«Оптика атмосферы и океана», **11**, N 1 (1998)

УДК 535.36+535.375

А.В. Фабриков, О.И. Алдошина

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФРАКЦИОННЫХ ПОЛЕЙ НА ВЫХОДЕ СЛАБО СФОКУСИРОВАННОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С АКСИКОНОМ

Развит математический аппарат для моделирования дифракционных полей на выходе расфокусированной оптической системы с аксиконом. Выведено достаточно простое для практического использования уравнение, выражающее поле возмущенной (расфокусированной) системы через решение соответствующей невозмущенной системы. Проведено сравнение с полученными ранее другими методами аналитическими решениями той же задачи для двух частных случаев входного воздействия: плоская волна и гауссов пучок на входе системы.

1. Особенностью дифракционных полей, возникающих на выходе хорошо сфокусированной оптической системы «аксикон–линза» или же в дальней зоне (зоне Фраунгофера) безлинзовой аксиконной системы под действием коллимированного лазерного излучения, является их локализация в узком кольцевом слое периферийной части формируемого пучка. Эта особенность полей, создаваемых сфокусированной аксиконной системой, обусловила интерес к ним и их практическое использование во многих областях техники – от лазерной технологии [1–3] до космической связи [4]. Структура кольцевых дифракционных полей рассматривалась в ряде работ [5–9]; тепловые эффекты их воздействия на материал исследовались в [10]. Менее изучены поля с размытой кольцевой структурой, создаваемые расфокусированной (слабо сфокусированной) аксиконной системой. Они и составляет предмет настоящего исследования. Мы будем называть эти поля «возмущенными» в противоположность «невозмущенным» полям, формируемым сфокусированной системой.

Модели невозмущенных полей строятся на основе уравнения Фурье-оптики [11], связывающего в параксиальном приближении скалярной теории дифракции Кирхгофа комплексные амплитуды осесимметричного поля на входе $\psi_1(\tau')$ и выходе $\psi(r)$ аксиконной системы:

$$\psi(r) = \frac{k}{z}\int_0^R \psi_1(r')\exp(i\,\omega_0\,r')\,I_0(\omega r')\,r'\,dr',\quad \omega = kr/z, \quad (1)$$

где $\exp(i\omega_0 r')$ – функция пропускания аксикона, играющего роль линейного пространственного модулятора фазы волны;

$$\omega_0 = k\phi = kr_0/z \quad (2)$$

– параметр, выражаемый через волновое число $k = 2\pi/\lambda$ и угол ϕ отклонения лучей аксиконом; $r_0 = \phi z$ – радиус средней линии кольца засветки выходной плоскости системы; $I_0(\cdot)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка; R – апертурный размер аксикона. Под выходной плоскостью системы «аксикон–линза» будем понимать фокальную плоскость линзы, полагая $z = f$, где f – фокусное расстояние; для «сфокусированной» безлинзовой системы выходная плоскость – это поперечное сечение пучка в зоне Фраунгофера на расстоянии z от аксикона. Роль фокусирующей системы здесь играет слой пространства достаточно большой протяженности. В математическом отношении обе эти ситуации равноценны и описываются уравнением одного и того же типа (1) с той лишь разницей, что величина z, соответствующая зоне Фраунгофера системы, значительно превышает фокусное расстояние f всех встречающихся на практике линз.

Уравнение (1) и вытекающие из него модели кольцевых дифракционных полей исследованы достаточно полно. Значительно меньшее внимание было уделено уравнению

$$\psi(r) = \frac{k}{z}\int_0^R \psi_1(r')\exp(i\,\delta\,r'^2)\exp(i\,\omega_0\,r')\,I_0(\omega r')\,r'\,dr', \quad (3)$$

описывающему ту же систему для более общего случая слабо сфокусированного состояния и отличающемуся от (1) наличием дополнительного фазового члена $\exp(i\delta\tau'^2)$; последний по аналогии с использованным выше определением аксикона можно было бы назвать квадратичным пространственным модулятором фазы волны. Если рассматривается поле $\psi(r)$ вблизи фокальной плоскости системы, параметр δ можно определить как

$$\delta = \frac{k}{z}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f}\right) \approx \frac{k(f-z)}{2f^2}. \quad (4а)$$

Для безлинзовой системы при больших z параметр δ в уравнении (3) в приближении Френеля равен

$$\delta = k/2z. \quad (4б)$$

Пренебречь «дефокусирующим» членом $\exp(i\delta\tau'^2)$ в (3) можно лишь при условии $\delta\tau'^2 \ll 1$, не всегда выполняющемся на практике. Это условие не выполняется, например, во многих применениях, связанных с лазерной технологией, когда сформированный аксиконной системой как кольцевым концентратором энергии излучения пучок используется для сварки или сверления деталей конечной толщины [1]. Оно может нарушаться также и в других применениях, в частности при работе лазерного маяка с полым прожекторным лучом [4] при не слишком больших удалениях объекта от маяка. Во всех таких случаях учет множителя $\exp(i\delta\tau'^2)$ в уравнении (3) необходим. Но он сильно усложняет вычисления.

2. Будем называть (3) уравнением слабо сфокусированной оптической системы с аксиконом. Обычный подход [6] к анализу этого уравнения заключается в разложении возмущающего экспоненциального множителя $\exp(i\delta\tau'^2)$ в степенной ряд и переходе от (3) к более громоздкому, но и более простому по структуре входящих в него членов уравнению

$$\psi(r) = \frac{k}{z} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\delta)^m}{m!} \times$$

$$\times \int_0^R \psi_1(r') \exp(i\,\omega_0\, r')\, I_0(\omega r')\, (r')^{2m+1}\, dr'. \qquad (5)$$

В двух частных случаях, а именно для плоской волны и для гауссова пучка на входе, интеграл удается представить в аналитическом виде с помощью теоремы разложения по функциям Бесселя [12, с. 382]

$$I_0(\lambda t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda^2)^n}{n!} (t/2)^n I_n(t) \qquad (6)$$

и формулы [12, с. 337]

$$G_{m,n}(x) = \frac{x^{2(m+n+1)}}{2(m+n+1)\, 2^n\, n!} \times$$

$$\times\, {}_2F_2\left(\begin{matrix} n+1/2,\ 2m+2n+2 \\ 2n+1,\ 2m+2n+3 \end{matrix} \,\middle|\, 2ix\right), \qquad (7)$$

выражающей интеграл Люка

$$G_{m,n} \triangleq \int_0^x \exp(it)\, I_n(t)\, t^{2m+n+1}\, dt \qquad (8)$$

через обобщенную гипергеометрическую функцию

$${}_2F_2\left(\begin{matrix} n+1/2,\ 2m+2n+2 \\ 2n+1,\ 2m+2n+3 \end{matrix} \,\middle|\, 2ix\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+1/2)_k\, (2m+2n+2)_k}{(2n+1)_k\, (2m+2n+3)_k} (2ix)^k,$$

$$(\alpha)_k \triangleq \Gamma(\alpha+k)/\Gamma(\alpha) = \alpha(\alpha+1)\,...\,(\alpha+k+1)\,.$$

Решения даются двойными рядами по этим функциям со значением $x = \omega_0 R$; индексами суммирования являются m и n. Коэффициентами при отдельных членах рядов служат величины $(i\tilde{\delta})^m \rho^n/m!$, где

$$\rho = (ka/z)\,(r - r_0) \qquad (9)$$

– безразмерная, нормированная и смещенная на r_0 радиальная переменная r. Через a здесь обозначен некий характерный размер, совпадающий с радиусом апертуры R для случая плоской волны и с поперечным размером $W/2$ для гауссова пучка вида $\psi_1(\tau') = \sqrt{I_0}\exp(-r'^2/W^2)$. Параметр $i\tilde{\delta}$ безразмерен; в случае плоской волны он совпадает с $i\delta R^2$, а в случае гауссова пучка равен $(i\delta - 1/W^2)R^2$.

В асимптотическом приближении по параметру x, значения которого во всех встречающихся на практике случаях на 2–3 порядка превышают единицу, гипергеометрические функции упрощаются, двойные ряды сворачиваются и решение приводится к виду

$$\psi(r) = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\delta R^2)^n}{n!} \frac{3}{3+4n}\, {}_1F_1(2n+3/2, 2n+5/2; i\rho), \qquad (10)$$

$$A = \sqrt{I_0 \frac{4\,R^3}{9\, z r_0\, \lambda}}$$

для плоской волны и

$$\psi(r) = \tilde{B}\left[\, {}_1F_1(3/4,\ 1/2; -\tilde{\rho}^2) - \right.$$

$$\left. - 2i\tilde{\rho} \frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(3/4)}\, {}_1F_1(5/4,\ 3/2; -\tilde{\rho}^2) \right], \qquad (11)$$

$$\tilde{B} = B/(1 + i\delta W^2)^{3/4}, \quad \tilde{r} = \rho/(1 + i\delta W^2)^{1/2}$$

для гауссова пучка. Через ${}_1F_1(a, b; z)$ здесь обозначены вырожденные (конфлуюэнтные) функции Куммера.

3. Проведенный анализ уравнения (3), основанный на преобразовании (3) к виду (5) с последующим использованием тождеств (6), (7) и суммированием рядов по обобщенным гипергеометрическим функциям [6], вполне строг, но громоздок и слишком «специализирован»: он применим лишь к двум рассмотренным выше частным случаям входного воздействия на систему. Ниже излагается более общий подход, позволяющий сравнительно просто получить решение «возмущенной» задачи (1). Решение последней может быть легко найдено для широкого класса осесимметричных входных воздействий, описываемых гладкими функциями радиальной координаты, если не аналитическими, то численными или полуаналитическими методами (см., например, [4]). Применительно к рассматриваемым выше частным случаям плоской волны и гауссова пучка на входе предлагаемый подход дает результаты, совпадающие с (10) и (11).

4. Будем рассматривать уравнения (1) и (3) как преобразования Фурье по частоте ω_0 от соответствующих подынтегральных выражений. Возможность такого представления вытекает из самого вида этих уравнений. Тогда функцию, определяемую возмущенным уравнением (3) (будем обозначать ее через $\psi_d(r) \equiv \psi_d(\omega_0)$), можно описать интегралом свертки в частотной области

$$\psi_d(r) = \psi(\omega_0) * f(\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\tau)\, \psi(\omega_0 - \tau)\, d\tau \qquad (12)$$

между функциями $\psi(\omega_0)$ и $f(\omega_0)$. Здесь $\psi(\omega_0) \equiv \psi(r)$ – решение невозмущенной задачи (1) и $\tilde{f}(\omega_0) = F_{\omega_0}\{\exp(i\delta r'^2)\} = \sqrt{\pi/i\delta}\exp(-i\,\omega_0^2/4\delta)$ – Фурье-преобразование возмущающего члена $\exp(i\delta r'^2)$. Последнее равенство выводится с помощью очевидных преобразований:

$$F_{\omega_0}\{\exp(i\delta r'^2)\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\delta r'^2)\exp(i\omega_0 r')\, dr' =$$

$$= \exp(-i\,\omega_0^2/4\delta) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\delta x^2)\, dx = \sqrt{i\pi/\delta}\exp(-i\,\omega_0^2/4\delta)\,.$$

Разлагая $\psi_0(\omega_0 - \tau)$ в ряд Тейлора по τ (здесь в отличие от [6] в ряд Тейлора разлагается не возмущающая функция $\exp(i\delta r'^2)$, а свертываемое с ее Фурье-образом решение невозмущенной задачи (1)) и произведя почленное интегрирование в (12), получаем

$$\psi_d(r) = (2\pi)^{-1} \sum_{p=0}^{\infty} (-i)^p \frac{m_p}{p!} \frac{d^p\psi(\omega_0)}{d\omega_0^{\,p}}\,. \qquad (13)$$

Коэффициентами этого ряда являются моменты функции $\tilde{f}(\omega_0)$,

$$m_p = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^p \tilde{f}(\tau)\, d\tau\,, \quad p = 0, 1, 2, \ldots,$$

просто выражаемые через фактор расфокусировки δ. Пользуясь известными формулами для m_p [13, с. 31], с учетом тождества

$(2n-1)!!\, 2^n = (2n)!\,/\,n!$

Получаем

$$m_p = \begin{cases} 2\pi \dfrac{p!}{(p/2)!}(i\delta)^{p/2}, & p \text{ – четное}, \\ 0, & p \text{ – нечетное}. \end{cases}$$

Подстановка этих формул в (13) дает достаточно простое решение задачи, выражающее возмущенную дефокусирующим членом $\exp(i\delta r'^2)$ функцию $\psi_d(r)$ через невозмущенную функцию $\psi(r) \equiv \psi(\omega_0)$ и ее производные

$$\psi_d(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\delta)^n}{n!} \frac{d^{2n}\psi(\omega_0)}{d\omega_0^{\,2n}}\,. \qquad (14)$$

Из равенства

$$\frac{d^{2n}\psi}{d\omega_0^{\,2n}} \exp(i\,\omega_0\, r') = (-\,r'^2)^n \exp(i\,\omega_0\, r')$$

ясна эквивалентность выражений (3) и (12) для тех случаев, когда $\psi(\omega_0) \equiv \psi(r)$ точно соответствует уравнению (1).

5. Если $\psi(r)$ представляется функциями Куммера, выражение (12) может быть переписано с учетом известного тождества [12, с. 303]

$$\frac{d^p}{dz^p}\, {}_1F_1(a, b; z) = \frac{(a)_p}{(b)_p}\, {}_1F_1(a+p, b+p; z)\,.$$

Так, для плоской волны на входе при $R_1 = 0$ из (14) с учетом равенства

$d^2/(d\omega_0^{\,2}) = R^2\, d^2/(d\rho^2)$

имеем

$$\psi(r) = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\delta R_2^2)^n}{n!} \frac{3}{3+4n} \times$$

$$\times\, {}_1F_1(2n + 3/2, 2n + 5/2; i\rho)\,, \quad \rho = R(\omega - \omega_0)\,, \qquad (15)$$

что совпадает с (10).

В случае гауссова пучка $\psi(r)$ выражается через функцию $u_p(z) = \exp(z^2/4)D_p$ $(p = -3/2,\ z = -i\sqrt{2}\rho,\ \rho = (W/2)(\omega - \omega_0))$, удовлетворяющую равенствам

$$\frac{d^2u_p}{d\omega_0^{\,2}} = -\frac{W^2}{2}\frac{d^2u_p}{dz^2}\,, \quad \frac{d^2u_p}{dz^2} = \frac{W^2}{2}(pu_p - \rho du_p/d\rho)\,. \qquad (16)$$

Первое вытекает из определения, второе легко выводится из классического дифференциального уравнения для функций параболического цилиндра ([12], N. 7.355):

$d^2/(dz^2)\, D_p + (p + 1/2 - z^{2/4})\, D_p = 0\,.$

С учетом (16) из (14) в приближении первого порядка малости по величине δ для случая гауссова пучка на входе системы находим

$$\psi_d(r) = 2^{-3/4}\,\Gamma(3/2)\,\tilde{B}\, u_{-3/2}(-\,i\sqrt{2}\,\tilde{\rho}) =$$

$$= \tilde{B}\left[{}_1F_1(3/4, 1/2; -\tilde{\rho}^2) - 2i\tilde{\rho}\frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(3/4)}\, {}_1F_1(5/4, 3/2; -\tilde{\rho}^2)\right], \qquad (17)$$

где

$\tilde{B} \approx B[1 - i(3/4)\delta W^2]\,, \quad \tilde{\rho} = \rho(1 - i\delta W^2/2)\,.$

Это согласуется с (11) для малых δ. При выводе (17) использовано соотношение

$$\psi(\rho) - i(\delta W^2/2)\,\rho\,\frac{d\psi(\rho)}{d\rho} \approx \psi(\rho)\,.$$

6. Рассмотрение задачи об оптической системе с аксиконом в пространственно-частотной (по параметру ω_0) области приводит к уравнению (14), моделирующему дифракционные поля $\psi_d(r)$ на выходе возмущенной (слабо сфокусированной) системы (3) в том же приближении, в котором удается получить входящее в (14) решение $\psi(r)$ соответствующей невозмущенной задачи (1). Существующие методы (см., например, [4]) позволяют вычислить последнее при любой форме входного воздействия с точностью, достаточно высокой для любых инженерных применений; с той же точностью уравнение (14) при подстановке в него найденного решения $\psi(r)$ описывает поля на выходе слабо сфокусированной системы. Этот вывод подтверждается сравнением вытекающих из (14) следствий с полученными ранее аналитическими результатами для двух частных случаев: плоская волна и гауссов пучок на входе системы.

Решение (14) представлено в виде ряда. При малой степени расфокусировки системы (а лишь этот случай представляет интерес для практического использования формируемых системой дифракционных кольцевых полей) ряд быстро сходится, и в расчетах достаточно ограничиться учетом лишь двух-трех его первых членов.

Приложение

Уравнение (3) можно рассматривать как Фурье-преобразование из плоскости x в плоскость ω_0 произведения двух суммируемых (интегрируемых по Лебегу) функций $f \in L_1$ и $g \in L_1$:

$$\psi_d(\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(x) \exp(i\omega_0 x)\, dx ,$$

одна из которых, а именно

$$f(x) = \frac{k}{z}\, \psi_1(x)\, I_0(\omega x)\, [U(x-R) - U(x)] ,$$

финитна. Здесь $U(\cdot)$ – функция Хевисайда. К таким функциям (и вообще к любым обобщенным функциям, являющимся распределениями с ограниченным носителем или умеренными распределениями [15, с. 227]) применима теорема о свертке:

$$\mathscr{F}[f\,g] = \mathscr{F}[f] * \mathscr{F}[g] .$$

В нашем случае $\psi_d(\omega_0)$ и $\mathscr{F}[f]$ – это выходные функции возмущенного (3) и невозмущенного (1) уравнений. Этим и подтверждается справедливость формулы (12).

1. *Рыкалин Н.Н., Углов А.А., Зуев И.В. и др.* Лазерная и электронно-лучевая обработка материалов. М.: Машиностроение, 1985. 496 с.
2. *Фабриков А.В.* Кольцевые поля в задачах лазерной технологии: математическая модель и алгоритмы расчета // Алгоритмы и структуры систем обработки информации: Сб. науч. тр. ТулПИ, 1990. С. 129–140.
3. *Смоктий О.И., Фабриков А.В.* Концентрация энергии лазерного излучения в круге засветки комбинированной формы // Оптика атмосферы. 1990. Т. 3. N 7. С. 756–760.
4. *Алдошина О.И., Фабриков А.В.* Радиально-частотное представление поля в поперечном сечении прожекторного луча, формируемого аксиконом // Оптика атмосферы и океана. 1996. Т. 9. N 3. С. 1–6.
5. *Belanger P.-A., Rioux M.* Diffraction ring pattern at the focal plane of a spherical lens-axicon doublet // Can. J. Phys. 1976. V. 54. N 12. P. 1774–1780.
6. *Belanger P.-A., Rioux M.* Ring pattern of a lens-axicon doublet illuminated by a Gaussian beam // Appl. Opt. 1978. V. 17. N. 7. P. 1080–1086.
7. *Голуб М.А., Казанский Н.А., Сисакян И.Н. и др.* Дифракционный расчет оптического элемента, фокусирующего в кольцо // Автометрия. 1987. N 6. С. 8–15.
8. *Смоктий О.И., Фабриков А.В.* Моделирование дифракционного поля в фокальной плоскости системы «линза–аксикон» // Изв. вузов. Физика. 1987. N 12. С. 36–41.
9. *Perez M.V., Gomiz-Reino S., Cuadrado J.M.* Diffraction pattern and zone plates produced by thin linear axicons // Opt. Acta. 1986. V. 33. N. 9. P. 1161–1176.
10. *Бачериков В.В., Фабриков А.В.* Температурные поля на поверхности материала, нагреваемого лазерным импульсом в узком кольце засветки // ИФЖ. 1996. Т. 69. N 1. С. 58–67.
11. *Гудмен Дж.* Введение в Фурье-оптику. М.: Мир, 1970. 364 с.
12. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980. 608 с.
13. *Смоктий О.И., Фабриков В.А.* Методы теории систем и преобразований в оптике. Л.: Наука, 1989. 310 с.
14. *Рыжик И.М., Градштейн И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИТТЛ, 1951. 464 с.
15. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. М.: Мир, 1965.

Научный центр оптико-физических исследований,
г. Москва

Поступила в редакцию
2 февраля 1997 г.

A.V. Fabrikov, O.I. Aldoshina. **Modeling of Diffraction Ring Patterns at the Output of a Weak Focused Axiconic Optical System.**

Mathematical modeling of diffraction ring patterns of a disturbed (weak focused) axiconic optical system is discussed. The simple equation representing the disturbed problem solution in terms of the undisturbed solution and its derivatives is obtained. The usefulness of the model has been demonstrated by means of comparison of its consequences with known analytical solutions for two special cases: a plane wave and a Gaussian beam at the input of the system.