

РАССЕЯНИЕ И ПЕРЕНОС ОПТИЧЕСКИХ ВОЛН В АТМОСФЕРЕ И ОКЕАНЕ

УДК 551.501

В.В. Веретенников

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ АППАРАТНОЙ ФУНКЦИИ  
ПРИ ИЗМЕРЕНИИ МАЛОУГЛОВЫХ ИНДИКАТРИС РАССЕЯНИЯ**

В рамках малоуглового приближения получено строгое аналитическое решение задачи определения аппаратной функции при измерении индикатрис рассеяния с учетом конечных угловых размеров источника и приемника излучения. Показано, что аппаратная функция описывается интегралом от произведения бесселевых функций. Предложен способ представления аппаратной функции через элементарные функции. Обсуждается влияние аппаратной функции на точность измерения малоугловых индикатрис рассеяния при вариациях размеров частиц.

**1. Введение**

Высокая чувствительность индикатрисы рассеяния в области малых углов к изменениям микроструктуры больших частиц обусловила развитие оптических методов диагностики состава грубодисперсных сред, основанных на решении обратной задачи для малоугловой индикатрисы. Начало исследованиям в данном направлении положено работами [1, 2]. Учет вклада многократного рассеяния в задачах диагностики грубодисперсных сред привел к необходимости разработки методов обращения функции корреляции тени частиц [3, 4], которая является преобразованием Ганкеля дифракционной составляющей малоугловой индикатрисы рассеяния.

Реальные измерения индикатрис рассеяния вблизи направления вперед затруднены вследствие искажающего влияния конечных величин углов расходимости источника и поля зрения приемника излучения. Воздействие указанных факторов, определяющих в совокупности аппаратную функцию измерительного прибора, особенно возрастает с ростом размеров рассеивающих частиц, что проявляется в ограничении верхней границы диапазона размеров частиц, относительно которых малоугловые измерения являются информативными. Для количественной оценки влияния аппаратной функции на точностные характеристики малоугловых методов диагностики рассеивающих сред требуется строгое описание светового поля в окрестности направления распространения падающего излучения. В рамках приближения однократного рассеяния методика и результаты расчета аппаратной функции солнечного фотометра, основанные на прямом численном интегрировании по площадям поля зрения фотометра и Солнца, описаны в [5].

В настоящей работе для установления связи сигнала на входе приемника с индикатрисой рассеяния используется формализм малоуглового УПИ в приближении однократного рассеяния. Это дает возможность получить простые и универсальные аналитические выражения, позволяющие легко рассчиты-

вать аппаратную функцию при различных угловых параметрах источника и приемника.

**2. Исходные уравнения**

Предположим, что рассеивающая среда занимает область  $z > 0$ , а ее оптические характеристики зависят только от одной пространственной координаты  $z$ . Будем далее полагать, что световой поток от внешнего стационарного источника, неограниченный в поперечном сечении, распространяется вдоль оси  $Oz$  и создает на границе среды в плоскости  $z = 0$  распределение интенсивности излучения

$$I(\mathbf{n}_\perp, z = 0) = I_0(\mathbf{n}_\perp), \tag{1}$$

где  $\mathbf{n}_\perp = (n_x, n_y)$  – проекция вектора направления  $\mathbf{n}$  на плоскость  $xOy$ , а величина  $I_0(\mathbf{n}_\perp)$  имеет существенное значение при  $\gamma = |\mathbf{n}_\perp| \ll 1$ . В этих условиях световое поле в среде описывается малоугловым УПИ [6, 7], решение которого в Фурье-области можно представить в виде произведения

$$\tilde{I}(\mathbf{p}, z) = \tilde{I}_0(\mathbf{p}) F(\mathbf{p}), \tag{2}$$

в котором знак  $\tilde{(\ )}$  использован для обозначения Фурье-трансформанты по переменной  $\mathbf{n}_\perp$ ;  $\mathbf{p}$  – угловая частота. Множитель  $F(\mathbf{p})$  при замене  $\mathbf{p} = \mathbf{p}/k$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ , где  $\lambda$  – длина волны света, представляет собой (поперечную) функцию взаимной когерентности поля для плоской падающей волны  $I_0(\mathbf{n}_\perp) = \delta(\mathbf{n}_\perp)$ , где  $\delta(\mathbf{n}_\perp)$  – двумерная дельта-функция. В приближении однократного рассеяния

$$F(\mathbf{p}) = \exp[-\tau(z)] + B \tilde{x}(p), \tag{3}$$

где  $\tau(z) = \int_0^z \sigma_{\text{ext}}(t) dt$  – оптическая толщина слоя на интервале  $[0, z]$ ;  $B = \Lambda\tau(z) \exp[-\tau(z)]$ ,  $\Lambda = \sigma_{\text{sc}}/\sigma_{\text{ext}}$  – аль-

бедо однократного рассеяния,  $\sigma_{\text{ext}}, \sigma_{\text{sc}}$  – коэффициенты ослабления и рассеяния;  $\tilde{x}(p)$  – преобразование Ганкеля малоугловой индикатрисы рассеяния  $x(\gamma)$ :

$$\tilde{x}(p) = 2\pi\gamma J_0(p\gamma) x(\gamma) d\gamma, \quad p = |\mathbf{p}| \quad (4)$$

с нормировкой  $\iint_{-\infty}^{\infty} x(\mathbf{n}_{\perp}) d\mathbf{n}_{\perp} = 1$ .

Формула (3) записана в предположении независимости индикатрисы рассеяния  $x(\gamma)$  от пространственных координат, а слагаемые в (3) отвечают разделению на падающую и рассеянную составляющие.

Обратное преобразование Фурье функций  $F(\mathbf{p})$  дает решение  $J(\mathbf{n}_{\perp}, z)$  малоуглового УПИ для плоской падающей волны, которое в приближении однократного рассеяния с точностью до нормировочного множителя совпадает с индикатрисой рассеяния  $x(\mathbf{n}_{\perp})$  при  $\mathbf{n}_{\perp} \neq 0$ :

$$J(\mathbf{n}_{\perp}, z) = e^{-\tau} \delta(\mathbf{n}_{\perp}) + Bx(\mathbf{n}_{\perp}). \quad (5)$$

На основании (2) и теоремы о свертке следует, что решение малоуглового УПИ  $J(\mathbf{n}_{\perp}, z)$  можно представить в виде двумерной свертки интенсивности излучения в свободном пространстве  $I_0(\mathbf{n}_{\perp})$  и функции  $J(\mathbf{n}_{\perp}, z)$  (5):

$$J(\mathbf{n}_{\perp}, z) = e^{-\tau} I_0(\mathbf{n}_{\perp}) + B(I_0 ** x)(\mathbf{n}_{\perp}). \quad (6)$$

Первое слагаемое в (6) описывает интенсивность ослабленного падающего излучения, а второе слагаемое

$$I_{\text{sc}}(\mathbf{n}_{\perp}, z) = B(I_0 ** x)(\mathbf{n}_{\perp}) \quad (7)$$

– интенсивность однократно рассеянного излучения, которая находится как двумерная свертка индикатрисы рассеяния  $x(\mathbf{n}_{\perp})$  с лучевой интенсивностью в свободном пространстве  $I_0(\mathbf{n}_{\perp})$ . Формулу (7) можно интерпретировать с разных точек зрения. С одной стороны, она описывает воздействие линейной системы, в качестве которой выступает рассеивающая среда с импульсной реакцией  $x(\mathbf{n}_{\perp})$ , на входной сигнал  $I_0(\mathbf{n}_{\perp})$ , с другой – определяет закон преобразования индикатрисы рассеяния  $x(\mathbf{n}_{\perp})$  в измерительном приборе в зависимости от свойств освещающего среду светового пучка. Сосредоточим внимание на второй стороне вопроса.

### 3. Аппаратная функция при измерении лучевой интенсивности

Возвращаясь к исходному соотношению (2), с учетом круговой симметрии задачи формулу (7) можно представить в виде преобразования Ганкеля

$$I_{\text{sc}}(\gamma, z) = B(2\pi)^{-1} \int_0^{\infty} p J_0(\gamma p) \tilde{I}_0(p) \tilde{x}(p) dp. \quad (8)$$

Предположим, что интенсивность падающего на среду излучения распределена по закону

$$I_0(\mathbf{n}_{\perp}) = I_0 U_{\gamma_n}(\mathbf{n}_{\perp}), \quad (9)$$

где  $I_0 = \text{const}$ ;

$$U_{\gamma_n}(\mathbf{n}_{\perp}) = \begin{cases} 1, & 0 < \gamma < \gamma_n, \quad \gamma = |\mathbf{n}_{\perp}|, \\ 0, & \gamma > \gamma_n \end{cases} \quad (10)$$

– единичная ступенчатая функция на плоскости. Фурье-трансформанта функции

$$\tilde{U}_{\gamma_n}(p) = 2\pi \frac{\gamma_n J_1(\gamma_n p)}{p}. \quad (11)$$

С учетом (4) и (11) интенсивность  $I_{\text{sc}}(\gamma, z)$  (8) можно выразить через индикатрисы рассеяния  $x(\omega)$ :

$$I_{\text{sc}}(\gamma, z) = 2\pi I_0 B \gamma_n \int_0^{\infty} \omega A(\omega, \gamma, \gamma_n) x(\omega) d\omega, \quad (12)$$

где весовая функция  $A(\omega, \gamma, \gamma_n)$  представляется в виде следующего интеграла от произведения функций Бесселя:

$$A(\omega, \gamma, \gamma_n) = \int_0^{\infty} J_0(\omega s) J_0(\gamma s) J_1(\gamma_n s) ds. \quad (13)$$

По существу, формула (12) определяет правило перехода к одномерному интегралу при вычислении двумерной свертки (7) индикатрисы рассеяния  $x(\mathbf{n}_{\perp})$  с единичной ступенчатой функцией  $U_{\gamma_n}(\mathbf{n}_{\perp})$  (10) на плоскости. В [8] получено простое представление интеграла (13) через элементарные функции. Согласно [8] можно записать

$$\gamma_n A(\omega, \gamma, \gamma_n) = \begin{cases} 0, & \omega \geq \gamma + \gamma_n, \\ 0, & \omega \leq |\gamma - \gamma_n|, \quad \gamma > \gamma_n, \\ 1, & \omega \leq |\gamma - \gamma_n|, \quad \gamma_n > \gamma, \\ \frac{\alpha}{\pi}, & 0 < |\gamma - \gamma_n| \leq \omega \leq \gamma + \gamma_n, \end{cases} \quad (14)$$

где  $\alpha$  – угол в треугольнике со сторонами  $\omega, \gamma$  и  $\gamma_n$ , противолежащий стороне  $\gamma_n$ :

$$\alpha = \arccos \frac{\omega^2 + \gamma^2 - \gamma_n^2}{2\omega\gamma}. \quad (15)$$

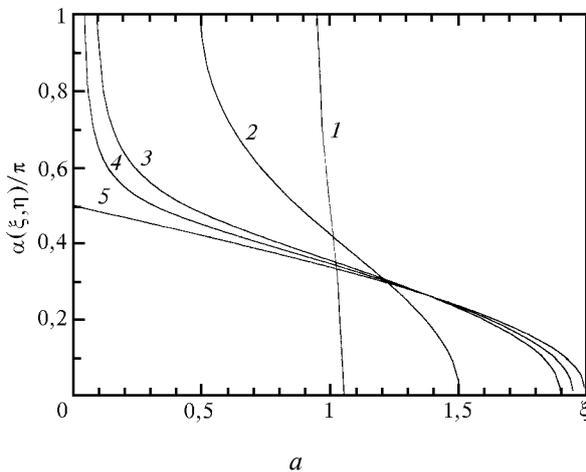
Таким образом, в конечном итоге роль весовой функции в рассмотренной схеме определяется углом  $\alpha$  (15). Примеры зависимостей  $\alpha(\xi, \eta)/\pi$  как функций отношения  $\xi = \omega/\gamma_n$  для набора различных значений  $\eta = \gamma/\gamma_n$  представлены на рис. 1.

#### 4. Аппаратная функция в случае приемника с конечным угловым размером

Выше была рассмотрена схема преобразования индикатрисы рассеяния при измерении лучевой интенсивности. Обобщим задачу на случай измерения мощности светового потока в конечном телесном угле. Предположим, что функция чувствительности приемника по угловым координатам  $U_{\gamma_n}(\mathbf{n}'_{\perp})$  имеет ступенчатый вид, аналогичный выражению (10), где  $\gamma_n$  – угол поля зрения приемника. Если оптическая ось приемника ориентирована в направлении  $\mathbf{n}'_{\perp}$  ( $|\mathbf{n}'_{\perp}| \ll 1$ ), то мощность светового потока, поступающего на единицу площади приемника, определится в результате свертки

$$P(\mathbf{n}'_{\perp}) = (I^{**}U_{\gamma_n})(\mathbf{n}'_{\perp}), \quad (16)$$

где интенсивность  $I(\mathbf{n}_{\perp}, z)$  находится по формуле (6). Подставляя (6) в (16), с учетом (9), получим



$$P(\mathbf{n}'_{\perp}) = I_0 [e^{-\tau} H(\mathbf{n}'_{\perp}) + B(x^{**}H)(\mathbf{n}'_{\perp})], \quad (17)$$

где аппаратная функция

$$H(\mathbf{n}'_{\perp}) = (U_{\gamma_n}^{**}U_{\gamma_n})(\mathbf{n}'_{\perp}) \quad (18)$$

представляет собой двумерную свертку кругов на плоскости с радиусами  $\gamma_n$  и  $\gamma_n$ , расстояние между центрами  $\gamma = |\mathbf{n}'_{\perp}|$ , а ее частотная характеристика

$$\tilde{H}(p) = \tilde{U}_{\gamma_n}(p) \tilde{U}_{\gamma_n}(p). \quad (19)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\delta$  равны величинам углов в треугольнике, которые расположены напротив  $\gamma_n$ ,  $\gamma_n$  и  $\gamma$  соответственно. Формулы (20) позволяют рассчитать компоненту измеряемого сигнала, обусловленную прямо прошедшим падающим излучением. Результаты расчета функции  $H(\gamma)$  приведены в [8].

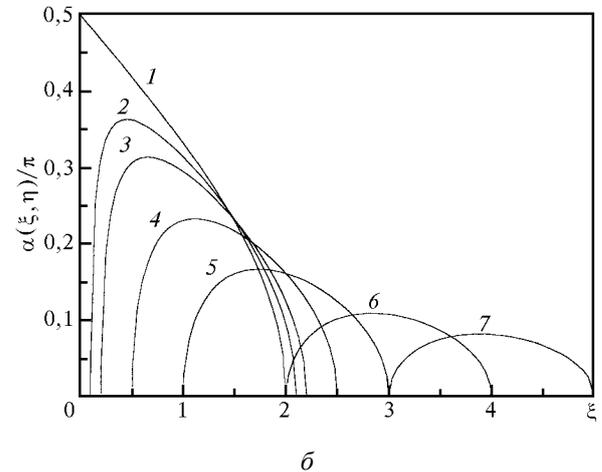


Рис. 1. Семейство зависимостей  $\alpha(\xi, \eta)/\pi$  как функций отношения  $\xi = \omega/\gamma_n$  при различных значениях отношения  $\eta = \gamma/\gamma_n$ :  $a - \eta = 0,05$  (1); 0,5 (2); 0,9 (3); 0,95 (4); 1,0 (5);  $b - \eta = 1,0$  (1); 1,1 (2); 1,2 (3); 1,5 (4); 2,0 (5); 3,0 (6); 4,0 (7)

Из геометрических соображений следует [8], что

$$H(\gamma) = \begin{cases} 0, & \gamma \geq \gamma_n + \gamma_n, \\ \pi\gamma_n^2, & \gamma \leq |\gamma_n - \gamma_n|, & \gamma_n < \gamma_n, \\ \pi\gamma_n^2, & \gamma \leq |\gamma_n - \gamma_n|, & \gamma_n > \gamma_n, \\ \gamma_n^2\beta + \gamma_n^2\alpha - \gamma_n\gamma_n \sin\delta, & 0 < |\gamma_n - \gamma_n| \leq \gamma \leq \gamma_n + \gamma_n, \end{cases} \quad (20)$$

Второе слагаемое в (17)

$$P_{sc}(\mathbf{n}'_{\perp}) = I_0 B(x^{**}H)(\mathbf{n}'_{\perp}) \quad (21)$$

определяет мощность однократно рассеянного сигнала. На основании (19) и теоремы о свертке выражение (21) можно преобразовать к виду

$$P_{sc}(\gamma) = I_0 B(2\pi)^{-1} \int_0^{\infty} p J_0(\gamma p) \tilde{H}(p) \tilde{x}(p) dp \quad (22)$$

или, переходя в (22) к индикатрисе рассеяния,

$$P_{sc}(\gamma) = I_0 B (2\pi)^2 \gamma_n \gamma_n \int_0^{\infty} \omega C(\omega, \gamma, \gamma_n, \gamma_n) x(\omega) d\omega. \quad (23)$$

Множитель  $C(\omega, \gamma, \gamma_n, \gamma_n)$  в (23) играет роль аппаратной функции при замене двумерного интеграла (21) одномерным (23) и определяется, в свою очередь, интегралом от произведения четырех функций Бесселя:

$$C(\omega, \gamma, \gamma_n, \gamma_n) = \int_0^{\infty} J_0(\omega p) J_0(\gamma p) J_1(\gamma_n p) J_1(\gamma_n p) p^{-1} dp. \quad (24)$$

Преобразуем интеграл (24) к виду, более удобному для практических расчетов. С этой целью перепишем (21) в виде

$$P_{sc}(\mathbf{n}'_{\perp}) = (I_{sc} ** U_{\gamma_n})(\mathbf{n}'_{\perp}) \quad (25)$$

и воспользуемся формулой перехода к одномерному интегралу для вычисления двумерной свертки с единичной ступенчатой функцией на плоскости, как это было сделано при получении соотношения (12). Это дает

$$P_{sc}(\gamma) = 2\pi \gamma_n \int_0^{\infty} \gamma' A(\gamma', \gamma, \gamma_n) I_{sc}(\gamma') d\gamma'. \quad (26)$$

Произведение  $\gamma_n A(\gamma', \gamma, \gamma_n)$  в (26) определяется по формуле (14), а  $I_{sc}(\gamma')$  находится из (12). Подставляя  $I_{sc}(\gamma')$  (12) в (26) и меняя порядок интегрирования, получим

$$C(\omega, \gamma, \gamma_n, \gamma_n) = \int_0^{\gamma_n + \gamma_n} A(\omega, \gamma', \gamma_n) A(\gamma', \gamma, \gamma_n) \gamma' d\gamma'. \quad (27)$$

Аппаратная функция  $C(\omega, \gamma, \gamma_n, \gamma_n)$  удовлетворяет условию нормировки

$$\int_0^{\infty} C(\omega, \gamma, \gamma_n, \gamma_n) \omega d\omega = \Omega_n \Omega_n, \quad (28)$$

где  $\Omega_n = \pi \gamma_n^2$ ,  $\Omega_n = \pi \gamma_n^2$ . Поскольку в подынтегральном выражении (27) стоит произведение элементарных функций, то расчет  $C(\omega, \gamma, \gamma_n, \gamma_n)$  по формуле (27) представляет существенно более простую задачу по сравнению с выражением (24).

В качестве примера на рис. 2 приведены результаты расчета нормированной функции  $Q(\omega, \gamma) = \omega C(\omega, \gamma, \gamma_n, \gamma_n) / (\Omega_n \Omega_n)$  для значений параметров  $\gamma_n = 0,0047$ ;  $\gamma_n = 0,0058$ , соответствующих схеме измерений ореольных индикатрис солнечным фотометром [9]. Две последние кривые на рис. 2 с номерами 4 и 5 соответствуют углам наблюдения, равным 1 и 2° соответственно. Как видно из рис. 2, зависимость  $Q(\omega, \gamma)$  как функции  $\omega$  имеет вид унимодальной кривой, степень асимметрии которой растет при  $\omega \rightarrow 0$ . С увеличением  $\omega$ , при  $\omega > \gamma_n + \gamma_n$ , функция  $Q(\omega, \gamma)$  приобретает все более симметричный вид относительно оси  $\omega = \gamma$  и обращается в нуль за пределами интервала  $|\omega - \gamma| \leq \gamma_n + \gamma_n$ .

На рис. 3 представлены результаты расчетов, иллюстрирующих влияние аппаратной функции

$C(\omega, \gamma, \gamma_n, \gamma_n)$  (27) на измерения малоугловой индикатрисы рассеяния, которая в приближении дифракции Фраунгофера для сферической частицы с радиусом  $r$  описывается известной формулой

$$x(\gamma) = J_1^2(kr\gamma) / (\pi\gamma^2). \quad (29)$$

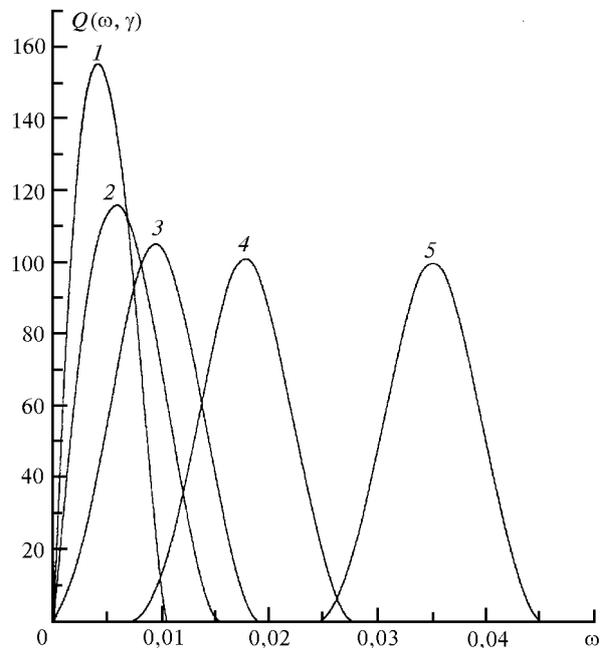


Рис. 2. Нормированная аппаратная функция  $Q(\omega, \gamma)$  в зависимости от  $\omega$  при  $\gamma_n = 0,0047$ ;  $\gamma_n = 0,0058$  и  $\gamma = 0$  (1); 0,005 (2); 0,0087 (3); 0,0175 (4); 0,0349 (5)

Нормированная мощность сигнала однократного рассеяния определяется выражением

$$\bar{x}(\gamma) = \int_{(L)} Q(\omega, \gamma) x(\omega) d\omega. \quad (30)$$

Область интегрирования в (3) представляет собой интервал конечной длины  $L \leq 2(\gamma_n + \gamma_n)$ . В представленных на рис. 3 зависимостях длина волны  $\lambda = 0,55$  мкм, а функция  $Q(\omega, \gamma)$  рассчитывалась при тех же значениях параметров  $\gamma_n$  и  $\gamma_n$ , для которых получены результаты, приведенные на рис. 2. Период осцилляций индикатрисы рассеяния  $x(\gamma)$  (29) приближенно оценивается величиной  $\Delta\gamma = \pi/kr$ . Как показывают результаты расчетов, сглаживающее действие аппаратной функции в большей степени проявляется, когда ширина образованного ею «окна»  $L > \Delta\gamma$ . В рассмотренном примере данное условие выполняется для частиц с размером  $r > 13 \div 14$  мкм. В частности, как видно из рис. 3, для частиц радиуса  $r = 30$  мкм влияние аппаратной функции измерительного прибора приводит к уменьшению его амплитуды в 2 раза и полному исчезновению последующих осцилляций.

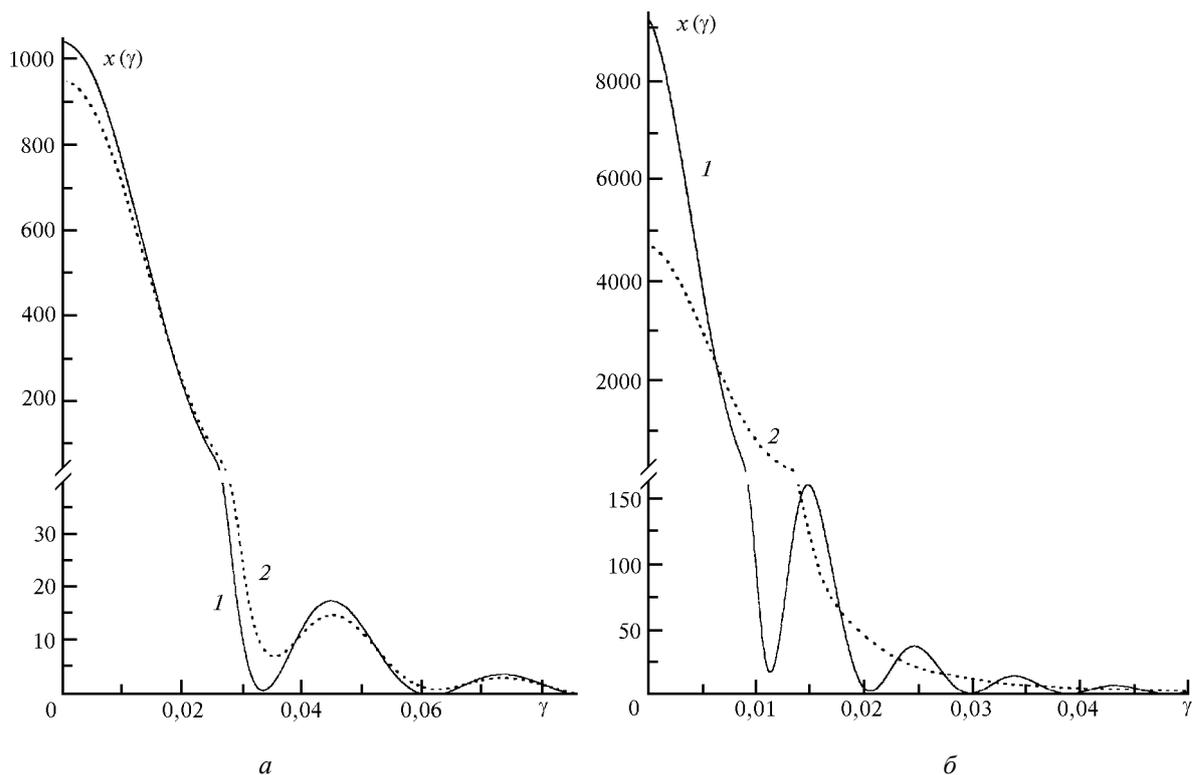


Рис. 3. Малоугловая индикатриса рассеяния (1) и нормированная мощность сигнала однократного рассеяния (2) для сферических частиц радиуса  $r$  на длине волны  $\lambda = 0,55$  мкм;  $a - r = 10$  мкм;  $b - r = 30$  мкм

## 5. Заключение

Представленные результаты показывают, что конечная величина углов расходимости освещающего среду светового пучка и поля зрения приемника может вносить существенные искажения в измерения малоугловой индикатрисы рассеяния. Для измерительного прибора типа солнечного фотометра указанные факторы проявляются при рассеянии на частицах с размерами более 10 мкм (при  $\lambda = 0,55$  мкм). Степень таких искажений легко оценивается с использованием предлагаемых в статье формул для расчета аппаратной функции измерительного прибора. Влияние аппаратной функции возрастает с увеличением размеров частиц, что необходимо учитывать при разработке малоугловых методов диагностики дисперсного состава рассеивающих сред.

1. Шифрин К.С. // Труды ВЗЛТИ. 1956. Вып. 2. С. 108–121.
2. Chin J.H., Slipevich C.M., and Tribus M. // J. Phys. Chem. 1955. V. 59. P. 841–844.
3. Боровой А.Г., Вагин Н.И., Веретенников В.В. // Оптика и спектроскопия. 1986. Т. 61. Вып. 6. С. 1326–1330.
4. Веретенников В.В. // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. № 11–12. С. 1496–1503.
5. Исаков А.А. // Оптика атмосферы и океана. 1997. Т. 10. № 7. С. 722–733.
6. Долин Л.С. // Изв. вузов СССР. Сер. Радиофизика. 1964. Т. 7. N 2. С. 380–382.
7. Зега Э.П., Иванов А.П., Кацев И.Л. // Перенос изображения в рассеивающей среде. Минск: Наука и техника, 1985. 327 с.
8. Веретенников В.В. // Оптика атмосферы и океана. 1998. Т. 11. №9. С. 1002–1007.
9. Региональный мониторинг атмосферы. Ч. II. Новые приборы и методики измерений / Под ред. М.В. Кабанова. Томск: изд-во «Спектр» ИОА СО РАН, 1997. 295 с.

Институт оптики атмосферы СО РАН,  
Томск

Поступила в редакцию  
10 июня 1998 г.

*V.V. Veretennikov. Determination of Instrumental Function when Measuring Small-Angle Scattering Phase Functions.*

Rigorous analytical solution is obtained for the problem of determination of the instrumental function when measuring scattering phase function taking into account finite angle sizes of the radiation source and receiver. It is shown that the instrumental function can be described by the integral Bessel functions. A way is proposed to represent the instrumental function through elementary ones. An influence of the instrumental function on the accuracy of small-angle scattering phase function index measurement at variation of particles' sizes is under discussion.