

В.А. Банах, И.Н. Смалихо

## ОЦЕНИВАНИЕ СКОРОСТИ ДИССИПАЦИИ ТУРБУЛЕНТНОЙ ЭНЕРГИИ ИЗ ДАННЫХ ИМПУЛЬСНОГО ДОПЛЕРОВСКОГО ЛИДАРА

На основе результатов численного моделирования проведен анализ возможностей и рассчитаны погрешности оценивания скорости диссипации кинетической энергии турбулентности из данных импульсного доплеровского лидара. Проведено сравнение точности оценивания пространственной структурной функции скорости ветра из доплеровских данных по методу аргумента корреляционной функции и методом максимального правдоподобия. Показано, что при использовании достаточно больших объемов выборочных данных относительная погрешность оценивания скорости диссипации турбулентной энергии с помощью импульсных доплеровских лидаров не будет превышать 15–20% при отношениях сигнал-шум  $\geq 1$ .

### 1. Введение

Для изучения динамических процессов в атмосфере в настоящее время все более широкое распространение получают доплеровские лидары с импульсными источниками излучения [1–8], позволяющие восстанавливать высотные профили измеряемых параметров с хорошим пространственным разрешением до существенно больших высот, чем непрерывные лидары. В то же время вопросы точности измерения турбулентных характеристик импульсными лидарами с использованием различных методов обработки сигнала остаются не до конца проработанными и требуют дальнейших исследований.

Одной из важнейших характеристик турбулентности является скорость диссипации кинетической энергии  $\varepsilon$ . Разработке методов измерения  $\varepsilon$  в пограничном слое атмосферы непрерывными лидарами посвящены работы [9–13], где вопросы влияния пространственного усреднения по зондируемому объему на характеристики измеряемой лидаром скорости ветра и учета этого усреднения в лидарных измерениях скорости диссипации рассмотрены самым детальным образом. Данная статья посвящена исследованию возможностей получения информации о скорости диссипации турбулентной энергии из данных импульсного доплеровского лидара.

### 2. Корреляционная функция когерентно детектируемого сигнала

При зондировании импульсным лидаром полезную составляющую фототока  $j_s$ , измеренного в момент времени  $t$ , можно представить в виде [14, 15]

$$j_s(t) = \text{Re} \{y(t)\}, \quad (1)$$

где

$$y(t) = 2 \frac{e \eta_Q K(R)}{h\nu R} P_L^{1/2} \sum_{l=1}^{n_s} P_T^{1/2} (t - 2z_l/c) \alpha_l Q(\rho_l) \exp \left[ 2jkz_l + 2\pi j \left( \Delta f - \frac{2}{\lambda} V_r(z_l) \right) t \right];$$

$$Q(\rho_l) = R\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d^2\rho W(\rho) A_L^*(\rho) \int_{-\infty}^{\infty} d^2\rho' A_T(\rho') W(\rho') G(\rho_l, R; \rho', 0) G(\rho_l, R; \rho, 0);$$

$n_s$  – число рассеивающих частиц в атмосфере;  $R = ct/2$  – расстояние до зондируемого объема;  $c$  – скорость света;  $e$  – заряд электрона;  $\eta_Q$  – квантовая эффективность чувствительной площадки фотодетектора;  $h\nu$  – энергия фотона,  $K(R) = \exp \left\{ - \int_0^R dz' \alpha_a(z') \right\}$ ;  $\alpha_a$  – коэффициент ослабления;

$A_L(\rho) = E_L(\rho)/P_L^{1/2}$  и  $A_T(\rho) = E_T(\rho, t)/P_T^{1/2}(t)$  – нормированные амплитуды;  $P_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d^2\rho |E_T(\rho, t)|^2$  и

$P_L = \int_{-\infty}^{\infty} d^2\rho |E_L(\rho)|^2$  – мощности, соответственно, зондирующего и опорного пучков;

$U_P = \int_{-\infty}^{\infty} dt P_T(t)$  – энергия зондирующего импульса;  $\alpha_l$  – амплитуда рассеяния  $l$ -й частицы, на-

ходящейся в точке  $\{z_l, \rho_l\}$  ( $z$  – ось распространения);  $W(\rho)$  – функция зрачка приемопередающего телескопа;  $G$  – функция Грина;  $k = 2\pi/\lambda$ ;  $\lambda$  – длина волны зондирующего пучка;  $\Delta f$  – промежуточная частота и  $V_r(z)$  – радиальная составляющая скорости ветра на расстоянии  $z$  от лидара.

Для среднего значения мощности полезной составляющей фототока  $S = (1/2) \overline{y(t)y^*(t)}$  из (1) имеем [14]

$$S = 2 [e\eta_Q/(h\nu)]^2 P_S P_L \eta_H, \quad (2)$$

где  $P_S = A_R \beta_\pi(R) K^2(R) cU_P/(2R^2)$  – мощность принимаемого сигнала при некогерентном детектировании;  $A_R = \int_{-\infty}^{\infty} d^2\rho W^2(\rho)$  – площадь апертуры приемопередающего телескопа;  $\beta_\pi = \overline{\alpha_l^2} \rho_c$  – ко-

эффициент обратного рассеяния,  $\rho_c$  – концентрация частиц;  $\eta_H = A_R^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} d^2\rho_l \overline{|Q(\rho_l)|^2}$  – эффек-

тивность гетеродинамирования. Наряду с полезной составляющей  $y(t)$  приемная система лидара регистрирует и шумовую составляющую фототока  $n(t)$ . В случае, когда основным источником шума является дробовой шум, возникающий вследствие случайного характера захвата электронами фотонов опорного излучения (процесс, описываемый пуассоновской статистикой), для средней мощности шума  $N = \overline{|n|^2}$  имеем [16]

$$N = 2 e^2 \eta_Q P_L B/(h\nu), \quad (3)$$

где  $B$  – полоса пропускания приемника. Тогда выражение для отношения сигнал-шум  $SNR = S/N$  записывается в виде

$$SNR = \eta_Q \eta_H P_S/(h\nu B). \quad (4)$$

Величина  $SNR$  представляет собой среднее число фотоэлектронов, когерентно детектируемых за время  $\sim B^{-1}$  [17].

Из последовательности регистрируемых лидаром значений фототока можно перейти к комплексному сигналу

$$Z(mT_S) = (1/\sqrt{2}) y(t + mT_S) + n(mT_S), \quad (5)$$

где  $T_S = B^{-1}$  – время снятия отсчетов комплексного сигнала. Сигнал  $Z(mT_S)$  удовлетворяет соотношениям:

$$\overline{Z(mT_S)} = \overline{Z(mT_S)Z(lT_S)} = 0; \quad \overline{Z(mT_S)Z^*(lT_S)} = SK_y(mT_S, lT_S) + N\delta_{ml},$$

где  $K_y$  – коэффициент корреляции комплексной величины полезного сигнала, получаемый путем усреднения произведения  $y(t + mT_S) y^*(t + lT_S)$  по всем случайным параметрам среды, за исключением скорости ветра;  $\delta_{ml}$  – символ Кронекера ( $\delta_{ml, m=l} = 1, \delta_{ml, m \neq l} = 0$ ).

Выделение доплеровской частоты  $f_D$  из измеренной последовательности  $Z(mT_S)$  возможно лишь в пределах интервала Найквиста  $[0, 1/T_S]$ . Перейдя от  $Z(mT_S)$  к  $Z(mT_S) \exp[-2\pi j \Delta f m T_S]/\sqrt{N}$  и положив  $\Delta f = 1/(2T_S)$ , с учетом соотношения Доплера  $V_D(R) = (\lambda/2)f_D$  получаем, что оценка радиальной скорости ветра  $V_D(R)$  находится в пределах интервала  $[-\lambda/(4T_S), \lambda/(4T_S)]$ . После

такого перехода из (1) – (5) для корреляционной функции комплексного сигнала  $B_z(mT_s, lT_s) = \overline{Z(mT_s)Z^*(lT_s)}$  имеем формулу

$$B_z(mT_s, lT_s) = SNR \frac{2}{cU_p} \int_{-\infty}^{\infty} dz' P_T^{1/2}(mT_s - 2z'/c) P_T^{1/2}(lT_s - 2z'/c) \exp \left[ j \frac{4\pi}{\lambda} (l - m) T_s V_r (R + z') \right] + \delta_{ml}. \quad (6)$$

В случае однородного ветра  $V_r = \text{const}$  и гауссовой формы зондирующего импульса

$$P_T(t) = (U_p/\sqrt{\rho\sigma}) e^{-t^2/\sigma^2}, \quad (7)$$

где  $\sigma = t_p$  – длительность импульса, определяемая по формуле  $P_T(t_p)/P_T(0) = e^{-1}$ , из (6) имеем [15, 17]

$$B_z(mT_s, lT_s) = B_z((m - l)T_s) = SNR \exp \left\{ -[(m - l)T_s/(2\sigma)]^2 - j(4\pi/\lambda)(m - l)T_s V_r \right\} + \delta_{ml}. \quad (8)$$

### 3. Оценивание радиальной скорости ветра

Существует несколько методов оценивания радиальной скорости  $V_D(R)$  из измеренной последовательности  $Z(mT_s)$ , где  $m = 0, 1, \dots, M-1$ . Ниже будут рассмотрены два способа оценивания: по аргументу корреляционной функции (АКФ-метод) и по максимуму правдоподобия (МП-метод).

#### 3.1. Оценивание радиальной скорости по аргументу корреляционной функции

При использовании АКФ-метода скорость оценивается как [18]

$$V_D(R) = \lambda \arg [\hat{B}_z(T_s)] / (4\pi T_s), \quad (9)$$

где  $\hat{B}_z(T_s) = \frac{1}{M-1} \sum_{i=0}^{M-2} Z(iT_s) Z^*((i+1)T_s)$  – несмещенная оценка корреляционной функции сигнала с временным сдвигом  $T_s$ . Найдем среднее значение такой оценки:  $\overline{B_z(T_s)} = (M-1)^{-1} \sum_{i=0}^{M-2} \overline{Z(iT_s)Z^*((i+1)T_s)}$ . Условия  $M \gg 1$  и  $t_p \gg T_s$  позволяют здесь перейти от суммирования по  $i$  к интегрированию по времени и на основании (6) получить формулу

$$\overline{B_z(T_s)} = \frac{SNR}{U_p} \int_{-\infty}^{\infty} dt P_T(t) \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt' \exp \left[ j \frac{4\pi}{\lambda} T_s V_r \left( R + \frac{c}{2} (t + t') \right) \right], \quad (10)$$

где  $\tau = MT_s$ . Пусть полученная с помощью (9) оценка скорости удовлетворяет неравенству  $-\lambda/(8T_s) < V_D(R) < \lambda/(8T_s)$ , тогда  $V_D(R)$  можно представить в виде

$$V_D(R) = \frac{1}{4\pi T_s} \text{arctg} \left\{ \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dt P_T(t) \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt' \sin \left[ \frac{4\pi}{\lambda} T_s V_r \left( R + \frac{c}{2} (t + t') \right) \right]}{\int_{-\infty}^{\infty} dt P_T(t) \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt' \cos \left[ \frac{4\pi}{\lambda} T_s V_r \left( R + \frac{c}{2} (t + t') \right) \right]} \right\} + V_e(R), \quad (11)$$

где

$$V_e(R) = \frac{1}{4\pi T_s} \text{arctg} \left\{ \frac{\text{Im}[\hat{B}_z(T_s) \overline{B_z(T_s)}^*]}{\text{Re}[\hat{B}_z(T_s) \overline{B_z(T_s)}^*]} \right\} \quad (12)$$

– погрешность оценки скорости, связанная с флуктуациями сигнала и шумами. Для упрощения первого слагаемого в (11) введем малый параметр  $\mu(t+t') = (4\pi/\lambda) T_S [V_r(R + (t+t')c/2) - V_a(R)]$ , где  $V_a(R)$  – значение скорости, наиболее близкое к значениям  $V_r$  в пределах зондируемого объема, и разложим в ряд числитель и знаменатель по этому параметру, ограничиваясь членами ряда второй степени:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt P_T(t) \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt' \sin(\beta + \mu) \approx \int_{-\infty}^{\infty} dt P_T(t) \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt' [\sin\beta + \mu\cos\beta - (1/2)\mu^2\sin\beta];$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt P_T(t) \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt' \cos(\beta + \mu) \approx \int_{-\infty}^{\infty} dt P_T(t) \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt' [\cos\beta - \mu\sin\beta - (1/2)\mu^2\cos\beta],$$

где  $\beta = (4\pi/\lambda) T_S V_a(R)$ . Наложив условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt P_T(t) \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt' \mu(t+t') = 0, \quad (13)$$

приходим к формуле

$$V_D(R) = V_a(R) + V_e(R), \quad (14)$$

где из решения уравнения (13) для  $V_a(R)$  имеем

$$V_a(R) = \frac{1}{U_P} \int_{-\infty}^{\infty} dt P_T(t) \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt' V_r \left[ R + \frac{c}{2}(t+t') \right]. \quad (15)$$

Формула (14) справедлива, если выполняется неравенство

$$\sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_a^2} \ll \lambda/(8T_S), \quad (16)$$

где  $\sigma_r^2 = \langle [V_r(R) - \langle V_r(R) \rangle]^2 \rangle$  и  $\sigma_a^2 = \langle [V_a(R) - \langle V_a(R) \rangle]^2 \rangle$  – дисперсии радиальной скорости ветра, соответственно, в точке и усредненной по зондируемому объему. Условие (16) практически всегда реализуется.

В случае гауссова импульса (7) из (15) следует

$$V_a(R) = \int_{-\infty}^{\infty} dz' Q_S(z') V_r(z'), \quad (17)$$

где

$$Q_S(z') = \frac{1}{\tau c} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{2}{c\sigma} (z' - R) + \frac{\tau}{c\sigma} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{2}{c\sigma} (z' - R) - \frac{\tau}{c\sigma} \right) \right] \quad (18)$$

– функция, характеризующая пространственное разрешение;  $\operatorname{erf}(x) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^x d\xi e^{-\xi^2}$  – инте-

грал вероятности. Функция  $Q_S(z')$  имеет максимум при  $z' = R$  и  $\int_{-\infty}^{\infty} dz' Q_S(z') = 1$ . Определив про-

дольный размер зондируемого объема  $\Delta z$  по формуле

$$\Delta z = \int_{-\infty}^{\infty} dz' Q_S(z')/Q_S(R) = Q_S^{-1}(R),$$

из (18) имеем

$$\Delta z = \frac{c\tau}{2} / \operatorname{erf}(\tau/2\sigma). \quad (19)$$

Расчеты по формуле (19) показывают, что при  $\sigma = 120$  нс и  $T_S = 20$  нс,  $M = 16$  ( $\tau = 320$  нс) величина  $\Delta z = 51$  м. Примерно такой же результат дает оценка продольного размера зондируемого объема по спаданию  $Q_S(z')/Q_S(R)$  до уровня 1/2. Отметим, что для таких же значений параметров  $\sigma$  и  $\tau$  оценка  $\Delta z$  по формуле  $\Delta z = (\ln 2)^{1/2} c\sigma + c\tau/2$  [5] дает величину 79 м, что примерно в 1,5 раза превышает оценку  $\Delta z$  по формуле (19).

### 3.2. Метод максимального правдоподобия

Оценивание скорости  $V_D(R)$  по максимуму правдоподобия предполагает из измеренных значений  $Z_m = Z(mT_S)$  построение логарифмической функции правдоподобия  $L(V)$  и нахождения значения  $V = V_D(R)$ , при котором  $L(V)$  имеет максимум. Без учета случайного характера скорости ветра регистрируемый сигнал  $Z_m$  можно считать нестационарным (вследствие неоднородности ветра:  $V_r(z') \neq \text{const}$ ) гауссовым процессом. Для гауссова процесса функция  $L(V)$  представима в виде [17, 19, 20]

$$L(V) = -2\operatorname{Re} \left[ \sum_{m=0}^{M-1} \left( \sum_{l=0}^{M-m-1} Z_l Z_{l+m}^* \Lambda_{l,l+m} \right) \exp \left( -j \frac{4\pi}{\lambda} V T_S m \right) \right] + \sum_{m=0}^{M-1} |Z_m|^2 \Lambda_{m,m} + \ln(\det \Lambda) - M \ln \pi, \quad (20)$$

где  $\Lambda = \{\Lambda_{m,l}\} = \mathbf{B}_z^{-1}$  – обратная корреляционная матрица;  $\mathbf{B}_z = \{|B_z(mT_S, lT_S)|\}$ . В настоящей статье для  $B_z(mT_S, lT_S)$  использовалось выражение (8). Получаемую таким способом оценку  $V_D(R)$  можно по аналогии с (14) представить в виде суммы усредненной по зондируемому объему радиальной скорости ветра  $V_a(R)$  и  $V_e(R)$  – погрешности оценки скорости, связанной с флуктуациями рассеянной волны и шумами.

Более детальное аналитическое рассмотрение АКФ- и МП-методов оказывается возможным лишь для предельного случая  $M \rightarrow \infty$ , поэтому дальнейший анализ проводился с использованием численного моделирования лидарного сигнала и его обработки.

### 4. Численное моделирование сигнала

Моделирование сигнала осуществлялось по следующей схеме [21, 22]. Трасса распространения зондирующего импульса гауссовой формы разбивалась на  $n_L$  тонких слоев, и регистрируемый в момент времени  $mT_S$  сигнал представлял собой сумму вкладов каждого из этих слоев и шума:

$$Z(mT_S) = \left( \frac{SNR \Delta p}{2\sqrt{\pi} p} \right)^{1/2} \sum_{k=0}^{n_L} a(k+ml) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\Delta p}{p} \right)^2 \left( \frac{n_L}{2} - k \right)^2 - j \frac{4\pi}{\lambda} m T_S V_r(\Delta p(k+ml)) \right\} + \frac{1}{\sqrt{2}} n_m, \quad (21)$$

где  $\Delta p$  – толщина слоя;  $p = \sigma c/2$ ;  $l = [cT_S/(2\Delta p)]$ . Число слоев  $n_L$  при моделировании задавалось равным  $n_L = [4\sqrt{2}p/\Delta p]$ . Для получения случайных реализаций  $Z(mT_S)$  по формуле (21) генерировались независимые комплексные случайные числа  $a(k)$  и  $n_m$  с действительными и мнимыми частями, распределенными по гауссовому закону с нулевым средним и единичной дисперсией, и действительные случайные значения скорости ветра  $V_r(\Delta p k)$ . Значения  $V_r(\Delta p k)$  получались из спектра единичного комплексного (гауссова) белого шума путем домножения его составляющих на коэффициенты, удовлетворяющие спектральной плотности турбулентных флуктуаций скорости ветра в атмосфере:

$$S_r(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} dr \langle \tilde{V}_r(R+r) \tilde{V}_r(R) \rangle e^{-2\pi j \kappa r},$$

где  $\tilde{V}_r = V_r - \langle V_r \rangle$ , и применения обратного преобразования Фурье. В представленных ниже результатах расчетов была использована в качестве  $S_r(\kappa)$  модель Кармана [23]:

$$S_r(\kappa) = 2\sigma_r^2 L_V / [1 + (8,43 \kappa L_V)^2]^{5/6}, \quad (22)$$

где  $L_V$  – интегральный масштаб корреляции скорости ветра (внешний масштаб турбулентности). На высоких частотах  $\kappa L_V > 1$  спектральная плотность  $S_r(\kappa)$  удовлетворяет закону Колмогорова–Обухова [24]:

$$S_r(\kappa) = 0,0375 C_K \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}, \quad (23)$$

где  $C_K \approx 2$  – постоянная Колмогорова;  $\varepsilon$  – скорость диссипации турбулентной энергии. Из (22) и (23) имеем связь между  $\varepsilon$ ,  $\sigma_r^2$  и  $L_V$  в виде

$$\varepsilon = \frac{1,887}{C_K^{3/2}} \frac{\sigma_r^3}{L_V}. \quad (24)$$

Моделирование сигнала осуществлялось для  $\lambda = 2$  мкм,  $\sigma = 120$  нс,  $T_S = 20$  нс и  $\Delta p = 0,3$  м. При этом  $p = 18$  м,  $n_S = 340$  и  $l = 10$ .

## 5. Оценивание скорости диссипации турбулентной энергии

С целью анализа возможностей лидарного зондирования скорости диссипации  $\varepsilon$  рассмотрим структурную функцию доплеровской оценки скорости:

$$D(r) = E \{ [\tilde{V}_D(R+r) - \tilde{V}_D(R)]^2 \}, \text{ где } \tilde{V}_D = V_D - \langle V_D \rangle; E\{A\} = \langle \overline{A} \rangle.$$

Учитывая, что  $V_a(R)$  и  $V_e(R)$  являются независимыми [5, 22], структурную функцию  $D(r)$  представим в виде

$$D(r) = D_a(r) + D_e(r), \quad (25)$$

где  $D_a(r) = \langle [\tilde{V}_a(R+r) - \tilde{V}_a(R)]^2 \rangle$  – пространственная структурная функция усредненной по зондируемому объему радиальной скорости ветра;  $D_e(r) = E \{ [\tilde{V}_e(R+r) - \tilde{V}_e(R)]^2 \}$  – структурная функция погрешности оценки доплеровской скорости. В случае гауссова зондирующего импульса для  $D_a(r)$  из (15) имеем

$$D_a(r) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa S_r(\kappa) H(\kappa) [1 - \cos(2\pi\kappa r)], \quad (26)$$

где

$$H(\kappa) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\pi c s \kappa)^2 \left[ \frac{\sin(\pi c t \kappa / 2)}{\pi c t \kappa / 2} \right]^2 \right\} \quad (27)$$

– передаточная функция низкочастотного пространственного фильтра. В инерционном интервале масштабов турбулентных неоднородностей  $r \ll L_V$ , в (26) для  $S_r(\kappa)$  можно воспользоваться формулой (23), так что в этом случае  $D_a(r) \sim \varepsilon^{2/3}$ .

Структурную функцию  $D_e(r)$  представим в виде

$$D_e(r) = 2[\sigma_e^2 - B_e(r)], \quad (28)$$

где  $B_e(r) = E \{ \tilde{V}_e(R+r) \tilde{V}_e(R) \}$  и  $\sigma_e^2 = B_e(0)$  – корреляционная функция и дисперсия погрешности оценки доплеровской скорости соответственно. Численный анализ показывает, что интегральный масштаб корреляции этой погрешности  $L_e \sim \Delta z$  и при  $r \gg \Delta z$  функция  $D_e(r) = 2\sigma_e^2$ .

Таким образом, из (25) – (28) и (23) следует, что при

$$\Delta z \ll r \ll L_V \quad (29)$$

$D(r)$  описывается асимптотической формулой

$$D(r) = C_K \varepsilon^{2/3} r^{2/3} - D_0 + 2\sigma_e^2 \quad (30)$$

где

$$D_0 = 0,15 C_K \varepsilon^{2/3} \int_0^{\infty} dx x^{-5/3} [1 - H(x)]. \quad (31)$$

Откуда для оценки скорости диссипации  $\hat{\varepsilon}$  получаем

$$\hat{\varepsilon} = \left[ \frac{\hat{D}(r_2) - \hat{D}(r_1)}{(r_2^{2/3} - r_1^{2/3}) C_K} \right]^{3/2}, \quad \Delta z \leq r_{1,2} \ll L_T, \quad (32)$$

где  $\hat{D}(r_i)$  – оценка структурной функции скорости,  $i = 1, 2$ . Если условие  $C_K \varepsilon^{2/3} (r_2^{2/3} - r_1^{2/3}) \gg \gg [E \{[\tilde{D}(r_2) - \tilde{D}(r_1)]^2\}]^{1/2}$  выполнено, то для дисперсии относительной погрешности оценки скорости диссипации турбулентной энергии  $s_\varepsilon^2 = E\{[(\hat{\varepsilon} - \varepsilon)/\varepsilon]^2\}$  из (32) находим асимптотическое выражение

$$\sigma_\varepsilon^2 = (9/4) [C_K \varepsilon^{2/3} (r_2^{2/3} - r_1^{2/3})]^{-2} E \{[\tilde{D}(r_2) - \tilde{D}(r_1)]^2\}, \quad (33)$$

где  $\tilde{D}(r_i) = \hat{D}(r_i) - D(r_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

Полагая, что структурная функция  $\hat{D}(r_i)$  есть результат усреднения  $n_a$  квадратов разности доплеровских оценок скорости, полученных в течение времени измерения в выделенном участке зондирования вдоль оси  $z'$ , и считая, что условие (29) заведомо выполняется (высота зондирования  $\varepsilon$  велика), для относительной погрешности  $\sigma_\varepsilon$  получаем

$$\sigma_\varepsilon = \frac{6}{C_K \varepsilon^{2/3} (r_2^{2/3} - r_1^{2/3})} \frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{n_a}} \left[ \sigma_\varepsilon^2 + \frac{C_K}{2} \varepsilon^{2/3} (r_2^{2/3} + r_1^{2/3} - \frac{9}{10} (\Delta z)^{2/3}) \right]^{1/2}. \quad (34)$$

Откуда следует, что при  $\varepsilon = 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}^3$ ,  $\Delta z = 50 \text{ м}$ ,  $r_1 = 100 \text{ м}$ ,  $r_2 = 400 \text{ м}$  и  $\sigma_\varepsilon = 1 \text{ м/с}$  для получения оценки  $\hat{\varepsilon}$  с погрешностью 20% необходимо при оценке  $\hat{D}(r_i)$  использовать  $n_a \approx 3500$  усреднений.

При измерениях в приземном слое или на небольших высотах пограничного слоя атмосферы внешний масштаб турбулентности  $L_T$  может быть сравним с продольным размером зондируемого объема  $\Delta z$  и условие (29) не будет выполняться. В этом случае величину  $\varepsilon$  следует оценивать из результатов измерений функции [22]

$$D_P(r) = E \{[\tilde{V}_D^{(1)}(R+r) - \tilde{V}_D^{(2)}(R)]^2\}, \quad (35)$$

где индексы (1) и (2) относятся к оценкам скорости из эхосигналов двух соседних посылок зондирующих импульсов. При этом частота повторения импульсов должна быть достаточно высока, чтобы выполнялось условие замороженности турбулентности  $V_a^{(1)}(R) \approx V_a^{(2)}(R)$ . Тогда можно положить  $V_D^{(i)} \approx V_a^{(i)}(R) + V_e^{(i)}(R)$ , где  $i = 1, 2$ . С учетом независимости  $V_a^{(i)}(R)$ ,  $V_e^{(1)}(R)$  и  $V_e^{(2)}(R)$  из (35) имеем

$$D_P(r) = 2\sigma_e^2 + D_a(r). \quad (36)$$

Из (36) следует, что  $D_P(0) = 2\sigma_e^2$ .

Обозначим через  $\Delta r = cT_S/2$  расстояние между двумя оценками скорости (для  $T_S = 20 \text{ нс}$ ,  $\Delta r = 3 \text{ м}$ ). Оценку  $\hat{\varepsilon}$  можно получить из решения системы уравнений (метод наименьших квадратов):

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_0(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0, \\ \frac{\partial \rho_0(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0, \end{cases} \quad (37)$$

где

$$\rho_0(\alpha, \beta) = \sum_{m=0}^M [\hat{D}_P(m\Delta r) - \alpha^2 - \beta^2 F_a(m\Delta r)]^2; \quad (38)$$

$M\Delta r \ll L_V$ ,  $\hat{D}_P(m\Delta r)$  – оценка функции (35);  $\alpha = \sqrt{2} \hat{\sigma}_e$ ;  $\beta = (\hat{s})^{1/3}$ ;  $F_a(m\Delta r) = D_a(m\Delta r)/\varepsilon^{2/3}$  – функция, описываемая формулами (26), (27) и (23). При этом следует выбирать действительные (при  $\alpha^2 > 0$  и  $\beta^2 > 0$  ненулевые) решения системы уравнений (37).

## 6. Результаты численного моделирования и обработки данных

Численное моделирование сигнала выполнялось для 2-мкм импульсного доплеровского лидара с  $\sigma = 120$  нс и  $T_S = 20$  нс при различных отношениях сигнал-шум  $SNR$ . Отдельные случайные реализации радиальной скорости ветра с нулевым средним значением ( $\langle V_r \rangle = 0$ ) моделировались на отрезке длиной  $L_R = 2048 \Delta p = 614,4$  м при  $\Delta p = 0,3$  м. Скорость  $V_r$  моделировалась для случая кармановского спектра (22) с  $\sigma_r = 1$  м/с и  $L_V = 150$  м. При этом согласно (24) скорость диссипации турбулентной энергии  $\varepsilon = 4,45 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}^3$ .

Для отдельной посылки импульса («выстрела»), в предположении, что импульс находится в пределах выбранного на отрезке  $[0, L_R]$  интервала  $\Delta L_R$ , моделировалось 64 значения комплексного сигнала  $Z(mT_S)$ , из которых при  $M = 16$  ( $\tau = 320$  нс,  $c\tau/2 = 48$  м) АКФ- и МП-методами оценивалось по 49 значений скорости  $V_D$ .

В предположении, что частота повторения «выстрелов» равна 10 Гц, мы полагали, что при очередной посылке импульса интервал  $\Delta L_R$  смещался на расстояние 0,9 м относительно распределения случайной реализации ветра вдоль трассы зондирования. Для внешнего масштаба турбулентности  $L_V = 150$  м это соответствовало в предположении «замороженности» турбулентности примерно 15 с времени корреляции радиальной скорости. Одна реализация ветра  $V_r$  выбранной длины использовалась для 350 «выстрелов». Для представленных ниже результатов моделировалось по 1000 реализаций  $V_r$ . Общее число оценок  $V_D$ , получаемых каждым из применявшихся (АКФ и МП) методов оценивания, составляло  $1000 \times 350 \times 49 = 1,715 \cdot 10^7$ . В случае малых значений  $SNR$  для получения устойчивых оценок статистических характеристик требовался еще больший объем выборочных данных.

На рис. 1 представлены результаты расчетов функций  $D(r)$ ,  $D_P(r)$  и  $D_a(r)$ . Из сравнения кривых 1 и 2 (или 3 и 4) видно, что для приведенных данных протяженности инерционного интервала турбулентности  $r_{in}$ , где эти кривые не должны существенно расходиться, ограничена примерно 50 м, т.е. соизмерима с продольным размером объема зондирования  $r_{in} \approx \Delta z$ . Поэтому для оценки скорости диссипации турбулентной энергии нами использовался алгоритм (37), (38). Расхождение кривых 1 и 3 иллюстрирует влияние пространственного усреднения радиальной скорости ветра по зондируемому объему.

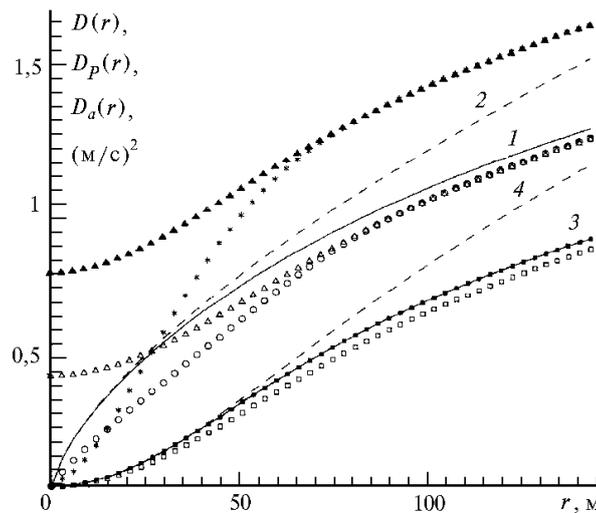


Рис. 1. Функции  $D(r)$ ,  $D_P(r)$  и  $D_a(r)$ : 1 и 2 – расчет структурной функции  $D(r)$  для скорости, измеряемой в точке, в случае кармановского (кривая 1) и колмогоровского (кривая 2) спектров; 3 и 4 – расчет структурной функции  $D_a(r)$  по формуле (26) для тех же моделей спектров соответственно; ▲, △ –  $D_P(r)$ ; ■, □ –  $D_a(r)$ ; \*, ○ –  $D_a(r)$ ; ▲, ■, \* – АКФ-метод; △, □, ○ – МП-метод

Из рис. 1 видно, что дисперсия погрешности оценки скорости  $\sigma_e^2 = D_p(0)/2$  в случае АКФ-метода выше, чем для МП-метода. Это согласуется с известными результатами [17]. С увеличением  $r$  различие между  $D_p(r)$  и  $D(r)$  пропадает, что связано с уменьшением уровня корреляции погрешностей  $V_e(R+r)$  и  $V_e(R)$ .

На рис. 2 представлены результаты расчетов коэффициента корреляции погрешностей оценки скорости  $K_e(r) = [D_p(r) - D(r)]/D_p(0)$  с использованием формул (25), (28) и (36) при различных  $SNR$ . Видно, что эффективный масштаб корреляции погрешностей  $\sim \Delta z = 51$  м и с уменьшением  $SNR$  уменьшается.

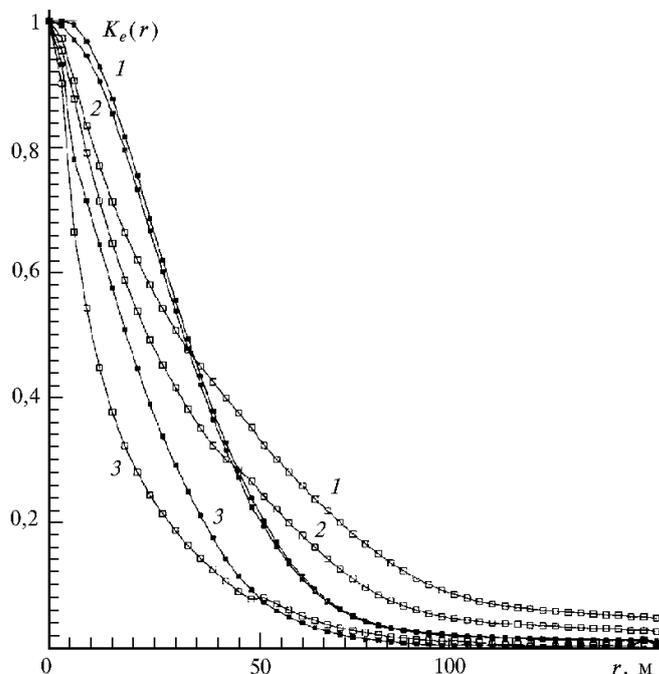


Рис. 2. Коэффициент корреляции погрешности оценки скорости ветра: ■ – АКФ-метод; □ – МП-метод;  $SNR = 1000$  (1), 100 (2) и 10 (3)

Согласно данным рис. 1 расчеты  $D_a(r)$  по формулам (26), (27), (22) и на основе моделирования с использованием для оценивания скорости ветра АКФ-метода дают, как это было показано ранее [22], одинаковый результат в широком диапазоне значений  $SNR$  (вплоть до  $SNR = 1$ ). В то же время структурная функция  $D_a(r)$ , рассчитанная с помощью МП-метода, имеет, по сравнению с результатами расчетов по формулам, заниженные значения. Как следствие, оценка скорости диссипации  $\hat{\epsilon}$ , определяемая из решения системы уравнений (37) с использованием для  $F_a(m\Delta r)$  формул (26), (27) и (23), должна иметь смещение (регулярное занижение).

На рис. 3 показаны структурные функции  $D_a(r)$ , полученные с использованием АКФ- и МП-методов, при различных отношениях сигнал-шум. Штриховой кривой здесь обозначена асимптотика  $D_a(m\Delta r) = \epsilon^{2/3} F_a(m\Delta r)$ , где  $F_a(m\Delta r)$  используется в (38) при нахождении оценки  $\hat{\epsilon}$ . Из рис. 3 видно, что с падением  $SNR$  различие между  $D_a(r)$ , получаемыми разными способами, уменьшается и, следовательно, смещение оценки  $\hat{\epsilon}$  в случае МП-метода должно становиться меньше.

Результаты моделирования при небольших значениях  $SNR$  указывают на невозможность получения оценки  $\hat{\epsilon}$  с приемлемой точностью из измеренной в реальном масштабе времени функции  $\hat{D}_p(r)$  без применения специальных процедур обработки данных.

На рис. 4 для примера показаны функции распределения плотности вероятности  $P_f(V_D)$  оценок скорости по методам МП (кривая 1) и АКФ (кривая 2) при  $SNR = 1$ . Видно, что АКФ-метод дает более размытое распределение  $P_f(V_D)$  по сравнению с МП-методом. Для случая АКФ-метода при однородном ветре  $V_r = \text{const}$  в [25] приведена асимптотическая формула для  $P_f(V_D)$ . При использовании МП-метода функция  $P_f(V_D)$  хорошо аппроксимируется гауссовым распределением (на рис. 4 оно показано в виде штриховой кривой), описывающим согласно используемой в [17]

терминологии распределение «хорошей» оценки скорости на равномерном пьедестале, представляющем собой распределение «плохой» (или заведомо ложной) оценки скорости.

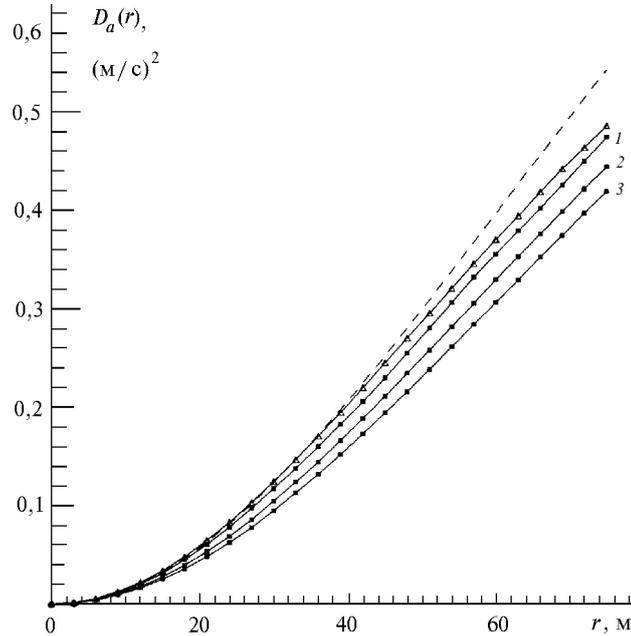


Рис. 3. Структурная функция  $D_a(r)$ : штриховая кривая – расчет по формуле (26) для колмогоровского спектра;  $\blacktriangle$  – АКФ-метод;  $\blacksquare$  – МП-метод;  $SNR = 10$  (1), 100 (2) и 1000 (3)

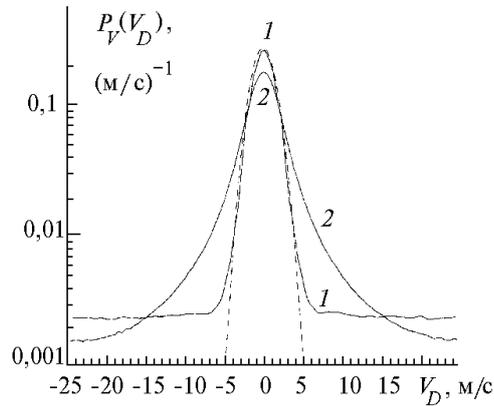


Рис. 4. Функция плотности вероятности оценок скорости МП-методом (кривая 1) и АКФ-методом (кривая 2); штриховой кривой показано гауссово распределение

Полученные массивы оценок  $V_D$  позволяют найти плотность вероятности  $P_V(V_D)$  и выделить интервал скоростей  $V_D$  с центром, приходящимся на максимальное значение  $P_V(V_D)$ . В нашем случае оптимальным является интервал скоростей от  $-5$  до  $+5$  м/с. С целью отсекаания «плохих» оценок скорости оценки  $V_D$ , которые не попадают в данный интервал, отбрасываются. С учетом того что  $V_D$  используются для расчета пространственной функции  $D_P(m\Delta r)$  (35), данные, которые относятся к паре соседних «выстрелов», где хотя бы одно значение выходит за пределы указанного интервала, целиком «бракуются». Такая процедура фильтрации данных, конечно, имеет недостаток, заключающийся в уменьшении их объема, особенно при использовании АКФ-метода. Тем не менее она приводит к более точному оцениванию  $\hat{e}$ , чем при использовании всех (включая «плохие») оценок  $V_D$ , в том числе и в случае применения «некоррентного» усреднения. Описанная процедура применялась нами при  $SNR \leq 10$ .

Из полученного большого массива данных  $V_D$  нами оценивалась функция  $\hat{D}_P(m\Delta r)$  при варьировании числа «выстрелов» от 350 до 17500. Для частоты повторения импульсов 10 Гц это соответствовало времени усреднения  $T$  от 35 с до 1750 с  $\approx 30$  мин. С использованием найденных зна-

чений  $\hat{\epsilon}$  рассчитывалась зависимость относительной погрешности оценки скорости диссипации  $\sigma_\epsilon$  от времени усреднения  $T$ . Относительная погрешность расчета  $\sigma_\epsilon$  не превышала 10%.

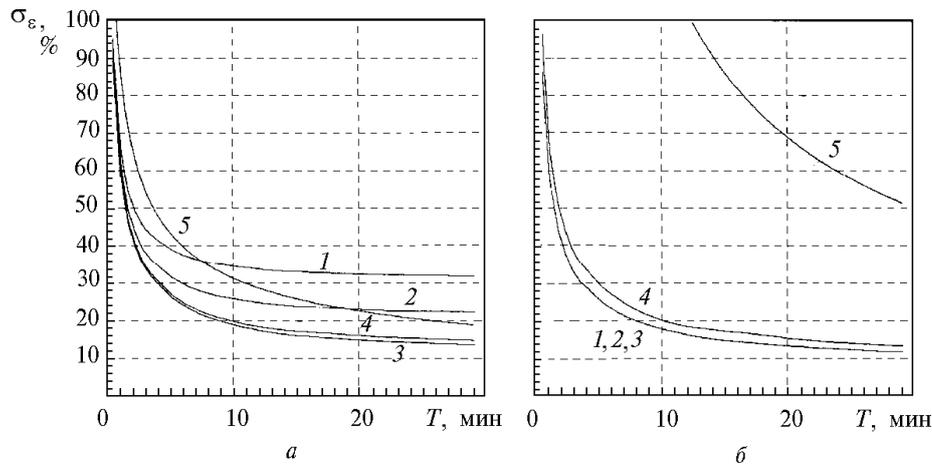


Рис. 5. Относительная погрешность оценки скорости диссипации турбулентной энергии как функция времени усреднения: *a* – МП-метод; *б* – АКФ-метод;  $SNR = 1000$  (1), 100 (2), 10 (3), 5 (4), 1 (5)

На рис. 5 приведены зависимости  $\sigma_\epsilon$  (%) от времени усреднения  $T$  для оценивания скорости  $V_D$  МП- (рис. 5,а) и АКФ-методами (рис. 5,б). Видно, что с увеличением  $T$  погрешность  $\sigma_\epsilon$  в рассматриваемом интервале времен усреднения монотонно падает, за исключением случаев, описываемых кривыми 1 и 2 на рис. 5,а. Здесь происходит насыщение на определенные уровни из-за смещения, возникающего при оценивании  $\hat{\epsilon}$  с помощью МП-метода в случае больших  $SNR$  (вследствие неправильного задания подгоночной функции  $F_a(m\Delta r)$  в (38)). Наблюдаемая большая погрешность  $\sigma_\epsilon$  в случае АКФ-метода при  $SNR = 1$  (см. рис. 5,б, кривая 5) обусловлена существенной «потерей» данных после применения описанной выше процедуры фильтрации.

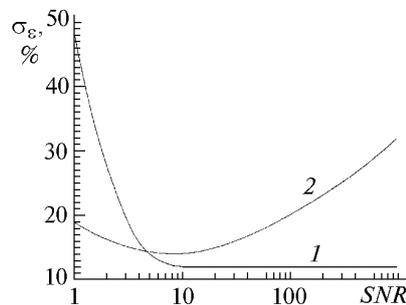


Рис. 6. Зависимость  $\sigma_\epsilon$  от  $SNR$  для 30-минутного усреднения: 1 – МП-метод; 2 – АКФ-метод

На рис. 6 приведена погрешность  $\sigma_\epsilon$  как функция отношения сигнал-шум при времени усреднения  $T = 30$  мин. Из рисунка следует, что для оценивания скорости диссипации турбулентной энергии в случае больших  $SNR \geq 5$  лучший результат дает АКФ-метод, а при  $SNR < 5$  – МП-метод.

## 7. Заключение

Таким образом, в статье для случая малых по сравнению с внешним масштабом турбулентности продольных размеров лидарного объема найдена асимптотическая формула (34), позволяющая оценивать объем статистической выборки, необходимый для достижения наперед заданной точности оценивания скорости диссипации кинетической энергии турбулентности из данных импульсного лидара.

Показано, что метод оценивания скорости ветра по аргументу корреляционной функции дает меньшую погрешность при больших отношениях сигнал-шум, а метод максимального правдоподобия – при малых. Из результатов проведенного численного моделирования следует, что при использовании достаточно больших объемов выборочных данных относительная

погрешность оценивания скорости диссипации турбулентной энергии с помощью импульсных доплеровских лидаров не будет превышать 15–20% при отношениях сигнал-шум  $\geq 1$ .

1. Hall F.F., Huffaker R.M., Hardesty R.M. et al. // *Appl. Optics*. 1984. V. 23. № 15. P. 2503–2506.
2. Henderson S.W., Hale C.P., Magee J.R. et al. // *Optics Lett.* 1991. V. 16. № 10. P. 773–775.
3. Cal-Chen T., Mei Xu and Eberhard W.L. // *J. Geophys. Res.* 1992. V. 97. № D17. P. 18409–18423.
4. Hawley J.G., Targ R., Henderson S.W. et al. // *Appl. Optics*. 1993. V. 32. № 24. P. 4557–4568.
5. Frehlich R., Hannon S.M. and Henderson S.W. // *J. Atmos. Oceanic Technol.* 1994. V. 11. № 6. P. 1517–1528.
6. Hannon S.M., Thomson J.A., Henderson S.W. and Huffaker R.M. // *Air Traffic Control Technologies. Proc. SPIE*. 1995. V. 2464. P. 94–102.
7. Frehlich R., Hannon S.M. and Henderson S.W. // *Appl. Optics*. 1997. V. 36. № 15. P. 3491–3499.
8. Klein V., Roths J. and Hilber B. // 9:th conference on Coherent Laser Radar. 1997. P. 281–284.
9. Банях В.А., Вернер Х., Керкис Н.Н., Копп Ф., Смалихо И.Н. // *Оптика атмосферы и океана*. 1995. Т. 8. № 12. С. 1726–1732.
10. Смалихо И.Н. // *Оптика атмосферы и океана*. 1996. Т. 9. № 10. С. 1336–1344.
11. Банях В.А., Вернер Х., Копп Ф., Смалихо И.Н. // *Оптика атмосферы и океана*. 1996. Т. 9. № 10. С. 1336–1344.
12. Банях В.А., Вернер Х., Копп Ф., Смалихо И.Н. // *Оптика атмосферы и океана*. 1997. Т. 10. № 3. С. 322–332.
13. Банях В.А., Смалихо И.Н. // *Оптика атмосферы и океана*. 1997. Т. 10. № 4–5. С. 473–484.
14. Frehlich R. and Kavaуа M.J. // *Appl. Optics*. 1991. V. 30. № 36. P. 5325–5352.
15. Frehlich R. // *Appl. Optics*. 1994 V. 33. № 27. P. 6472–6481.
16. Ван дер Зил А. Шумы при измерениях. М.: Мир, 1979. 230 с.
17. Frehlich R. and Yadowsky M.J. // *J. Atmos. Oceanic Technol.* 1994 V. 11. P. 1217–1230.
18. Doviak R.J. and Zrnic D.S. *Doppler Radar and Weather Observations*. Academic Press, 1993. 562 p.
19. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. М.: Советское радио, 1972. 744 с.
20. Zrnic D.S. // *IEEE Trans. Geosc. Electr.* 1979. V. GE-17. № 4. P. 113–128.
21. Salamiou P., Dabas A. and Flamant P. // *Appl. Optics*. 1995. V. 34. № 3. P. 499–506.
22. Frehlich R. // *J. Atmos. Oceanic Technol.* 1997. V. 14. P. 54–75.
23. Винниченко Н.К., Пинус Н.З., Шметер С.М., Шур Г.Н. Турбулентность в свободной атмосфере. Л.: Гидрометеоздат, 1976. 287 с.
24. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Наука, 1967. 720 с.
25. Zrnic D.S. // *IEEE Trans. Aerosp. and Electron. Syst.* 1977. V. AES-13. № 4. P. 344–354.

Институт оптики атмосферы СО РАН,  
Томск

Поступила в редакцию  
1 августа 1997 г.

**V. A. Banakh, I. N. Smalikhov. Estimation of Turbulent Energy Dissipation Rate from Data of Pulse Doppler Lidar.**

Based on numerical simulation results, the possibilities for estimating the dissipation rate of kinetic energy of the turbulence from the data of pulse Doppler lidar were analyzed and the errors of the estimation were calculated. It was carried out the comparison of the accuracy of estimation of the wind velocity spatial structure function from the Doppler data, obtained by two methods: the pulse-pair estimator and the maximum likelihood estimator. It was shown that the relative error of the estimates does not exceed 15–20 % at ratio signal/noise  $\geq 1$  when using a great body of information.