

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИКИ АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА

УДК 525.73

К.П. Гайкович, Г.Ю. Хачева

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РЕФРАКЦИИ В ГЕОМЕТРИИ ЧАСТИЧНОГО ПОГРУЖЕНИЯ

Развита теория решения обратной задачи рефракции в геометрии погружения (источник или приемник изменяет свое положение в зондируемой атмосфере) в постановке, когда измерения угла рефракции заданы не на всем высотном интервале, а только на его части. Обратная задача сводится к решению интегрального уравнения 1-го рода, которое имеет различную специфику внутри и вне интервала зондирования. Приведены аналитические решения для области внутри интервала наблюдения при постоянном угле приема. Представлены результаты численного моделирования.

В связи с развитием космических исследований рефрактометрические методы изучения атмосфер Земли и других планет получили широкое применение. Решение обратных задач рефракции позволяет восстанавливать высотное распределение показателя преломления и связанных с ним метеопараметров атмосферы. Особенности конкретной обратной задачи и тип решаемого уравнения определяют взаимное положение источника и приемника излучения, измеряемая величина, а также диапазон частот излучения.

Начало рефрактометрическим измерениям было положено при исследовании планет Солнечной системы с помощью космических аппаратов [1–3]. Аналогичные методы для земной атмосферы были развиты в [4–7]. При таких лимбовых измерениях источник и приемник находятся вне исследуемой атмосферы. В этом случае задача сводится к решению интегрального уравнения Абеля и является математически корректной.

В случае, когда приемник находится на поверхности Земли, задача восстановления профиля показателя преломления описывается уравнением Фредгольма 1-го рода, решение которого представляет собой некорректную задачу [8–10].

В [11] было рассмотрено решение обратной для случая измерений рефракции при изменении положения источника или приемника внутри атмосферы (геометрия погружения). Это случай может быть весьма важен для исследования планет с помощью спускаемых аппаратов. Показано, что измеряемая и восстанавливаемая величины для этого случая связаны интегральным уравнением Вольтерры 2-го рода, разработаны алгоритмы его решения и выполнено численное моделирование.

В данной статье постановка задачи обобщается для случая, когда рефракция известна не на всем протяжении атмосферы, а только на некотором конечном интервале.

Для решения задачи применялся метод обобщенной невязки Тихонова [12]. Путем численного моделирования исследованы достижимая точность и

условия оптимального восстановления показателя преломления земной атмосферы при решении задачи как на всем интервале, так и в слоях выше (внешняя область) и ниже (внутренняя область) верхней границы измерений в зависимости от положения последней. В случае, когда угол места измерений рефракции постоянен, получена формула обращения для рассматриваемой обратной задачи – профиль показателя преломления во внутренней области выражен через измеряемую величину рефракции.

Постановка задачи

Решение обратной задачи рефракции в геометрии погружения сводится к уравнению Вольтерры 2-го рода [11]

$$N(p_h) - \int_{p_h}^{\infty} N(p) \frac{pp_h \cos \theta_0(p_h)}{[p^2 - p_h^2 \cos^2 \theta_0(p_h)]^{3/2}} dp = 10^6 \operatorname{tg}(\theta_0) \varepsilon(p_h), \quad (1)$$

которое связывает исходный профиль показателя преломления $N(p_h)$ и наблюдаемый угол рефракции $\varepsilon(p_h)$. Здесь $p = nr$; $r = r_0 + h$; r_0 – радиус Земли; n – показатель преломления; $N = 10^6(n - 1)$ – индекс рефракции. Профиль $N(p)$ преобразуется в профиль $N(h)$ с помощью соотношения

$$h = \{p/[1 + 10^{-6} N(p)]\} - r.$$

Ранее [11] был рассмотрен метод восстановления профиля индекса рефракции для угла места $\theta_0(p_h) = \operatorname{const}$. При этом восстановленный профиль совпадал с исходным с высокой точностью. Было показано, что погрешность восстановления зависит от величины погрешности измерения угла рефракции, положения источника и приемника относительно поверхности Земли, а также от угла места. В численном эксперименте предполагалось, что угол рефракции измеряется с заданной погрешностью во всем диапазоне высот, на котором в дальнейшем восстанавливался неизвестный профиль индекса рефракции.

Если решать задачу в более сложной постановке, полагая, что значения рефракции заданы только в интервале $p_0 < p_h < p_H$ (до высоты H), то интервал восстановления разобьется на две физически существенно различные области. Можно предполагать, что во внутренней области решение будет близко по свойствам к решению, полученному в исходной постановке задачи. Во внешней области задача приближается по типу к уравнению Фредгольма 1-го рода со свойствами решения, аналогичными обратной задаче астрономической рефракции [12]. Если предположить, что не только значения угла рефракции, но и индекс рефракции известны до высоты H , то интеграл в левой части уравнения (2) будет содержать известную компоненту и для внешней области $h > H$ задача определения индекса преломления сводится к весьма близкому к задаче [12] уравнению Фредгольма 1-го рода:

$$\int_{p_H}^{\infty} N(p) \frac{pp_h \cos \theta_0(p_h)}{[p^2 - p_h^2 \cos^2 \theta_0(p_h)]^{3/2}} dp = N(p_h) \operatorname{ctg} \theta_0(p_h) - 10^6 \varepsilon(\theta_0(p_h)) - \int_{p_h}^{p_H} N(p) \frac{pp_h \cos \theta_0(p_h)}{[p^2 - p_h^2 \cos^2 \theta_0(p_h)]^{3/2}} dp. \quad (2)$$

Более того, при постоянных углах места правая часть не будет информативной, так как она стала постоянной величиной. Для решения задачи определения профиля индекса преломления необходимо, чтобы θ_0 имело различные значения для различных p_h , например если измерения производятся в различные моменты времени. Известно, что уравнения такого типа являются некорректными и требуют для своего решения применения методов регуляризации, основанных на использовании дополнительной (априорной) количественной информации о свойствах точного решения.

Уравнение (1) в целом для внешней и внутренней областей также, очевидно, является некорректной задачей, тип которой не имеет особого названия, сочетая в себе признаки уравнений обоих упомянутых типов, которые должны по-разному проявиться во внешней и внутренней областях восстановления.

Метод решения обратной задачи

При решении некорректных задач без использования дополнительной информации малым погрешностям могут соответствовать большие погрешности восстановления [12]. Если точное решение принадлежит к классу компактных функций, то задача может быть решена путем минимизации функционала невязки, так как для компактных функций этот функционал является выпуклым. В данной работе решение основано на применении принципа обобщенной невязки Тихонова, использующего общую информацию о принадлежности точного решения к

классу неотрицательных, квадратично суммируемых функций с квадратично суммируемой производной, и хорошо согласовывается с особенностью решаемой задачи. Это позволяет использовать максимум модуля отклонения решения от точного для типичных распределений индекса рефракции в качестве меры точности восстановления.

Перепишем (1) в операторном виде

$$KN = \varepsilon^\delta, \quad (3)$$

где K – оператор уравнения (1); ε^δ – вектор данных, погрешность которых $\delta \varepsilon$ удовлетворяет неравенству

$$\delta \varepsilon^2 = \sup \|KN - \varepsilon^\delta\|_{L_2}^2 = \frac{1}{\Delta p_h} \int [\varepsilon(p_h) - \varepsilon^\delta(p_h)]^2 dp_h, \quad (4)$$

где N – правая часть (3), которая соответствует точному решению $N(p)$; Δp_h – интервал интегрирования. В рамках метода может быть учтена погрешность ядра, которая включает в себя погрешность дискретизации δ_h при численном решении и возможную неточность количественного описания ядра:

$$\delta_h^2 = \sup \|K_h N - KN\|_{L_2}^2, \quad (5)$$

где K_h – задаваемое при решении приближенное ядро (1). Мера несовместности δ_u не может превосходить суммарной погрешности ядра и измерений,

$$\delta_u^2 = \inf \|K_h N - \varepsilon^\delta\| \leq (\delta \varepsilon + \delta_h)^2. \quad (6)$$

В методе Тихонова приближенное решение минимизирует сглаживающий функционал

$$M^\alpha(N) = \|K_h N - \varepsilon^\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|N\|_{W_2^1}^2. \quad (7)$$

В приведенных соотношениях L_2 – пространство суммируемых с квадратом функций; W_2^1 – пространство квадратично суммируемых функций, имеющих квадратично суммируемые производные. Параметр регуляризации α , который регулирует степень сглаженности приближенного решения в методе обобщенной невязки Тихонова [12], определяется как корень одномерного уравнения обобщенной невязки

$$\rho(\alpha) = \|K_h N^\alpha - \varepsilon^\delta\|_{L_2}^2 - \delta^2 = 0, \quad (8)$$

где N^α – функция, минимизирующая (7), а $\delta^2 = (\delta \varepsilon + \delta_h)^2 + \delta_u^2$ – параметр эффективной ошибки, включающий погрешности измерений, дискретизации и других неточностей описания ядра, а также зависящей от этих факторов меры несовместности уравнения со своей правой частью. Таким образом, величина параметра регуляризации и, следовательно, степень сглаженности решения связываются с величиной эффективной ошибки δ . При стремлении эффективной ошибки к нулю в интегральной метрике L_2

приближенное решение сходится к точному в метрике W_2^1 и, следовательно, по теореме вложения Соболева равномерно, т.е. в метрике C , где нормой является максимум модуля. Как правило, по сравнению с корректными задачами скорость сходимости не пропорциональна уменьшению δ , а более медленная.

Параметры δ_h , δ_μ могут определяться на основе численного моделирования в процессе минимизации (7). Обычно мера несовместности ограничивает уровень невязки, до которого удается минимизировать функционал (7). После соответствующей дискретизации задача минимизации сглаживающего функционала сводится к своему конечному аналогу, представляющему собой хорошо изученную с вычислительной точки зрения задачу квадратичного программирования.

Специфика некорректных задач состоит в том, что не существует определенного соотношения между погрешностью правой части и точностью восстановления, поскольку последняя существенно зависит и от вида самой исходной функции. Поэтому исследование возможностей восстановления (точности восстановления для типичных моделируемых профилей в зависимости от уровня погрешности) может быть выполнено на основе численного эксперимента по замкнутой схеме. Для практического применения рассматриваемого метода необходимо установить связь между параметром эффективной погрешности δ , в методе Тихонова определяемой соотношением (8), и известными характеристиками экспериментальной погрешности. Задача состоит в том, чтобы получить оценку δ с учетом того обстоятельства, что погрешности эксперимента имеют случайный характер.

Пусть погрешность имеет нормальное распределение со средним значением $\Delta\varepsilon$ и стандартным отклонением $\sigma\varepsilon$. Учитывая также, что эффективность метода проверяется численным экспериментом, а оптимальность выбора в дальнейшем можно проверить, примем за погрешность не максимальное, а среднее значение интеграла в (4). В результате получим

$$\delta\varepsilon^2 = \frac{1}{\Delta p_h} \int \langle [\varepsilon(p_h) - \varepsilon^\delta(p_h)]^2 \rangle dp_h = \frac{1}{\Delta p_h} \int [\sigma\varepsilon^2(p_h) + \Delta\varepsilon^2(p_h)] dp_h. \quad (9)$$

При постоянных параметрах $\Delta\varepsilon$ и $\sigma\varepsilon$

$$\delta\varepsilon = \sqrt{\sigma\varepsilon^2 + \Delta\varepsilon^2}. \quad (10)$$

При нулевой систематической ошибке $\delta\varepsilon = \sigma\varepsilon$, при нулевой случайной ошибке $\delta\varepsilon = \Delta\varepsilon$. Поскольку при решении некорректных задач ошибка восстановления не пропорциональна погрешности данных и может быть определена только путем численного моделирования, был выполнен соответствующий численный анализ.

Численное моделирование

Численный эксперимент по решению сформулированной задачи был выполнен при реализующихся в оптическом диапазоне точностях измерения рефракции $1-10''$ [13] для типичного экспоненциального профиля индекса рефракции. По значениям исходного профиля вычислялся угол рефракции, на который затем накладывалась случайная погрешность, моделирующая погрешности, получаемые при измерениях углов в реальной атмосфере. Оказалось, что во внешней области восстановление эффективно только для высот $H < 5-10$ км.

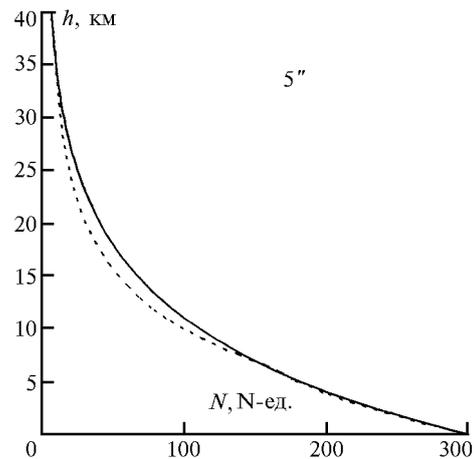


Рис. 1

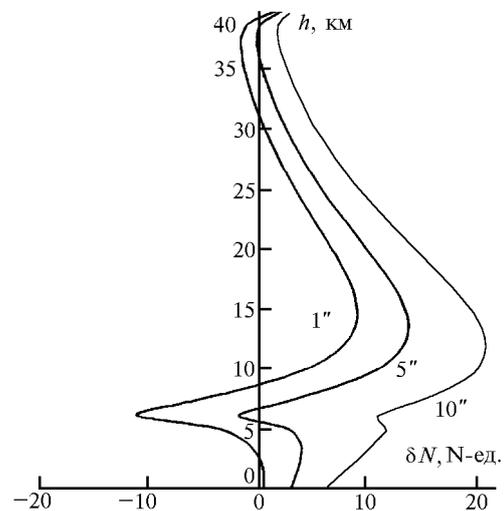


Рис. 2

На рис. 1 представлен пример восстановления для $H = 5$ км и точности задания рефракции $5''$. Полагалось, что угол места менялся от $0,5^\circ$ при $H = 5$ км до $2,5^\circ$ при $H = 0$. На рис. 2 представлена точность восстановления для $H = 5$ км в зависимости от высоты для различного уровня моделируемой погрешности рефракции. Для интервала высот, на котором задана рефракция, решение на всем протяжении

нии сохраняет свойства, характерные для уравнения Вольтерры, близкие, как правило, к корректным задачам, в частности, точность восстановления примерно пропорциональна погрешности данных. Вблизи верхней границы измерений решение переходит к виду, типичному для некорректных задач. Область перехода характеризуется возрастанием погрешности решения и занимает довольно высокий интервал высот, в котором свойства решения существенно изменяются. На рис. 3 представлены аналогичные результаты для $H = 20$ км (для иллюстрации сходимости включен случай с погрешностью $0,01''$). Угол места менялся от $0,5^\circ$ при $H = 20$ км до 10° при $H = 0$. Измерения в области реализуемых точностей неинформативны для внешней области восстановления, поскольку видно, что погрешность одинакова для различной точности и близка к значению индекса рефракции на соответствующих высотах. Информативность о внешнем слое здесь слишком мала, и дестабилизирующее влияние погрешности решения во внешней области сказывается на решении уравнения во внутренней области.

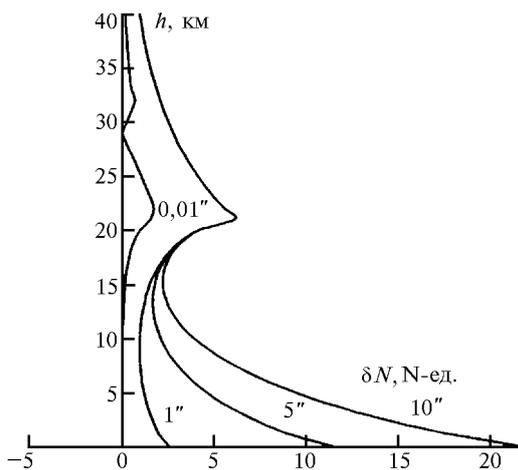


Рис. 3

На рис. 4 приведены результаты восстановления показателя преломления с моделируемой погрешностью $5''$, которую можно считать предельной при измерениях рефракций, при различных высотах H , включая случай $H = 40$ км (рефракция задана на всем интервале восстановления). Таким образом, для небольших погрешностей измерения углов рефракции можно получить удовлетворительные результаты восстановления профиля показателя преломления, имея ограниченные по высоте возможности для измерения угла рефракции. Однако следует заметить, что в целом для геометрии частичного погружения решение имеет большую погрешность по сравнению с хорошо обусловленной задачей [11], что является проявлением некорректности задачи не только во внешней области, но и во всем интервале высот.

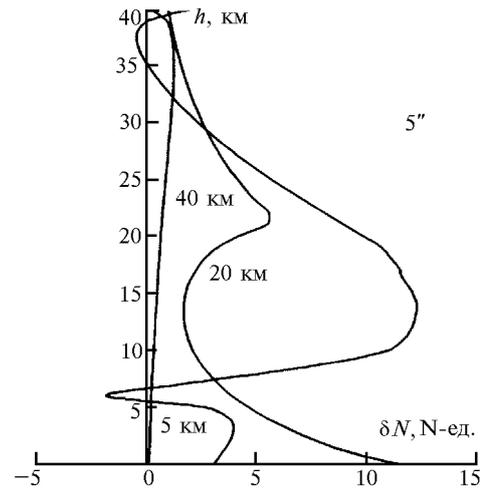


Рис. 4

Некоторые точные решения

Для внутренней области $0 < h < H$, полагая $\theta_0(p_h) = \text{const}$, можно получить точное решение (1). Продифференцируем (2) по p :

$$\frac{d\varepsilon}{dp} = 10^{-6} \frac{p_0 \cos \theta_0 dN(p)}{[p^2 - p_0^2 \cos^2 \theta_0]^{1/2} dp}. \quad (11)$$

При интегрировании (11), используя значения $\varepsilon(p_h)$ в интервале $p_0 < p_h < p_H$, получим

$$\varepsilon(p_h) = 10^{-6} \int_{p_0}^{p_h} \frac{dN(p)}{dp} \frac{p_0 \cos \theta_0}{\sqrt{p^2 - p_0^2 \cos^2 \theta_0(p_h)}} dp + \varepsilon(p_0). \quad (12)$$

Формула обращения для него имеет вид

$$N(p) = 10^6 \int_{p_0}^p \frac{d\varepsilon(p_h)}{dp_h} \frac{\sqrt{p_h^2 - p_0^2 \cos^2 \theta_0(p_h)}}{p_0 \cos \theta_0} dp_h + N(p_0). \quad (13)$$

Можно видеть, что существенным является значение поверхностного значения индекса рефракции.

Если взять другие пределы интегрирования, то получим решение задачи для случая, рассмотренного в [11], когда рефракция задана на всем высотном интервале:

$$\varepsilon(p_h) = -10^{-6} \int_{p_h}^{\infty} \frac{dN}{dp} \frac{p_0 \cos \theta_0}{\sqrt{p^2 - p_0^2 \cos^2 \theta_0(p_h)}} dp \quad (14)$$

или при обращении

$$N(p) = -10^6 \int_p^{\infty} \frac{d\varepsilon(p_h)}{dp_h} \frac{\sqrt{p_h^2 - p_0^2 \cos^2 \theta_0(p_h)}}{p_0 \cos \theta_0} dp_h. \quad (15)$$

Для внешней области при постоянном угле измерений решение получить невозможно.

Заключение

Обратная задача рефракции в геометрии погружения обобщена для случая, когда измерения рефракции выполнены не на всем интервале высот, на котором осуществляется восстановление высотной зависимости индекса рефракции, а только на его части. Анализ результатов численного моделирования показывает, что точность решения существенно зависит как от величины моделируемой погрешности данных, так и от высоты слоя, на котором рефракция считается известной. Переходная область характеризуется существенным возрастанием погрешности решения. Вблизи верхней границы области восстановления вариации погрешности близки по значению к величине индекса рефракции. Для высоты $H = 20$ км погрешность измерения во внешнем слое не зависит от погрешности измерения рефракции в диапазоне реализуемых погрешностей. Удовлетворительная погрешность восстановления во всем слое достигается лишь при измерениях рефракции с погрешностью менее $1''$, что превосходит возможную точность ее измерения.

Существенное влияние на структуру решения уравнения оказывает высота слоя, где задана рефракция. Например, при постоянной моделируемой погрешности $5''$ для разных высот погрешность восстановления изменяется в широких пределах. Для $H = 5$ км решение во внутренней области близко по своим свойствам к решению для корректной задачи ($H = 40$ км): погрешность восстановления также не превышает $5N$ – ед. и постепенно увеличивается с ростом высоты. Проявление некорректной задачи

наиболее заметно в переходной и во внешней областях. Для $H = 20$ км погрешность восстановления велика как во внешней, так и во внутренней областях, т.е. некорректность задачи проявляется во всем интервале высот.

В статье получены также некоторые явные соотношения для прямой и обратной задач рефракции в геометрии погружения для частного случая измерения рефракции на постоянном угле места.

1. Kliore A.J., Gain D.L., Levi S., Eshleman R. // Astronaut and astronaut. 1965. N T-7. P. 72–74.
2. Lindal G.F., Lions J.R., Sweetnam D.L. et al. // J. Geophys. Res. 1990. V. 17. N 10. P. 1733–1736.
3. Колосов М.А., Яковлев О.И., Круглов Ю.М. и др. // Радиотехника и электроника. 1972. Т. 17. № 12. С. 2483–2490.
4. Гречко Г.М., Гурвич А.С., Казбанов В.А. и др. Оптические явления при восходе и заходе Солнца в космосе // Труды ГОИ. 1989. Т. 71. Вып. 205. 121 с.
5. Бесчастнов С.П., Гречко Г.М., Гурвич А.С. и др. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1984. Т. 20. № 4. С. 231–235.
6. Гурвич А.С., Загоруйко С.В., Кан В.И. и др. // ДАН СССР. 1981. Т. 256. № 6. С. 1330.
7. Соколовский С.В. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1981. Т. 17. № 6. С. 574–579.
8. Гайкович К.П., Гурвич А.С., Наумов А.П. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1983. Т. 19. № 7. С. 675–682.
9. Арманд Н.А., Андрианов В.А., Смирнов В.В. // Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32. № 4. С. 673–680.
10. Колосов М.А., Павельев А.Г. // Радиотехника и электроника. 1982. Т. 27. № 12. С. 2310–2317.
11. Гайкович К.П., Хачева Г.Ю. // Оптика атмосферы и океана. 1997. Т. 10. № 1. С. 69–72.
12. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983. 200 с.
13. Василенко Н.А., Гайкович К.П., Сумин М.И. // ДАН СССР. 1986. Т. 290. № 6. С. 1332–1335.

Нижегородский научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
9 декабря 1997 г.

K.P. Gaikovich, G.Yu. Khacheva. Refraction Inverse Problem in the Partial Immersion Geometry.

The theory of refraction inverse problem in immersion geometry (source or receiver changes the position inside the sounding atmosphere) is developed for the case when refraction angle measurements are given not for all atmosphere height range, but only for its part. The inverse problem is reduced to the solution of the integral equation of the 1-st kind, which differs inside and outside the measurements interval. The exact solutions for the range inside the measurements interval at the constant receiving angle are given. The numerical simulation results are given.