«Оптика атмосферы и океана», **10**, N 8 (1997)

ТУРБУЛЕНТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В АТМОСФЕРЕ И ОКЕАНЕ

УДК 551.501.8

И.Н. Смалихо

ТОЧНОСТЬ ОЦЕНОК СКОРОСТИ ДИССИПАЦИИ ТУРБУЛЕНТНОЙ ЭНЕРГИИ ИЗ ВРЕМЕННОГО СПЕКТРА ФЛУКТУАЦИЙ СКОРОСТИ ВЕТРА

Обсуждаются погрешности оценок скорости диссипации турбулентной энергии по максимуму правдоподобия из временных спектров скорости ветра, измеряемой акустическим анемометром и доплеровским лидаром.

1. Введение

В настоящее время известно несколько методов определения величины скорости диссипации турбулентной энергии в атмосфере, как правило, использующих закономерности инерционного интервала турбулентных вариаций скорости потока воздуха [1–3]. Наибольшее распространение получило оценивание скорости диссипации из временного спектра измеренной скорости ветра. При этом применяют гипотезу «замороженной» турбулентности [1].

Точность оценки скорости диссипации из временного спектра скорости ветра определяется различными факторами – состоянием атмосферы (интенсивность и характерные масштабы турбулентности), продолжительностью и геометрией зондирования, способом обработки данных, шумами и т.д. Поэтому при планировании измерений скорости диссипации представляется важным иметь результаты предварительных расчетов погрешности рассматриваемой характеристики в зависимости от этих факторов. Настоящая статья посвящена анализу такой погрешности при оценивании скорости диссипации турбулентной энергии из спектра скорости ветра по максимуму правдоподобия.

2. Оценивание скорости диссипации

Пусть имеется последовательность измеренных за время $T = \Delta t M$ значений скорости ветра $V(\Delta t m)$, где $m = 0,1, ..., M - 1$; Δt – интервал дискретности. С помощью быстрого преобразования Фурье из этой последовательности можно получить одностороннюю функцию спектральной плотности

$$\hat{S}\left(\frac{k}{T}\right) = \frac{2\Delta t}{M}\left|Z\left(\frac{k}{T}\right)\right|^2, \tag{1}$$

где

$$Z\left(\frac{k}{T}\right) = \sum_{m=0}^{M-1} V(\Delta t m)\exp\left[-j\,2\pi\,\frac{mk}{M}\right], \quad k = 0, 1, \dots, M/2.$$

Будем считать, что для анализа временных статистических характеристик измеренной скорости $V(t)$ применима гипотеза «замороженной» турбулентности [1]. Тогда при достаточно большом T, когда $T \gg \tau_k$ – времени корреляции скорости ветра, можно выбрать частотный интервал $[f_1, f_2]$, в пределах которого оценка $\hat{S}(f)$ является несмещенной (т.е. $\langle\hat{S}(f)\rangle = \hat{S}(f)$, где $\langle...\rangle$ – усреднение по ансамблю) и ее среднее значение описывается формулой

$$S(f) = \varepsilon^{2/3}\,Q(f), \tag{2}$$

где ε – средняя скорость диссипации турбулентной энергии; $Q(f)$ – функция, параметром которой являются средняя скорость ветра U и размеры зондируемого объема. В частности, при измерениях продольной компоненты скорости ветра в фиксированной точке $Q(f) = 0{,}15U^{2/3}/f^{5/3}$ [1–3]. Частота $f_1 = k_1/T$ является нижней границей инерционного интервала, а $f_2 = k_2/T$ соответствует той наивысшей частоте, на которой вкладом шумов в измеренный спектр можно пренебречь.

Воспользовавшись формулой (2), получим оценку скорости диссипации турбулентной энергии из n оценок спектральных плотностей $\hat{S}_i = \hat{S}\,[(k_0 + i)/T]$ на частотах, попадаемых в рассматриваемый интервал, где $k_1 \le k_0$ и $k_0 + n \le k_2$, $i = 1, 2, ..., n$. Комплексная случайная величина $Z(k/\mathrm{T})$ в силу условия $T \gg \tau_k$ имеет нормальное распределение плотности вероятности с нулевым средним и с равными дисперсиями для действительной и мнимой частей Z, пропорциональными среднему спектру $S(k/\mathrm{T})$. Тогда плотность вероятности оценки спектра $\hat{S}_i \sim |Z|^2$ будет иметь экспоненциальное распределение. При этом оценки $\hat{S}_i$ и $\hat{S}_l$ (при $i \ne l$) являются независимыми. Следовательно, плотность вероятности вектора $\hat{\mathbf{S}} = \{\hat{S}_1, \hat{S}_2, ..., \hat{S}_n\}$ имеет вид

$$P(\hat{\mathbf{S}}) = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{S_i}\right) \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} \frac{\hat{S}_i}{S_i}\right], \tag{3}$$

где в соответствии с (2) $S_i = \varepsilon^{2/3} Q_i$, $Q_i = Q\,[(k_0 + i)/T]$. Считая, что значения Q_i известны, оценку скорости диссипации $\hat{\varepsilon}$ из измеренного вектора $\hat{\mathbf{S}}$ получим по максимуму правдоподобия [4]. Для этого необходимо взять производную по ε от логарифмической функции правдоподобия

$$L(\varepsilon) = \ln P(\hat{\mathbf{S}}) = -\sum_{i=1}^{n} \left[\ln(\varepsilon^{2/3} Q_i) + \frac{\hat{S}_i}{\varepsilon^{2/3} Q_i}\right] \tag{4}$$

и решить уравнение

$$\left.\frac{dL(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\hat{\varepsilon}} = 0. \tag{5}$$

В результате имеем

$$\hat{\varepsilon} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\hat{S}_i}{Q_i}\right)^{3/2}. \tag{6}$$

3. Статистические характеристики оценки скорости диссипации

Разделим обе части выражения (6) на среднее значение скорости диссипации ε. Тогда с учетом (2) нормированную величину полученной оценки можно представить в виде

$$\hat{\varepsilon}/\varepsilon = x_n^{3/2}, \tag{7}$$

где

$$x_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\hat{S}_i}{S_i}, \tag{8}$$

в соответствии с (3) имеем гамма-распределение плотности вероятности

$$P(x_n) = (n^n/[\Gamma(n)])\, x_n^{n-1}\, \mathrm{e}^{-nx_n}, \tag{9}$$

где $\Gamma(n)$ – гамма-функция; $x_n \in [0, \infty]$. Для среднего значения x_n^{ν} имеем

$$\langle x_n^{\nu}\rangle = \int_0^{\infty} dx_n\, x_n^{\nu} P(x_n) = \frac{\Gamma(\nu + n)}{n^{\nu}\,\Gamma(n)}. \tag{10}$$

Воспользовавшись этой формулой, для среднего нормированного значения $B = \langle\hat{\varepsilon}/\varepsilon\rangle$ и относительной случайной погрешности $E = [\langle(\hat{\varepsilon}/\varepsilon)^2\rangle - B^2]^{1/2}$ оценки скорости диссипации находим:

$B = \Gamma(3/2 + n)/[n^{3/2}\,\Gamma(n)];$ (11)

$$E = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right) - \left(\frac{\Gamma(3/2+n)}{n^{3/2}\,\Gamma(n)}\right)^2\right]^{1/2}, \quad (12)$$

где в (12) были использованы свойства гамма-функции $\Gamma(3 + n) = n(n + 2)\,\Gamma(n)$.

Из (11) следует, что в общем случае $B \neq 1$, т.е. оценка $\hat{\varepsilon}$ является смещенной. Полная погрешность, с учетом такого смещения, определяется формулой [5] $A = [E^2 + (B - 1)^2]^{1/2}$. При $n = 1$ соответственно из (11) и (12) имеем $(3/4)\sqrt{\pi} \approx 1{,}33$ и $E = \sqrt{6 - 9\pi/16} \approx 2{,}06$. Такие оценки $\hat{\varepsilon}$ будут превышать ε в 1,33 раза, а их случайный разброс относительно ε очень большой. Рассмотрим представляющий интерес для практики случай $n \gg 1$. В (11) и (12) мы можем воспользоваться асимптотической формулой [6]:

$$\Gamma(3/2 + n)/\Gamma(n) \approx n^{3/2}\left(1 + \frac{3}{8}\frac{1}{n} + ...\right). \quad (13)$$

После разложения выражений (11) и (12) в ряд по степеням n^{-1} и удержания слагаемых, вносящих основной вклад в соответствующие характеристики, получаем

$$B = 1, \quad E = \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (14)$$

откуда следует, что при $n \gg 1$ оценка $\hat{\varepsilon}$ является несмещенной, а ее погрешность пропорциональна $n^{-1/2}$.

4. Сравнение с экспериментальными данными

С целью проверки полученных зависимостей B и E от числа n спектральных компонент $\hat{S}_i$, выбранных для оценки скорости диссипации, были использованы результаты измерений скорости ветра акустическим анемометром [7] на высоте 6 м от поверхности Земли. Полученная из этих данных оценка средней скорости ветра $\hat{U}$ равна 3,45 м/с. По формуле (1) рассчитывался спектр скорости ветра. На рис. 1 приведен спектр, сглаженный (усредненный) по 100 статистическим степеням свободы. На рисунке показан интервал $[f_1, f_2]$. Используя все оценки $\hat{S}_i$, попадаемые в этот интервал, по формуле (6) (где значения Q_i полагались равными $0{,}15\,\hat{U}^{2/3}\,[(k_0 + i)/T]^{-5/3}$) рассчитывалась средняя скорость диссипации $\bar{\varepsilon}$. Она составила 0,046 м^2/с^3. При расчете первого и второго моментов величины $x_n^{3/2}$ по формуле (8) для S_i использовалось выражение $S_i = 0{,}15\,(\hat{U}\,\bar{\varepsilon})^{2/3}\,[(k_0 + i)/T]^{-5/3}$. Результат расчета таких компонент спектра S_i показан на рис. 1 в виде прямой линии в рассматриваемом интервале частот $[f_1, f_2]$.

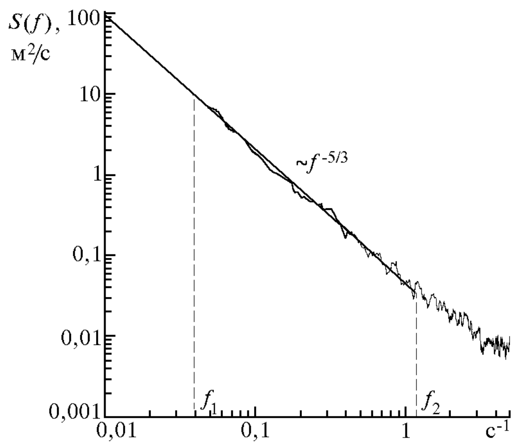

Рис. 1. Спектр скорости ветра

На рис. 2 в виде крестиков и квадратиков представлены экспериментальные зависимости соответственно B и E от n. Здесь же в виде сплошных кривых приведены рассчитанные по формулам (11) и (12) аналогичные теоретические зависимости (кривая *1* – B, кривая *2* – E). Погрешность экспериментальных значений E не превышает 15 %. Видно удовлетворительное соответствие теории и эксперимента. Уже при $n = 10$ оценка $\hat{\varepsilon}$ является практически несмещенной ($B \approx 1$), но относительная погрешность еще довольно большая и составляет примерно 50%.

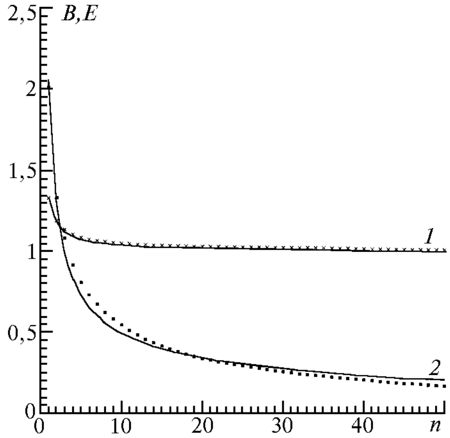

Рис. 2. Зависимость нормированной величины B и относительной случайной погрешности E оценки скорости диссипации турбулентной энергии от числа n спектральных компонент, используемых при обработке данных. Крестики и кривая *1* – данные для B; квадратики и кривая *2* – данные для E; крестики и квадратики – эксперимент; сплошные кривые – теория

5. Учет погрешности оценки средней скорости ветра

Согласно (14) погрешность оценки скорости диссипации можно сделать сколь угодно малой путем увеличения n. Так, при максимальном $n = 800$, имевшем место в эксперименте, $E \approx 0{,}05$. Однако в действительности ошибка будет выше из-за погрешности в оценке средней скорости ветра $\hat{U}$. Фактически показанные на рис. 2 экспериментальные данные представляют собой $\langle \hat{\varepsilon}\hat{U}/\varepsilon U \rangle$ и $[\langle (\hat{\varepsilon}\hat{U}/\varepsilon U)^2 \rangle - \langle \hat{\varepsilon}\hat{U}/\varepsilon U \rangle^2]^{1/2}$, где U – истинная средняя скорость ветра. Поэтому с учетом отличия $\hat{U}$ от U для нормированной оценки скорости диссипации, получаемой из результатов измерений скорости ветра в точке, вместо (7) следует использовать выражение

$$\hat{\varepsilon}/\varepsilon = (U/\hat{U})\, x_n^{3/2}. \tag{15}$$

В случае измерения непрерывным доплеровским лидаром временной спектр скорости ветра $S(f)$ представляет собой произведение спектра скорости ветра в фиксированной точке, находящейся в центре зондируемого объема, на $H(f)$ – функцию низкочастотного фильтра, определяемую продольным размером Δz этого объема. Вид этой функции приведен, в частности, в работе [8]. При $\Delta z \to 0$ функция $H(f) \to 1$ и тогда нормированная оценка скорости диссипации будет определяться формулой (15). В другом предельном случае больших Δz для спектра в [8] получена асимптотическая формула:

$$S(f) = 0{,}06\, \varepsilon^{2/3}\, (U \sin\gamma)^{5/3}\, (1/\Delta z)\, f^{-8/3}\,, \tag{16}$$

где γ – угол между направлением ветра и осью зондирующего пучка. Информацию об U и γ можно получить, например, из дополнительных измерений сканирующим доплеровским лидаром. Естественно, что измеренная величина скорости $\hat{U}$ будет отличаться от истинного значения средней скорости U. Из (2), (6), (16) и (17), с учетом этого отличия, в пренебрежении погрешностью в оценках угла γ, нетрудно получить выражение

$$\hat{\varepsilon}/\varepsilon = (U/\hat{U})^{5/2}\, x_n^{3/2}. \tag{17}$$

Будем считать, что в (15) и (17) погрешность $\tilde{U} = \hat{U} - U$ мала по сравнению с U. Тогда для $\hat{\varepsilon}/\varepsilon$ можно записать приближенную формулу

$$\hat{\varepsilon}/\varepsilon = (1 - \alpha\, \tilde{U}/U)\, x_n^{3/2}, \qquad (18)$$

где для случая точечных измерений $\alpha = 1$, а при измерениях доплеровским лидаром в большом зондируемом объеме $\alpha = 5/2$. Если оценка скорости ветра является несмещенной ($\langle\hat{U}\rangle = U$), то, как показано выше, при достаточно большом n оценка $\hat{\varepsilon}$ также не имеет смещения ($B = 1$). Из (7)–(14) и (18) при $n \gg 1$ для относительной погрешности E с учетом флуктуаций оценки средней скорости ветра получаем

$$E = [9/4n + \alpha^2\, \sigma^2_{\hat{U}}]^{1/2}, \qquad (19)$$

где $\sigma^2_{\hat{U}} = \langle(\tilde{U}/U)^2\rangle$ – относительная дисперсия оценки скорости ветра.

Из (19) следует, что в случае небольших погрешностей оценок скорости ветра, удовлетворяющих условию

$$\alpha^2\, \sigma^2_{\hat{U}} \ll 9/(4n), \qquad (20)$$

значения E для точечного измерителя и доплеровского лидара практически не будут отличаться при одном и том же числе n. Если реализуется обратное условие

$$\alpha^2\, \sigma^2_{\hat{U}} \gg 9/(4n), \qquad (21)$$

то при одинаковой точности измеренных средних скоростей ветра погрешность лидарной скорости диссипации в 2,5 раза выше, чем соответствующая величина в случае точечного измерителя, в частности использованного в эксперименте акустического анемометра. Так как при большом n условие (21) вполне может реализоваться на практике, требования к точности оценивания средней скорости ветра в доплеровских лидарных измерениях скорости диссипации должны быть более жесткими, чем в случае акустического анемометра.

Пусть при измерении в точке скорость $\hat{U}$ определяется путем временного усреднения за период $T \gg \tau_k$. Тогда для $\sigma^2_{\hat{U}}$ при стационарных условиях справедлива формула [2]

$$\sigma^2_{\hat{U}} = 2\sigma^2_U\, \tau_k/T, \qquad (22)$$

где $\sigma^2_U = \langle V^2\rangle/U^2 - 1$ относительная дисперсия мгновенных значений скорости ветра.

Таким образом, для E имеем

$$E = [9/4n + 2\sigma^2_U\, \tau_k/T]^{1/2}. \qquad (23)$$

В эксперименте, результаты которого приведены на рис. 1 и 2, $\sigma^2_U = 0{,}12$, $\tau_k = 15$ с и $T = 720$ с. Для таких параметров второе слагаемое в (23) равно 0,005. При максимально возможном в этом эксперименте $n = 800$ первое слагаемое в (23) равно 0,0028. В результате относительная погрешность измерения скорости диссипации составляет примерно 10%, что вдвое больше соответствующего значения, полученного выше без учета флуктуаций оценок средней скорости ветра. Допустим, что оценка $\hat{\varepsilon}$ получена из данных доплеровского лидара при таких же n и $\sigma^2_{\hat{U}}$ ($n = 800$, $\sigma^2_{\hat{U}} = 0{,}005$). Тогда в соответствии с формулой (19), где $\alpha = 5/2$, относительная погрешность такой оценки равна примерно 24%.

6. Заключение

В данной статье проведен анализ влияния количества несглаженных оценок спектра и погрешности измерения средней величины скорости ветра на точность оценки скорости диссипации турбулентной энергии по максимуму правдоподобия. Рассмотрены случаи измерения скорости ветра акустическим анемометром («точечным» прибором) и непрерывным доплеровским лидаром при большом размере зондируемого объема. Показано, что влияние погрешности измерения средней скорости ветра на точность оценок скорости диссипации более существенно в случае доплеровского лидара.

Следует отметить, что в случае измерения ветра в фиксированной точке использование гипотезы «замороженности» турбулентности, с целью задания в формуле (2) функции $Q(f_i)$ в явном виде, практически всегда является оправданным. То же самое можно утверждать и для измерений доплеровским лидаром скорости ветра в большом зондируемом объеме при условии достаточно сильного бокового ветра, когда флуктуации усредненной по объему зондирования скорости ветра определяются, в основном, переносом турбулентных вихрей средним потоком без эволюции вихрей за время пребывания в области локализации лазерного пучка. Как показывают эксперименты при малых углах γ и слабом ветре [9, 10], для анализа скорости, оцениваемой из большого лидарного объема зондирования, гипотеза «замороженной» турбулентности неприемлема. Следовательно, попытка воспользоваться формулой (16) для таких условий может привести к значительному смещению оценки скорости диссипации турбулентной энергии.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант N 94-05-16601-а).

1. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Наука, 1967. 720 с.
2. Ламли Дж., Пановский Г. Структура атмосферной турбулентности. М.: Мир, 1966. 264 с.
3. Бызова Н.Л., Иванов В.Н., Гаргер Е.К. Турбулентность в пограничном слое атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 263 с.
4. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. М.: Сов. радио, 1972. 744 с.
5. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989. 540 с.
6. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
7. Патрушев Г.Я., Ростов А.П., Иванов А.П. // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. N 11–12. С. 1636–1638.
8. Смалихо И.Н. // Оптика атмосферы и океана. 1995. Т. 8. N 10. С. 1457–1466.
9. Банах В.А., Вернер Х., Керкис Н.Н., Копп Ф., Смалихо И.Н. // Оптика атмосферы и океана. 1995. Т. 8. N 12. С. 1726–1732.
10. Банах В.А., Вернер Х., Копп Ф., Смалихо И.Н. // Оптика атмосферы и океана (в печати).

Институт оптики атмосферы СО РАН,
Томск

Поступила в редакцию
27 декабря 1996 г.

I.N. Smalikho. **Accuracy of Turbulent Energy Dissipation Rate Estimation from Wind Velocity Temporal Spectrum.**

The errors of estimates of turbulent energy dissipation rates by likelihood maximum from temporal spectra of wind velocity measured with acoustic anemometer and Doppler lidar are discussed.