Wavelet analysis // Boundary–Layer Meteorology. 1993. V. 65. P. 357–379.
8. Астафьева Н. М. Вейвлет-анализ: спектральный анализ локальных возмущений (основы теории и примеры применения) // Известия вузов «Проблемы нелинейной динамики». 1996. Т. 4. № 2. С. 3–39.
9. Wang J. Y., Markey J. K. // J. Opt. Soc. Amer. 1978. V. 68. N 1. P. 78.
10. Noll R. J. Zernike and atmospheric turbulence // J. Opt. Soc. Amer. 1976. V. 66. N 3. P. 207–211.
11. Ван Трис Г. Теория обнаружения оценок и модуляции. М.: Советское радио, 1972. 744 с.
12. Обухов А. М. Турбулентность и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1988. 414 с.
13. Ярославский Л. П. Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии: Введение в цифровую оптику. М.: Радио и связь, 1987. 296 с.
14. Залмазон Л. А. Преобразование Фурье, Уолша, Хаара и их применения в управлении, связи и других областях. М.: Наука, 1989. 496 с.

Yu. N. Isaev, E. V. Zakharova. Representation of Karhunen–Loewe–Obukhov Functions in Basis of Walsh and Haar.

Analytical relationships are found allowing transition in mode expansion of optical wave from Haar and Walsh bases, which are characterized by simple realization in correcting devices of the adaptive optics systems, to statistically optimal Karhunen–Loewe–Obukhov basis. The basis describes the approximation criteria of approach an adaptive system to ideal diffraction-bounded one most completely and accurately. The relationships obtained and the use of algorithms of fast Walsh and Haar transform allow one to approach to the real to estimation of the expansion coefficients. Besides, the obtained transform matrix allows accounting for the affect of the outer scale of the turbulence.