«Оптика атмосферы и океана», **11**, N 11 (1998)

УДК 621.378.325

Д.Л. Фрид

ЗАКОНЫ ПОДОБИЯ В ЗАДАЧАХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

Показано, что при анализе эффектов, связанных с вариациями интенсивности и искажениями фазового профиля высоких порядков, любые два совершенно различных варианта распространения пучков через колмогоровскую турбулентность могут быть связаны с помощью простых уравнений подобия при условии, что между вариантами имеются два отношения. Первое из этих отношений требует, чтобы от плоскости излучателя до плоскости наблюдения распределение оптической силы турбулентности в обоих случаях имело одинаковую форму, т.е. чтобы соблюдалась пропорциональность силы турбулентности для соответствующих участков трасс распространения. Второе отношение требует, чтобы величина, которую мы будем называть коэффициентом Рытова, была бы одинаковой в обоих вариантах.

1. Введение

Анализ с использованием масштабирования (отношения размерные/безразмерные параметры) является стандартным методом физических исследований. Он имеет большое значение в таких областях, как, например, гидродинамика, где для подтверждения его важности достаточно упомянуть термин «число Рейнольдса». Подобный анализ используется также в теоретических и экспериментальных работах, в которых рассматривается распространение волн в турбулентности. Законы подобия были применены в экспериментальных исследованиях как базис (мотивация) эвристического приближения, при асимптотическом анализе и в численном моделировании. Целью данного исследования является развитие теории подобия для задач распространения оптических волн в турбулентной атмосфере.

Достижения намеченной цели мы добиваемся через математические преобразования уравнения распространения, так как известно, что законы масштабирования применимы в случаях, когда рассматриваемые эффекты распространения связаны с флуктуациями интенсивности и (или) с искажениями волнового фронта высоких порядков. Эти законы масштабирования будут использованы в форме, которая может непосредственно применяться к оптическому полю, а не только к его различным моментам. Так как низшие компоненты пространственной частоты не учитываются математически строго, усредненные фазовые профили и наклоны (т.е. первые моменты) не будут связаны законами масштабирования. Это обсуждается в разделе 2.

Нам не удалось строго доказать, что законы масштабирования являются следствием волнового уравнения и колмогоровской статистики турбулентности, рассматриваемых совместно с некоторыми прямыми физическими доказательствами, особенно с доказательствами, касающимися низших пространственных частот турбулентности. Но покажем, что при выполнении определенных условий случайная интенсивность и фазовые искажения высоких порядков оптических полей в двух задачах распространения, которые кажутся абсолютно различными (с различными длинами волн, длинами трасс и различной интенсивностью турбулентности), связаны простыми законами теории подобия. Условия, которые должны быть выполнены, накладываются на распределения интенсивности турбулентности вдоль трассы распространения и на некоторую величину, называемую коэффициентом Рытова и определяемую уравнением (1), данным в разделе 3.

Нужно отметить, что мы рассматриваем распространение только монохроматических волн. Два примера распространения, связываемые с помощью теории подобия, могут включать волны различной длины, но каждая из них должна быть абсолютно монохроматической, так как масштабирование может быть выполнено только для волн с определенной длиной. Из этого ограничения вытекает, что законы подобия не могут быть использованы при анализе нестационарных эффектов, таких как увеличение длины короткого импульса, так как из того, что импульс является коротким, следует, что он является немонохроматическим.

Вывод законов масштабирования делает возможным проведение оптических экспериментов по распространению с параметрами, выбранными в соответствии с имеющимися возможностями. Результаты могут быть применены (согласно масштабу) к интересующей нас задаче, например к задаче с характерными параметрами, для которых проведение прямого эксперимента является трудным или дорогостоящим (к таким параметрам может относиться длина трассы). Может быть, более актуальным для нас, занимающихся вопросами теории, является то, что наличие законов распространения означает уменьшение размерности пространства (на несколько порядков) при моделировании статистики распространения волн в турбулентности методом Монте-Карло. Это упрощает задачу, слишком объемную для систематического исследования методом Монте-Карло, и делает возможным ее решение.

Было замечено, что программы компьютерного моделирования распространения волн через турбулентность имеют некоторую аналогию с развиваемыми в настоящей статье законами масштабирования. Подчеркнем, что именно этот факт был для нас начальным стимулом развития законов масштабирования, представленных в данной статье. Хотя теория подобия в чистом виде не рассматривалась при составлении программ, из анализа связи фазового сдвига с турбулентными фазовыми экранами и с длиной трассы между парой точек на следующих друг за другом экранах вытекают законы масштабирования. (Именно осознание этого факта подтолкнуло нас заняться выводом законов подобия, более последовательных, чем просто вывод о том, что программы построены на основе этих законов.)

Отметим любопытный факт: из того, что на законах масштабирования основан расчет распространения пучков следует, что метод Монте-Карло нельзя использовать для проверки законов. Хорошо выполняемое моделирование требует строгого подтверждения. Только намеренно пытаясь получить случайные результаты, например, используя разные основания случайной последовательности чисел при генерировании турбулентных фазовых экранов, мы бы получили не очень строгое подтверждение, но отсутствие такого подтверждения было бы не более чем констатацией неспособности программы выдать два абсолютно одинаковых результата для двух статистически независимых моделей одной задачи. Подтверждение законов масштабирования следует искать на основе экспериментальных данных, а также путем анализа достоверности представленных преобразований.

Законы подобия выводятся на основе предположения о том, что статистика турбулентности является колмогоровской и оптическая сила турбулентности, характеризуемая структурной постоянной показателя преломления C_N^2, имеет подобное распределение вдоль обеих трасс распространения. Говоря о том, что распределение является подобным, мы имеем в виду, что при C_N^2, записанной в виде функции части пути (четверти, половины или двух третей трассы), распределение на одной из трасс прямо пропорционально распределению вдоль трассы. Будет показано, что если турбулентность на трассах имеет отмеченные свойства, тогда требование связи статистики для двух случаев распространения простыми законами масштабирования означает, что в обоих случаях коэффициент Рытова R имеет одно и то же значение.

Здесь уместно сказать о низших компонентах пространственной частоты турбулентности и об ограничениях, обусловленных использованием модели колмогоровской турбулентности. Мы не вводим явно внешний масштаб турбулентности для обозначения границы применимости колмогоровской модели. Ограничение до чисто колмогоровской турбулентности подразумевает бесконечность дисперсии показателя преломления. В приложениях, имеющих для нас принципиальное значение, например, при оценке влияния искажений волнового фронта в системах передачи изображений, при исследовании систем адаптивной оптики или при оценке влияния флуктуаций интенсивности в системах связи в атмосфере, интересующие нас эффекты связаны с возмущениями интенсивности или с искажениями высоких порядков волнового фронта, нет необходимости введения внешнего масштаба турбулентности. Влияние низших компонент пространственной частоты атмосферной турбулентности не имеет практического значения, поэтому неважно, как мы учитываем влияние внешнего масштаба. Фактически, даже если учет влияния не является самодостаточным, это не влияет значительно на оптику задачи. Только при анализе первых моментов оптического поля (исследование, для которого мы не в состоянии найти какое-либо практическое приложение) учет внешнего масштаба турбулентности будет иметь значение.

Этот вопрос более подробно обсуждается в разделе 2, где объясняется, почему применение законов масштабирования не является возможным, когда исследуемые эффекты определяются изменением фазы в точке, как в случае вычисления первых моментов оптического поля, или изменениями усредненной по площади фазы, или когда они зависят от изменений усредненного по площади наклона волнового фронта. Тогда как наши результаты не применимы при рассмотрении этих вопросов в других, более значимых с практической точки зрения, задачах (передача изображений, адаптивная оптика, оптическая связь и др.), в которых определяющими являются флуктуации интенсивности и искажения волнового фронта высших порядков, использование законов масштабирования будет весьма актуальным. Различие между двумя классами задач, теми, где законы масштабирования применимы, и теми, где их применение невозможно, следует из простых физических рассуждений, касающихся того, влияют ли турбулентные возмущения чрезвычайно большого внешнего масштаба на статистику рассматриваемого примера. Для задач, имеющих практическое значение (или, по крайней мере, для которых мы смогли найти практическое значение), это не является важным: вариации показателя преломления с такими большими масштабами не оказывают заметного влияния, т.е. законы масштабирования могут быть использованы.

Прежде чем оставить вопрос о моментах оптического поля, нужно отметить то, что отдельные законы масштабирования и некоторые безразмерные параметры могут быть получены из других при использовании аппроксимации статистических моментов оптического поля. В частности, мы считаем уместным отметить здесь работы Гурвича и Кана [5], Витмана и Берана [2] и Гоциани [6].

2. Учет низших пространственных частот турбулентности

Низшие пространственные частоты играют весьма необычную роль в описании и анализе атмосферной турбулентности и оптических эффектов турбулентности. При рассмотрении турбулентности в инерционной подобласти удобно иметь возможность игнорирования ограничений на низшую пространственную частоту инерционного диапазона и пользоваться колмогоровской статистикой, т.е. степенным законом двух третей для структурной постоянной (r2/3) и зависимостью ϰ–11/3 для плотности трехмерного спектра мощности, применяя эти зависимости ко всем значениям r вне зависимости от того, насколько они велики, и ко всем значениям ϰ, насколько малы они бы ни были. Это означает, что дисперсия показателя преломления в атмосфере является бесконечной. Такое явно не физическое допущение, а это допущение используется во многих, если только не в большинстве работ, связанных с распространением оптических волн в турбулентности, следует из того, что оптические эффекты, обусловленные низшими пространственными частотами турбулентности, являются или ненаблюдаемыми, или настолько трудно регистрируемыми, что фактически не вызывают интереса. Наличие явно бессмысленной с точки зрения физики ситуации в задачах распространения часто допускается и из-за того, что физические рассуждения делают возможным оценку влияния этих низших компонент на оптические свойства волн, – очень просто бывает определить, влияет ли наличие или отсутствие этих частот на оптические свойства и на результаты инженерных расчетов. В большинстве приложений наличие или отсутствие низших частот считается не имеющим значения. Мы будем использовать это отсутствие физического влияния низших частот для оправдания не совсем последовательного подхода к моделированию низших частотных компонент пространственного спектра турбулентности в представляемом анализе.

Из простых физических рассуждений следует, что низшие частотные компоненты турбулентности не оказывают существенного влияния на флуктуации интенсивности. Как указывалось выше, при отсутствии внешнего масштаба турбулентности ковариация показателя преломления является бесконечной. Обусловлено это наличием очень мощных низкочастотных компонент турбулентности. Но из-за того, что эти низкочастотные компоненты практически не имеют физического влияния на распространение волн, рассматриваемое с точки зрения возмущений интенсивности, ковариация флуктуаций интенсивности будет конечной. Соответственно, если нас интересуют эффекты, связанные с флуктуациями интенсивности, мы можем включать в анализ низшие частоты так, как будем считать удобным, и не всегда делать это последовательно. Эти компоненты не влияют на возмущения интенсивности, поэтому от того, как мы будем их учитывать, возмущения не изменятся, т.е. результаты анализа возмущений интенсивности не зависят от метода, согласно которому выполняется учет низших частотных компонент пространственного спектра турбулентности.

Можно легко показать, что размерность, связанная с границей, разделяющей пространственный спектр на частоты, которые являются и не являются низшими, задается числом Френеля, имеющим порядок произведения корня квадратного из длины оптической волны на эффективную длину трассы, а за эффективную длину трассы принимается длина участка, проходимого светом после первого взаимодействия с турбулентностью.

Если мы собираемся исследовать эффекты, связанные с фазовыми возмущениями, то постановка задачи является отнюдь не простой. В этом случае мы должны выделить три следующих аспекта.

1. Изменения фазы с течением времени в некоторой точке (или фазы, усредненной по некоторой интересующей нас площади).
2. Изменение наклона волнового фронта с течением времени в пределах заданной области (полагается, что область соответствует некоторой апертуре).
3. Разность фаз между точками в пределах некоторой области (в некоторой момент времени), которую часто называют искажением волнового фронта высокого порядка. При этом из разности фаз должен быть вычтен средний в этой области (в этот же момент времени) наклон волнового фронта.

С точки зрения физики совершенно очевидно, что низшие компоненты пространственной частоты не оказывают существенного влияния на третий из приведенных выше факторов, т.е. на искажения волнового фронта высоких порядков. Низшие компоненты пространственной частоты турбулентности обусловливают появление относительно низких пространственных частот вариаций фазы, которые практически не вносят вклад в искажения волнового фронта высоких порядков. (Более того, если имеются какие-либо значительные возмущения фазы, то они почти полностью обусловлены наклоном волнового фронта – вторым из приведенных выше факторов.) Поэтому если нас интересуют эффекты, связанные с искажениями волнового фронта высоких порядков, т.е. то, что является актуальным при исследовании короткоэкспозиционного разрешения систем передачи изображений, исследования эффективности систем адаптивной оптики при коррекции искажений волнового фронта высоких порядков или коэффициента мгновенного усиления лазерного передатчика, то мы можем учитывать низкочастотные компоненты турбулентности так, как будем считать удобным, и при этом не обязательно абсолютно последовательно.

В этом случае граница между пространственными частотами, которые нужно рассматривать как низкие, и теми, которые нельзя так рассматривать, задается размером рассматриваемой области, т.е. размером апертуры (или числом Френеля, в зависимости от того, какой параметр окажется больше).

Если нас интересует наклон волнового фронта в пределах некоторой апертуры, как было бы при исследовании полосы частот сервоприводов устройства регистрации наклонов в адаптивной системе, тогда значительный вклад в величину наклона вносили бы низкие пространственные частоты турбулентности и дисперсия наклона была бы конечной. Следовательно, значение этой дисперсии будет зависеть от низших пространственных частот турбулентности. В этом случае линия, разделяющая пространственные частоты на те, которые должны быть учтены, и частоты, настолько низкие, что на статистику наклонов практически не влияет то, учитываем мы их или нет, определяется некоторым произведением (достаточно большим коэффициентом), одним из сомножителей которого является диаметр апертуры. Чтобы разобраться, где проходит эта разделительная линия, рассмотрим вклад различных компонент пространственной частоты турбулентности в дисперсию волнового фронта.

Величина дисперсии волнового фронта почти полностью определяется компонентами пространственной частоты, меньшими чем обратный диаметр апертуры D^{-1}. Если проведем разделительную линию на некоторой частоте $\varkappa_{\mathrm{Low}}$ и скажем, что пространственные частоты, более низкие, чем $\varkappa_{\mathrm{Low}}$, являются настолько низкими, что их вкладом в средний по площадке наклон можно пренебречь и они могут быть опущены при вычислении дисперсии наклона, тогда возникает вопрос, насколько правильно мы вычисляем дисперсию? При колмогоровской турбулентности дисперсия наклона, пропорциональная интегралу от $\varkappa^2$, умноженному на плотность спектра мощности турбулентности, вычисляемому в пределах от некоторой низкой пространственной частоты $\varkappa_{\mathrm{Low}}$ до некоторого эффективного верхнего предела D^{-1}, имеет значение $D^{-1/3} - \varkappa_{\mathrm{Low}}^{1/3}$. Для этого чтобы дисперсия составляла 75% (или 90%) от истинного значения, т.е. от значения, полученного с необрезанной нижней границей, которое пропорционально $D^{-1/3}$, мы должны так провести разделительную линию между частотами, вносящими значительный вклад в наклон, и частотами, не вносящими вклада, чтобы эта самая значительность была определена на уровне 75% (или 90%) от полного значения, т.е. при $\varkappa_{\mathrm{Low}} = (1/4)D^{-1/3} = (64D)^{-1/3}$ (или $\varkappa_{\mathrm{Low}} = (1/10)D^{-1/3} = (1000D)^{-1/3}$), что соответствует пространственному периоду $64D$ (или $1000D$).

Обычно эта разделительная линия соответствует настолько большой длине, что мы не сможем обосновать учет низших пространственных частот турбулентности, так как они будут настолько низкими, что не окажут влияния на волновой фронт на апертуре средних или достаточно больших размеров. Соответственно возможность применения теории подобия, развиваемой нами, будет ограниченной или сомнительной в задачах, где рассматривается волновой фронт на средних или больших апертурах.

Если же нас интересуют изменения фазы в точке, как может быть, например, при использовании для мониторинга стабильности земной поверхности (сейсмологических эффектов) интерферометра Маха–Цандера, в одно из плеч которого включена откачанная кювета, или при определении первых моментов оптического поля, тогда, очевидно, мы должны учитывать все имеющиеся в наличии пространственные частоты. Так же, если турбулентность колмогоровская, дисперсия фазы конечна (и первый момент оптического поля равен нулю), любая ошибка в учете низших пространственных частот турбулентности будет приводить к значительным ошибкам при вычислении интересующей нас величины. В таких случаях нужно скрупулезно учитывать низшие частоты. И, соответственно, можно заключить, что законы подобия будут неприменимы при изучении оптических явлений, связанных с изменениями фазы в точке (или с изменениями средней по площади фазы).

Поэтому в настоящей работе мы ограничиваемся оптическими эффектами, для которых низкочастотные пространственные компоненты турбулентности могут быть выбраны так, чтобы сделать удобным проводимый анализ, при этом сам эффект не должен испытывать влияния отброшенных частот. В основном мы ограничимся анализом флуктуаций интенсивности, обусловленных турбулентностью, и искажениями волнового фронта высоких порядков. (Нужно отметить, что проблемы, исключенные нами, – вычисления наклона волнового фронта, медленные изменения фазы в точке, усредненные по площади изменения фазы – могут быть решены с использованием простых физических рассуждений или с использованием методов геометрической оптики.) Тогда как задачи, в которых могут быть использованы законы теории подобия, а это задачи вычисления флуктуаций интенсивности и искажений волнового фронта высоких порядков, являются по-настоящему актуальными для развития теории распространения волн.

3. Основные уравнения

Коэффициент Рытова, который, как это будет показано, является основным фактором теории подобия, определяется уравнением

$$R = k^{7/6} Z^{5/6} \int_0^Z dz(z/Z)^{5/6} (1 - z/Z)^{5/6} C_N^2(z) . \qquad (1)$$

Здесь Z – полная длина трассы распространения; k – волновое число. Мы называем R коэффициентом Рытова потому, что этот коэффициент пропорционален дисперсии логарифма амплитуды бесконечной плоской волны, дисперсии, вычисленной Татарским с использованием приближения Рытова.

Для нормировки координат в плоскости, поперечной направлению распространения, мы используем длину L, которая называется радиусом Френеля трассы распространения. Значение этого параметра задается следующим уравнением:

$$L = \sqrt{Z/k}\ . \tag{2}$$

Законы масштабирования, которые мы получаем, связывают случайное оптическое поле в одном из численных экспериментов, записанное в виде функции обратных координат r (координат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения), с соответствующим случайным оптическим полем во втором эксперименте с помощью связи, устанавливаемой при записи обоих случайных полей в виде функций от r/L.

Законы масштабирования выводятся с использованием параксиального приближения волнового уравнения, при этом неоднородность на трассе распространения моделируется набором случайных экранов. Вывод основан на замене результатов, полученных для некоторого ансамбля случайных функций, на результаты, соответствующие другому набору случайных функций. Используемое приближение статистически независимых фазовых экранов обосновано в первом разделе настоящей статьи, где обсуждалась некоторая непоследовательность в учете низших пространственно-частотных компонент атмосферной турбулентности. Строго говоря, фазовые экраны должны быть взаимно коррелированными. Нужно отметить, что приближение статистически независимых экранов ведет без каких-либо дополнительных рассуждений (кроме тех, которые касаются отбрасывания эффектов двойного обратного рассеяния) к так называемому марковскому приближению оптического поля [7, 8], к приближению, согласно которому оптическое поле является статистически независимым относительно параметров неоднородностей, через которые волна еще не прошла.

Мы будем использовать волновое уравнение в параксиальном приближении, решаемое при возмущениях, вносимых турбулентностью. При этом оптическое поле $U(\mathbf{r}, z, t)$ представляет собой плоскую волну, распространяющуюся по оси z. Выражается поле $U(\mathbf{r}, z, t)$ следующим образом:

$$U(\mathbf{r}, z, t) = u(\mathbf{r}, z)\exp[ik(\pm z + ct)]\ , \tag{3}$$

где $u(\mathbf{r}, z)$ – функция, которая обычно является медленно изменяющейся, особенно по координате z. Параксиальное приближение задает значение функции носителя возмущений $u(r, z)$ следующим образом:

$$[\nabla_r^2 \pm 2ik\partial_z + 2k^2 n(r, z)]\, u(r, z) = 0\ . \tag{4}$$

Здесь ∂_z – частная производная по координате z (т.е. $\partial/\partial z$); $\nabla_{\mathbf{r}}^2$ – сумма двух вторых производных, входящих в лапласиан, производных, вычисляемых по осям, перпендикулярным направлению распространения. Переменной $n(\mathbf{r}, z)$ обозначены турбулентные возмущения показателя преломления атмосферы; предполагается, что эта величина является очень малой.

Параксиальное приближение – это следствие волнового уравнения Максвелла, в которое вводятся два допущения: первое –возмущения показателя преломления $n(\mathbf{r}, z)$ являются достаточно малыми и их квадратом можно пренебречь, второе – функция $u(\mathbf{r}, z)$ изменяется медленно по оси z и ее вторая производная $\partial_z^2 u(\mathbf{r}, z)$ может быть опущена. Уравнение (4) является отправной точкой всего последующего анализа.

4. Задание фазового экрана

Следуя рекомендациям и практическим методам, разработанным Усинским [9], Прохоровым и его соавторами [10], Тейлором [11], Ишимару [12] и многими другими, и в соответствии с практикой моделирования задач распространения, разобьем все трассу длиной Z на участки одинаковой длины $z = \{z_0, z_1, z_2, ..., z_p, ..., z_P\}$ и с границами в точках с координатами z_P, где $z_0 = 0$ и $z_P = Z$ – полная длина трассы. Структуру показателя преломления на каждом участке будем описывать фазовым экраном нулевой плотности, расположенным в середине участка. Для обозначения середины p-го участка будем использовать переменную $\overline{z}_p$:

$$\overline{z}_p = \frac{1}{2}(z_p + z_{p+1})\ . \tag{5}$$

Длина каждого из участков должна быть взята как можно более малой, при этом необходимо, чтобы выполнялось условие

$$(Z/P)\lambda/r_0 \ll r_0^{\text{seg}}(p) \tag{6}$$

для всех значений p. Здесь через r_0 обозначен эффективный диаметр когерентности бесконечной плоской волны, распространяющейся со значением r_0, задаваемым уравнением

$$r_0 = \left[\frac{2{,}91}{6{,}88}k^2 \int_0^Z dz\, C_N^2(z)\right]^{-3/5}, \tag{7}$$

где $r_0^{\text{seg}}(p)$ – эффективный диаметр когерентности для волны на p-м участке трассы. Эта величина задается уравнением

$$r_0^{\text{seg}}(p) = \left[\frac{2{,}91}{6{,}88}k^2 \int_{z_{p-1}}^{z_p} dz\, C_N^2(z)\right]^{-3/5}. \tag{8}$$

Физическая аргументация введения условия (6) приводится ниже. Заменяя поле показателя преломления, распределенное на некоторым отрезке, фазовым экраном с нулевой плотностью, расположенным в центре участка, полагаем, что случайные наведенные искажения волнового фронта распределены в направлении распространения. На своем худшем участке (на дальнем конце трассы) искажения имеют порядок λ/r_0 и не влияют значительно на дополнительные возмущения фазы, обусловленные распространением в пределах отрезка. Это выполняется, если случайное поперечное смещение (в худшем случае оно имеет порядок $(Z/P)\lambda/r_0$) является достаточно малым. Величина, определяющая малость поперечного смещения, задается радиусом $r_0^{\text{seg}}(p)$ отрезка. Таким образом, если условие (6) удовлетворено, то поперечный сдвиг мал и мы можем заменить поле показателя преломления фазовым экраном, расположенным в середине отрезка.

Требуется, чтобы величина P была достаточно большой:

$$(Z/P)\lambda \ll z_0^2 \,. \tag{9}$$

Это необходимо для использования законов лучевой оптики при распространении в объеме сегмента (Z/P) в описании, приводимом выше. Но так как это требование выполняется при выполнении условия (6), уравнение (9), накладывающее дополнительные ограничения на длину отрезка, не является необходимым.

Мы также полагаем, что выбранное значение P является достаточно большим для того, чтобы фазовые экраны были статистически независимыми. Как будет показано ниже, условие статистической независимости будет выполнено, если отношение (Z/P) является значительно большим, чем период, связанный с введением деления на компоненты пространственной частоты с периодом (частотой) настолько большим (малой), что они не влияют существенно на распространение оптических волн и на компоненты с периодом (частотой), достаточно малым (большой) для оказания влияния на распространение. Мы полагаем, что анализ не проводится для турбулентности с интенсивностью настолько высокой, что невозможно найти значение P, при котором одновременно было бы выполнено условие независимости фазовых экранов и условие (6).

При P со значением, удовлетворяющим условию (6) (и условию (9)), в результате физических рассуждений мы показали, что все изменения показателя преломления на p-м отрезке сжаты в тонкий фазовый экран, обозначенный как $N(r, p)$ и расположенный в середине отрезка. Мы используем термин «сжаты», подразумевая, что функция $N(r, p)$ может быть записана как

$$N(\mathbf{r}, p) = \int_{z_{p-1}}^{z_p} dz\, n(\mathbf{r}, z) \tag{10}$$

и соответственно $n(\mathbf{r}, z)$ в уравнении (4) заменена на

$$n(\mathbf{r}, z) \Rightarrow \sum_{p=1}^{P} N(\mathbf{r}, p)\, \delta(z - \bar{z}_p) \,. \tag{11}$$

Поэтому вместо уравнения (4) получим

$$\left(\nabla_{\mathbf{r}}^2 \pm 2ik\partial_z + 2k^2\Big(\sum N(\mathbf{r}, p)\, \delta(z - \bar{z}_p)\Big)\right) u(\mathbf{r}, z) = 0 \,. \tag{12}$$

Нужно отметить, что в такой форме уравнение распространения входит во многие (если не во все) компьютерные программы.

Ключевым пунктом физических рассуждений, на основе которых выводятся уравнения подобия, является признание того, что для всех интересующих нас эффектов уравнения (6) и (9) подтверждают справедливость уравнения (11) и, как следствие, уравнения (12). Таким образом, признается то, что при дискретизации показателя преломления по оси z его изменения влияют на распространение волн так же, как и при непрерывном распределении показателя преломления. Как отмечалось в аргументах, приведенных после уравнений (8) и (9), основой физического обоснования является положение о том, что при выполнении условий (6) и (9) поле, полученное как результат распространения искаженной оптической волны от одного экрана до другого при фазовом сдвиге, задаваемом только на экране (при отсутствии вариаций показателя преломления между экранами), будет точно таким же, как поле при распространении в среде с непрерывным показателем преломления (при отсутствии фазового набега на экранах).

Теперь мы вводим еще одно допущение (обычное при компьютерном моделировании задач распространения волн)

$$Z/P \gg |\,\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\,, \tag{13}$$

где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ – векторы точек в двух поперечных направлению распространения плоскостях. Истинность уравнения (13), которая соблюдается во всех известных нам задачах и, по-видимому, во всех задачах, которые только могут быть придуманы, позволяет нам сделать вывод с помощью закона 2/3 колмогоровской статистики, примененного для флуктуаций показателя преломления, а именно

$$\left\langle \left[n(\mathbf{r}_1, z_1) - n(\mathbf{r}_2, z_2)\right]^2 \right\rangle = C_N^2\left(\tfrac{1}{2}(z_1 + z_2)\right)\left[|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2 + (z_1 - z_2)^2\right]^{1/3}, \tag{14}$$

что соответствующая статистика фазового экрана $N(\mathbf{r}, p)$ задается уравнением

$$\langle [N(\mathbf{r}_1, z_1) - N(\mathbf{r}_2, z_2)]^2 \rangle \approx \left(2{,}91 \int_{z_{p-1}}^{z_p} dz\, C_N^2(z)\right) \left[|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^{5/3}\right] . \tag{15}$$

В уравнение (13) удобно ввести величину $R = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ – это пара векторов некоторых точек в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения и разнесенных так далеко, как нам это требуется. (При исследованиях эффективности систем это расстояние может быть больше, чем диаметр апертуры или диаметр расходящегося пучка, или может быть равно нескольким радиусам Френеля, если рассматривается распространение волны от точечного источника. Чем конкретно определяется значение R, не рассматривается в настоящей статье.) Величина, обратная R или некоторому произведению, включающему R, концептуально определяет низшие пространственные частоты. Когда условие (13) или подобное, записанное ниже, выполняется:

$$Z/P \gg R \,, \tag{16}$$

можно полагать, что все компоненты пространственных частот турбулентности, влияющие на рассматриваемые нами эффекты, а именно на флуктуации интенсивности и искажения волнового фронта высоких порядков, имеют период, который значительно меньше, чем протяженность отрезка.

Следовательно, между этими компонентами может быть лишь слабая корреляция при учете их вклада в различные интервалы и в соответствующие фазовые экраны, даже если интервалы являются соседними. Так как низшие пространственные частоты не оказывают влияния на интересующие нас эффекты, для них можно ввести не совсем правильное (и не являющееся последовательным) приближение, согласно которому их вклад в соседние фазовые экраны также является некоррелированным. Это позволяет нам записать

$$\langle [N(\mathbf{r}_1,p)-N(\mathbf{r}_2,p)][N(\mathbf{r}'_1,p')-N(\mathbf{r}'_2,p')] \rangle \approx 0 \text{ при } p \neq p' \,. \tag{17}$$

(Отметим, что это приближение используется в большинстве программ, моделирующих распространение волн.) Уравнение (17) означает, что отдельные фазовые экраны можно рассматривать как статистически независимые.

Рассмотрим фазовые экраны в терминах ансамбля случайных функций $\nu(\rho, *)$ с «единичной силой», описываемых той же степенной зависимостью (с показателем степени 5/3), что и в уравнении (15). Здесь через «ρ» обозначен безразмерный двухкомпонентный вектор положения. (Возможность использования такой функции в описании статистики турбулентности объясняется принципиальной безразмерностью колмогоровской модели). Звездочка «*», записанная в качестве аргумента функции ν, означает, что выбираются случайные реализации функций ν и появление этой функции два и более раз в уравнении не означает одну и ту же реализацию. Только если звездочка записана как нижний индекс с тем же самым значением другого нижнего индекса в каждом случае, нужно понимать, что имеется в виду одна и та же реализация. Например, если в сумме $\sum_m \nu(\rho, *_m)$ каждый член $\nu(\rho, *_m)$ имеет различные значения индекса m, то он представляет собой различные, случайно выбранные реализации.

Функция $\nu(\rho, *)$, как это следует из определения, имеет следующее статистическое свойство:

$$\langle [\nu(\rho_1, *_a) - \nu(\rho_2, *_a)]\, [\nu(\rho_1, *_b) - \nu(\rho_2, *_b)] \rangle =$$

$$= \begin{cases} 2{,}91|\rho_1-\rho_2|^{5/3} & \text{при } *_a = *_b, \\ 0 & \text{при } *_a \neq *_b. \end{cases} \tag{18}$$

Из уравнения (15) следует, что ансамбль функций $N(\mathbf{r}, p)$ может быть заменен ансамблем функций $\nu(\rho, *)$ с использованием следующего уравнения замещения:

$$N(\mathbf{r}_1, p) \Rightarrow L^{5/6}\, C_p \nu(\mathbf{r}/L, *_p) \,, \tag{19}$$

где

$$C_p = \sqrt{\int_{z_{p-1}}^{z_p} dz\, C_N^2(z)} \,. \tag{20}$$

Удобно ввести параметры C и $\tilde{n}_P$, определяемые как

$$C_p = \sqrt{\int_0^Z dz\, (z/Z)^{5/6}\, (1 - z/Z)^{5/6}\, C_N^2(z)}, \tag{21}$$

$$\tilde{n}_p = C_p/C \,. \tag{22}$$

Это позволяет переписать уравнение (19) следующим образом:

$$N(\mathbf{r}_1, p) \Rightarrow L^{5/6}\, C\tilde{n}_p\, \nu(\mathbf{r}/L, *_p) \,. \tag{23}$$

Используя (23), преобразуем уравнение (12):

$$\Big(\nabla_r^2 \pm 2ik\partial_z + 2k^2 C\Big(\sum_{p=1}^{P} L^{5/6}\, c_p \nu(\mathbf{r}/L, *_p)\, \delta(z-\bar{z}_p)\Big)\Big)\, u(\mathbf{r}, z) = 0. \tag{24}$$

Эта запись позволяет нам приступить к формулированию законов масштабирования. Выполняется это в следующем разделе.

5. Масштабирование сформулированной задачи

Перепишем уравнение (24), заменяя переменную $\mathbf{r}$ на ρ и z на ζ, где

$$\rho = \mathbf{r}/L \,; \tag{25}$$

$$\zeta = z/Z \,. \tag{26}$$

Соответственно получаем

$$\nabla_{\hat{e}}^2 = L^{-2}\, \nabla_\rho^2 \tag{27}$$

и

$$\partial_z = Z^{-1}\, \partial\zeta \,. \tag{28}$$

Определяя $\overline{\zeta}_P$ как

$$\overline{\zeta}_P = \overline{\zeta}_P/Z \tag{29}$$

и используя свойство дельта-функции Дирака

$$\delta(z - z_p) \Rightarrow Z^{-1}\,\delta(\zeta - \zeta_p)\,, \tag{30}$$

перепишем уравнение (24):

$$\{L^{-2}\,\nabla^2_\rho \pm 2ikZ^{-1}\partial_\zeta + 2k^2C[\sum_{p=1}^{P} L^{5/6}\,c_p\nu(\rho,*_p)\,Z^{-1}\,\delta(\zeta - \overline{\zeta}_p)]\}\times$$

$$\times\, u(L\,\rho, Z\zeta) = 0\,. \tag{31}$$

Введем функцию $\nu(\rho, \zeta)$, задаваемую уравнением

$$\nu(\rho, \zeta) = u(L\rho, Z\zeta)\,, \tag{32}$$

включающим обратную зависимость

$$u(\mathbf{r}, z) = (\mathbf{r}/L, z/Z)\,. \tag{33}$$

Используя (2), заменим (31) на

$$\{(k/Z)\nabla^2_\rho \pm 2i(k/Z)\partial_\zeta + 2(k/Z)k^{7/12}C[\sum_{p=1}^{P} c_p\nu(\rho,*_p)\,\delta(\zeta - \overline{\zeta}_p)]\}\times$$

$$\times\, \nu(\rho, \zeta) = 0\,. \tag{34}$$

Обе части уравнения поделим на k/Z и, учитывая, что из (1) и (21) следует равенство

$$k^{7/12}\,Z^{5/12}\,C = R^{1/2}, \tag{35}$$

перепишем (34) как

$$(\nabla^2_\mathbf{r} \pm 2i\partial_\zeta + 2R^{1/2}(\sum_{p=1}^{P} c_p\nu(\rho,*_p)\,\delta(\zeta - \overline{\zeta}_p)]\}\;\nu(\rho, \zeta) = 0. \tag{36}$$

Эта безразмерная форма уравнения распространения является основным результатом нашего анализа. Любое решение, полученное для функции $\nu(\rho, \zeta)$, может быть масштабируемо с использованием (33) для применения в различных задачах, задачах с одним и тем же R и одинаковым распределением величины c_P.

Уравнение (36) может интерпретироваться следующим образом. Для двух вариантов распространения, имеющих одинаковую структуру распределения турбулентности вдоль трасс (например, если турбулентность однородна в обоих случаях или затухает экспоненциально согласно одному и тому же закону), что будет проявляться в том, что c_P представлены одинаковым набором, и имеющих абсолютную интенсивность турбулентности, длину трассы и длину волны такие, что оба варианта характеризуются одинаковым коэффициентом Рытова R, безразмерное уравнение распространения, т.е. уравнение (36), будет одинаковым, и одинаковой будет форма безразмерной волновой функции $\nu(\rho, \zeta)$.

Сделанное заключение означает эквивалентность результатов распространения (оптических полей), полученных в двух различных задачах. Т.е. если проводится эксперимент (или компьютерное моделирование) для одного варианта, в котором измеряются случайные реализации $u(\mathbf{r}_1, Z_1)$ и вычисляются соответствующие значения $\nu(\rho, \zeta)$ на основе уравнения (32), то могут быть определены реализации $\nu(\rho, \zeta)$ для другого варианта и с помощью (33) вычислен статистически эквивалентный набор функций $u(\mathbf{r}_2, Z_2)$. (Здесь и далее индексы 1 и 2 означают переменные (или параметры) соответствующих вариантов.) Любой результат, касающийся интенсивности и искажений волнового фронта высоких порядков, может быть получен для случая 2, если известен соответствующий результат для случая 1.

Анализируя уравнения (25), заметим, что переход от $\mathbf{r}_1$ к $\mathbf{r}_2$ выполняется как

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1(L_2/L_1)\,. \tag{37}$$

Так как структура распределения турбулентности является одинаковой и одинаковым для обоих вариантов является коэффициент Рытова, из уравнения (37) также следует, что переход от r_1 к r_2 может быть выполнен как

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1[(\mathbf{r}_0)_2/(\mathbf{r}_0)_1]\,, \tag{38}$$

из чего можно заключить, что если в двух экспериментах одинаковым является коэффициент Рытова и диаметры апертур D_1 и D_2 относятся как $(\mathbf{r}_0)_1$ к $(\mathbf{r}_0)_2$ или как L_1 к L_2, то влияние турбулентности будет одинаковым на обе оптические системы. Можно доказать, что для углов, связанных отношением подобия параметром λ/D, влияние неизопланатизма будет одинаковым. Все зависимости усиления приемника адаптивной системы (а зависит усиление только от флуктуаций интенсивности и искажений волнового фронт высоких порядков) в двух вариантах будут одинаковыми при правильном использовании законов подобия.

6. Комментарии

Весьма поучительным является анализ значения законов подобия в исследованиях эффектов, наблюдаемых при распространении волн и связанных с флуктуациями интенсивности и искажениями волнового фронта высоких порядков для случаев, когда интенсивность турбулентности, характеризуемая C_N^2, имеет однородное по трассе распределение и внутренний масштаб турбулентности является настолько малым, что проводимый анализ невозможно считать строгим. Только одномерный набор вариантов нужно рассматривать для проведения исследования, что делает возможным и интересным решение этой задачи.

Следует отметить, что исключение нами усредненного по площади среднего наклона волнового фронта (и в некоторых случаях даже исключение фазы в точке и средней по площадке фазы) может показаться излишне строгой мерой. Если рассматриваются вариации в течение достаточно короткого временного промежутка, тогда влияние низших компонент пространственной частоты относительно невелико. В этом случае теория подобия может быть использована для анализа эффектов, связанных с вариациями наклонов и фазы, так же как и для изучения влияния искажений волнового фронта высоких порядков.

1. *Gracheva M.E., Gurvich A.S., Kashkarov S.S., and Pokasov Vl.V.* Similarity relations and their experimental verification for strong intensity fluctuations of laser radiation // Laser beam propagation in the atmosphere / Ed. J.W. Strohbehn. Berlin: Springer-Verlag, 1978. P. 107–128.
2. *Whitman A.M. and Beran M.J.* Two-scale solution for atmospheric scintillation // J. Opt. Soc. Am. 1985. A–2. P. 2133–2143.
3. *Martin J.M. and Flatte S.M.* Simulation of point-source scintillation through three-dimensional random media // J. Opt. Soc. Am. 1990. A–7. P. 838–847.
4. *Rytov S.M., Karavtsov Yu.A., and Tatarskii V.I.* // Principles of Statistical Radiophysics. Vol. 4. Wave Propagation through Random Media. Berlin: Springer-Verlag. 1988.
5. *Gurvich A.S. and Kan V.* Measurements of the four-point coherence function of a laser radiation field in a turbulent atmosphere. Izv. Vysh. Ucheb. Zaved. Radiofiz. V. 22. 1979. 192–197. [English: Radiophys. and Quant. Electron. 1979. V. 22. P. 131–134.]
6. *Gozani J.* On the two-scale expansion of the fourth moment of a wave propagating in a random medium. Waves Random Media. 1993. V. 3. P. 279–306.
7. *Klyatskin V.I. and Tatarskii V.I.* A new method of successive approximations in the problem of the propagation of waves in a medium having random large-scale inhomogeneities. Izv. Vysh. Ucheb. Radiofiz. 1971. V. 14. P. 1400–1415. [English: Radiophysics and Quantum Electronics. 1971. V. 14. P. 1100–1111].
8. *Zavorotnyi V.U.* Strong scintillation of electromagnetic waves in a random medium with fine longitudinal correlation of the inhomogeneities. Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1978. V. 75. P. 56–65. [English: Soviet Physics JETP. 1978. V. 48. P. 27–31].
9. *Uscinski B.J.* Solution of the fourth moment equation. Interpretation as a set of phase screens //Wave propagation and scattering / Ed. by B.J. Uscinski. Oxford: Clarendom Press, 1986.
10. *Prokhorov A.M., Bunkin F.V., Gochelashvily K.S., and Shishov V.I.* Laser irradiance propagation in turbulent media // Proc. IEEE. 1975. V. 63. P. 790–811.
11. *Taylor L.S.* Simulation of randomized electromagnetic fields // J. Math. Phys. 1972. V. 13. P. 590–595.
12. *Ishimaru A.* Wave propagation and scattering in random media. (Academic 1978 New York); Sect. 20–14 through 20–16.

Университет Сан-Хосе,
США

Поступила в редакцию
4 августа 1998 г.

D.L.Fried. **Scaling Laws for Propagation through Turbulence.**

In this work it is shown that in regard to optical propagation effects associated with intensity variations and with higher order wave front distortion any pair of quite distinct cases of optical propagation through Kolmogorov turbulence may be related by simple scaling laws providing that two equivalence apply between the cases. The first of these two equivalencies requires that – from the source plane to the measurement plane the distribution of the optical strength of turbulence should the same form in the two cases, i.e. that these should be a simple proportionality between the strength of turbulence at the same fraction of the total distance in the two cases. The second of the two equivalencies requires that a quantity which we will call the Rytov number should be the same for the two cases.