«Оптика атмосферы и океана», **12**, N 3 (1999)

УДК 551.521

**Г.С. Помранинг**

# ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОБЛАКО–РАДИАЦИЯ: МОДЕЛЬ ТИТОВА И ДРУГИЕ МОДЕЛИ

*Школа прикладной науки и техники*
*Калифорнийский Университет, Лос-Анджелес*
*CA 90095-1597, США*

Поступила в редакцию 10.11.1998 г. Принята к печати 18.01.99 г.

***Посвящается моему другу и коллеге Георгию Титову***

Обсуждается *трактовка* переноса излучения через двухкомпонентную дискретную стохастическую смесь. Поле разорванной облачности можно моделировать как такую стохастическую смесь, в которой облака и ясное небо представляют две компоненты. Показано, что метод Титова, построенный на интегральном уравнении для марковской смеси, эквивалентен дифференциальной модели, введенной в литературе по кинетической теории. Обсуждаются возможные упрощения и обобщения модели. Упрощения включают ренормированное уравнение переноса, а также различные диффузионные модели. Обобщения охватывают более точные описания с использованием дополнительных уравнений переноса излучения и учет немарковской статистики смеси.

## Предисловие

Этот специальный выпуск журнала «Оптика атмосферы и океана» посвящен памяти Георгия Титова, и в качестве предисловия к статье мне бы хотелось сказать несколько слов личного характера. Мое знакомство с Георгием не было долгим, но я считал его своим дорогим, близким другом. Первая наша встреча состоялась в 1993 г. на 3-м ARM Sceince Team Meeting в Нормане, Оклахома. В то время его английский был слабоват, поэтому Саша Маршак любезно согласился быть нашим переводчиком.

Несмотря на языковой барьер, было ясно, что нас связывает много общего не только в научном, но и в личном плане. Мы часто незаметно покидали заседания, чтобы вместе покурить, в дань вредной привычке, выработанной нами обоими много лет назад. Через какое-то время после этой встречи Георгий провел несколько дней у меня в Лос-Анджелесе. К тому времени его «английский» стал уже намного лучше, и мы могли горячо дискутировать по различным вопросам переноса излучения в поле разорванной облачности.

Конечно, оставалось время и для культурных мероприятий. Как-то раз мы обсуждали меню нашего ужина. Георгий сказал, что он хотел бы попробовать настоящий американский бифштекс, после чего я, Георгий и моя подруга Люси Родригес пошли в хорошую мясную закусочную. Втроем мы наслаждались хорошим мясом, прекрасным вином, много разговаривали и, конечно же, курили. Мы также сводили Георгия в цветочные сады при Хантингтонской библиотеке в Пасадене. Здесь, в этом поистине прекрасном месте, Георгий, кажется, ощутил настоящий покой и умиротворение этим воскресным днем.

Третий, и последний, раз мы виделись с Георгием на Аляске, на Международном радиационном симпозиуме в 1996 г. Мы крепко обнялись, закурили как старые друзья, словно и не расставались с момента нашей встречи в Лос-Анджелесе.

Люси и я планировали встретить Георгия с семьей, а также Норма Маккормика (члена профессорско-преподавательского состава Вашингтонского университета) с женой в Сиэтле летом 1998 г. К сожалению, болезнь Георгия помешала этой встрече и, как это ни печально, мне уже никогда не суждено было увидеться с моим дорогим другом вновь. Узнав о смерти Георгия, мы с Люси вновь вернулись в цветочные сады в Хантингтонской библиотеке, чтобы совершить поминовение в память о безвременно ушедшем особенном человеке, каким был Георгий. Перед чайным домом, местом где все мы трое испытали чувства огромной любви и дружбы, мы создали ковер из лепестков роз. В память о Георгии Люси написала прекрасные стихи, которые мы отправили жене Георгия. Также мы послали фотографии, запечатлевшие те счастливые мгновения, когда Георгий, Люси и я были вместе в Хантингтоне.

Нам всегда будет недоставать тебя, Георгий. Будет не хватать того научного вклада, который бы ты мог еще сделать, но больше всего нам будет недоставать тебя лично. Ты был лучшим из тех, кого мир мог нам дать. Спи спокойно, мой дорогой друг. Нижеследующая статья посвящается тебе, твоей семье и моим воспоминаниям о тебе.

## 1. Введение

Взаимодействия облаков с радиацией являются важной составляющей, определяющей глобальный климат. Тщательный учет этих взаимодействий чрезвычайно важен для правильного понимания долгосрочных климатических изменений. Перспективным подходом к решению этой проблемы является рассмотрение разорванной облачности в виде стохастической смеси, состоящей из двух компонент: облачности и ясного неба. Это направление исследований успешно разрабатывалось Георгием Титовым [1] и другими учеными в области кинетической теории. В данной статье мы рассматриваем модель Титова и модели, основанные на кинетической теории, и показываем, что модель Титова, построенная на интегральном уравнении, эквивалентна одной из дифференциальных моделей кинетической теории.

Также обсуждаются возможные упрощения и обобщения данной модели, например ренормированное уравнение переноса, диффузионные приближения, модели высшего порядка и эффекты немарковской смеси. Из соображений краткости мы вынуждены сократить наше обсуждение, однако более детально затрагиваемые вопросы можно найти в недавних обзорных статьях [2,3] и цитируемой в них литературе.

Уравнение переноса излучения, рассматриваемое здесь, описывает стационарный монохроматический транспорт фотонов и записывается в виде

$$\mathbf{\Omega}\cdot\nabla I + \sigma I = \sigma_s \int\limits_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'\, f(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{\Omega}')\, I(\mathbf{\Omega}') + S. \tag{1}$$

Зависимой переменной в уравнении (1) является интенсивность радиации $I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$, где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{\Omega}$ – пространственная и угловая (направление движения фотона) переменные соответственно. Величина $\sigma(\mathbf{r})$ представляет собой макроскопическое полное сечение (коэффициент ослабления); $\sigma_s(\mathbf{r})$ – макроскопическое сечение рассеяния; $f(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{\Omega}')$ – функцию перераспределения по углу при однократном рассеянии, нормированную согласно уравнению

$$\int\limits_{4\pi} d\mathbf{\Omega}\, f(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{\Omega}') = 2\pi \int\limits_{-1}^{1} d\xi\, f(\xi) = 1, \tag{2}$$

и $S(\mathbf{r})$ обозначает какой-либо источник излучения. В предположении выполнения локального термодинамического равновесия в веществе имеем $S = \sigma_a B$, где $B$ – локальная функция Планка; $\sigma_a = \sigma - \sigma_s$ – макроскопическое сечение поглощения с поправкой на вынужденное излучение. В качестве граничного условия для уравнения (1) возьмем равенство

$$I(\mathbf{r}_s, \mathbf{\Omega}) = \Gamma(\mathbf{r}_s, \mathbf{\Omega}), \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{\Omega} < 0, \tag{3}$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали в точке поверхности $\mathbf{r}_s$; $\Gamma$ – заданные граничные данные. Данное граничное условие означает задание значений поля падающей радиации в каждой точке поверхности системы.

В случае бинарной статистической смеси величины $\sigma$, $\sigma_s$, $f$ и $S$ в уравнении (1) считаются дискретными случайными величинами, каждая из которых в любой точке $\mathbf{r}$ принимает одно из двух наборов значений, характерных для образующих смесь компонент – облачности и ясного неба. Эти два набора составлены из индексных переменных $\sigma_i$, $\sigma_{si}$, $f_i$ и $S_i$, где $i = 0$ и 1. Другими словами, при движении фотона через поле разорванной облачности он встречает на своем пути чередующиеся отрезки в облаке и ясном небе, которые имеют детерминированные значения $\sigma$, $\sigma_s$, $f$ и $S$. Стохастичность задачи проявляется в статистике облачного поля, т.е. в характере информации о присутствии в точке $\mathbf{r}$ либо облака, либо ясного неба. Так как $\sigma$, $\sigma_s$, $f$ и $S$ в уравнении (1) – случайные величины (дискретные, с двумя состояниями), то решение уравнения (1) также представляет собой (непрерывную) случайную величину, и мы будем через $\langle I\rangle$ обозначать среднюю по ансамблю интенсивность. Основной задачей статистического моделирования взаимодействий облако–радиация является получение относительно простой и точной системы уравнений относительно $\langle I\rangle$. Также представляет интерес моделирование моментов стохастического радиационного поля более высокого порядка, например дисперсии. Граничные данные $\Gamma$ в уравнении (3) считаются неслучайными величинами, т.е. не зависящими от физической реализации статистики.

Оставшаяся часть статьи построена следующим образом. В части 2 описывается простейшая модель, строящаяся на кинетической теории в предположении марковской смеси и с использованием, в качестве исходного, уравнения Лиувилля. В части 3 представлена модель Титова и показана ее эквивалентность модели, основанной на кинетической теории и описанной в части 2. Часть 4 состоит из двух частей. Вначале обсуждаются упрощения модели Титова, в частности, различные диффузионные аппроксимации и ренормированное уравнение переноса. Это ренормированное уравнение имеет классическую форму уравнения переноса излучения, но для учета стохастичности задачи содержит эффективные характеристики материала и эффективный источник излучения. Вторая половина части 4 обращается к улучшенным (но и более сложным) марковским моделям, и в ней обсуждаются возможные подходы к рассмотрению немарковской статистики. Последний раздел посвящен нескольким заключительным замечаниям.

## 2. Интерпретация исходного уравнения Лиувилля

Предположим, что статистика поля разорванной облачности является марковской и полностью описывается уравнением [4]:

$$\mathrm{Prob}\,(i \to j) = \frac{ds}{\lambda_i(s)}, \quad j \neq i, \tag{4}$$

где $s$ – пространственная координата в направлении $\mathbf{\Omega}$ и $\mathrm{Prob}\,(i \to j)$ – дифференциальная вероятность того, что точка $s + ds$ находится в компоненте $j$ при условии, что точка $s$ находится в компоненте $i$. Здесь два параметра $\lambda_i(s)$ являются заданными длинами марковского перехода, связанными с облачным полем и они полностью описывают статистику смеси облака – ясное небо. Вероятности $p_i(s)$ того, что компонента $i$ находится в точке $s$, связаны с $\lambda_i(s)$ посредством уравнений Чэпмена–Колмогорова [4]:

$$\frac{dp_i}{ds} = \frac{p_j}{\lambda_j} - \frac{p_i}{\lambda_i}, \quad j \neq i. \tag{5}$$

Величины $p_i(s)$ можно интерпретировать просто как объемные фракции этих двух компонент смеси в точке $s$. Для однородной статистики (т.е., если $\lambda_i$ не зависят от $s$) их связь с $\lambda_i$ описывается выражением

$$p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_0 + \lambda_1}. \tag{6}$$

В этом однородном случае $\lambda$ имеет смысл средней длины отрезка в компоненте $i$. Величина $\lambda_c(s)$, имеющая смысл корреляционного радиуса, связана с $\lambda_i(s)$ соотношением [4]:

$$\frac{2}{\lambda_c(s)} = \frac{1}{\lambda_0(s)\, p_1(s)} + \frac{1}{\lambda_1(s)\, p_0(s)}, \tag{7}$$

которое в случае однородной статистики приобретает вид

$$\frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1}. \tag{8}$$

Наконец, в случае однородной статистики длины отрезков в каждой компоненте смеси распределены экспоненциально со средним $\lambda_i$ [4].

Воспользуемся данным статистическим описанием в решении проблемы переноса излучения и для начала рассмотрим чисто поглощающую ($\sigma_s = 0$) систему, для которой уравнение (1) сводится к виду

$$\frac{dI(s)}{ds} + \sigma(s)\, I(s) = S(s). \tag{9}$$

Обозначим поверхностную точку $\mathbf{r}_s$ через $s = 0$, тогда граничное условие для уравнения (9), в общем случае определяемое уравнением (3), приобретает вид

$$I(0) = \Gamma. \tag{10}$$

Вандерхаеген указал [5], что проблема транспорта в форме уравнений (9) и (10) может быть решена точно, если предположить марковскую статистику, заданную уравнением (4). Он заметил, что уравнения (9) и (10) можно рассматривать как своего рода задачу о начальных значениях, в которой в роли времени выступает пространственная координата $s$. Если смесь считается марковской, то стохастическая проблема переноса приобретает форму совместного марковского процесса, к которому применимо уравнение Лиувилля. Для бинарной дискретной статистики, рассматриваемой здесь, исходное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial P_i}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial I}[(\sigma_i I - S_i)\, P_i] = \frac{P_j}{\lambda_j} - \frac{P_i}{\lambda_i}, \quad j \neq i. \tag{11}$$

Здесь $P_i(I, s)$ определено таким образом, что $P_i\, dI$ есть вероятность того, что компонента $i$ находится в точке $s$, а случайное решение лежит между $I$ и $I + dI$. Граничные условия для уравнения (11) задаются с помощью формул

$$P_i[I, 0] = p_i(0)\, \delta(I - \Gamma), \tag{12}$$

которые выражают безусловность существования решения при $s = 0$. Связь между объемной долей $p_i(s)$ и величиной $P_i(I, s)$ выражается формулой

$$p_i(s) = \int_0^\infty dI\, P_i(I, s), \tag{13}$$

вытекающей из определений для $p_i(s)$ и $P_i(I, s)$.

Определим $I_i(s)$ как условную среднюю по ансамблю интенсивность $I$, при условии, что точка $s$ находится в компоненте $i$; тогда на основании определения для $P_i(I, s)$ имеем

$$p_i(s)\, I_i(s) = \int_0^\infty dI\, I\, P_i(I, s). \tag{14}$$

Далее получаем, что

$$\langle I(s) \rangle = p_0(s)\, I_0(s) + p_1(s)\, I_1(s), \tag{15}$$

где $\langle I(s) \rangle$ – полная, безусловная, средняя по ансамблю интенсивность. Умножая уравнение (11) на $I$ и интегрируя по частям в интервале $0 < I < \infty$, получим

$$\frac{d(p_i I_i)}{ds} + \sigma_i\, p_i\, I_i = p_i\, S_i + \frac{p_j I_j}{\lambda_j} - \frac{p_i I_i}{\lambda_i}, \quad j \neq i. \tag{16}$$

Данная система двух уравнений для $I_0$ и $I_1$ имеет граничные условия

$$I_0(0) = I_1(0) = \Gamma. \tag{17}$$

Уравнения (15)–(17) полно и точно описывают $\langle I(s) \rangle$ в случае чисто поглощающей, бинарной марковской смеси, рассматриваемой здесь. Аналогичные результаты можно получить для стохастических моментов интенсивности более высокого порядка, например дисперсии [6].

В случае стохастического переноса излучения в марковской смеси с рассеянием, уравнение Лиувилля является приближенным; тем не менее с его помощью можно построить удобную и простую, хотя и приближенную, модель переноса частиц в марковской стохастической смеси [7]. Если первоначальным уравнением переноса является уравнение (1), то подобная модель возникает при анализе интегрального члена, отвечающего за рассеяние в уравнении (1), тем же способом, что и при источнике излучения $S$. В результате получаем два уравнения

$$\mathbf{\Omega}\cdot\nabla(p_i I_i) + \sigma_i\, p_i\, I_i = p_i\, S_i + \sigma_{si} \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'\, f_i(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{\Omega}')\, p_i\, I_i(\mathbf{\Omega}') + \frac{p_j I_j}{\lambda_j} - \frac{p_i I_i}{\lambda_i},$$

$$j \neq i, \tag{18}$$

а $\langle I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) \rangle$ выражается формулой

$$\langle I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) \rangle = p_0(\mathbf{r})\, I_0(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) + p_1(\mathbf{r})\, I_1(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}). \tag{19}$$

Уравнения (18) и (19), лежащие в основе приближенной модели, были также получены и другими способами. Один из них состоит в использовании стохастических балансных методов, т.е. во введении приближенного замыкания для установления связи между средней по ансамблю на границе раздела и $I_i$ [8]. Два других, предложенных Сахни, имеют в своей основе элементы анализа реакторного шума [9] и строятся на предположении, что последующие траектории фотонов не зависят от предыдущих [10]. Наконец, известен метод Титова [1], и он будет рассмотрен в следующей части.

### 3. Модель Титова

В работе Титова [1] для решения рассматриваемой здесь стохастической проблемы переноса вводится формализм, основанный на интегральном уравнении, в специальном случае пренебрежимо слабого излучения ($S = 0$) и абсолютно прозрачного ясного неба ($\sigma_0 = \sigma_{s0} = 0$). Здесь индекс $i = 0$ обозначает ясное небо, и индекс $i = 1$ – облачность. Модель Титова определяется уравнениями

$$\langle I(s) \rangle + \int_0^s ds'\, C_1\, p_1(s')\, I_1(s') = \Gamma; \tag{20}$$

$$p_1(s)\,I_1(s)+\int\limits_0^s ds'\,P_{11}(s',s)\,C_1\,p_1(s')\,I_1(s')=p_1\,\Gamma, \qquad (21)$$

где $s$ – пространственная координата в направлении $\mathbf{\Omega}$ (такая, что $\mathbf{\Omega}\cdot\nabla = d/ds$); $C_1$ – оператор столкновений, определяемый формулой

$$C_1(p_1\,I_1)=\sigma_1\,p_1\,I_1-\sigma_{s1}\int\limits_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'\,f_1(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{\Omega}')\,p_1\,I_1(\mathbf{\Omega}'). \qquad (22)$$

Уравнения (20) и (21) получены Титовым в предположении марковости как самой смеси, так и процесса переноса. Поверхность системы выбрана так, чтобы $s = 0$, а $\Gamma$ обозначает интенсивность приходящей радиации в этой точке. Величина $P_{ij}(s', s)$, входящая в уравнение (21) со значениями $i = j = 1$, имеет смысл условной вероятности того, что точка $s$ находится в компоненте $j$ смеси, при условии, что $s'$ располагается в компоненте $i$. В случае марковской статистики $P_{ij}(s', s)$ удовлетворяют уравнениям Чэпмена–Колмогорова [4]:

$$\frac{\partial P_{ii}}{\partial s}=\frac{P_{ij}}{\lambda_j}-\frac{P_{ii}}{\lambda_i},\quad \frac{\partial P_{ij}}{\partial s}=\frac{P_{ii}}{\lambda_i}-\frac{P_{ij}}{\lambda_j},\quad j\neq i, \qquad (23)$$

с граничными условиями

$$P_{ii}(s', s') = 1;\quad P_{ij}(s', s') = 0,\quad j \neq i. \qquad (24)$$

Согласно этому определению

$$P_{ii} + P_{ij} = 1,\quad j \neq i. \qquad (25)$$

Преобразуем интегральную модель Титова (см. уравнения (20) и (21)) в эквивалентную дифференциальную форму и покажем, что в этой форме (и в случае, если $S_i = \sigma_0 = \sigma_{s0} = 0$) она идентична модели, основанной на кинетической теории и введенной в предыдущей части с помощью уравнений (17) и (18). Вычитая из уравнения (20) уравнение (21) и подставляя в него уравнение (19), получаем

$$p_0(s)\,I_0(s)+\int\limits_0^s ds'\,P_{10}(s',s)\,C_1\,p_1(s')\,I_1(s')=p_0(s)\,\Gamma, \qquad (26)$$

где нами использовано свойство $p_0 + p_1 = P_{10} + P_{11} = 1$. Продифференцировав (20) и (21) и воспользовавшись уравнением (24), приходим к соотношениям

$$\frac{d\langle(s)\rangle}{ds}+C_1\,p_1(s)\,I_1(s)=0, \qquad (27)$$

$$\frac{d[p_1(s)\,I_1(s)]}{ds}+C_1\,p_1(s)\,I_1(s)+\int\limits_0^s ds'\,\frac{\partial P_{11}(s',s)}{\partial s}\,C_1\,p_1(s')\,I_1(s')=$$

$$=\frac{dp_1(s)}{ds}\,\Gamma. \qquad (28)$$

Далее, используя первое уравнение системы (23) для значений $i = 1$ и $j = 0$, перепишем уравнение (28) в виде

$$\frac{d[p_1(s)\,I_1(s)]}{ds}+C_1\,p_1(s)\,I_1(s)-$$

$$-\frac{1}{\lambda_1(s)}\int\limits_0^s ds'\,P_{11}(s',s)\,C_1\,p_1(s')\,I_1(s')+$$

$$+\frac{1}{\lambda_0(s)}\int\limits_0^s ds'\,P_{10}(s',s)\,C_1\,p_1(s')\,I_1(s')=\frac{dp_1(s)}{ds}\,\Gamma. \qquad (29)$$

С помощью уравнений (21) и (26) можно исключить интегральные члены из уравнения (29) и придать ему форму

$$\frac{d[p_1(s)\,I_1(s)]}{ds}+C_1\,p_1(s)\,I_1(s)=\frac{p_0(s)}{\lambda_0(s)}\,I_0(s)-\frac{p_1(s)}{\lambda_1(s)}\,I_1(s)+$$

$$+\left[\frac{dp_1(s)}{ds}+\frac{p_1(s)}{\lambda_1(s)}-\frac{p_0(s)}{\lambda_0(s)}\right]\Gamma. \qquad (30)$$

Воспользовавшись уравнением (15) при значениях $i = 1$ и $j = 0$, можно упростить уравнение (30) до следующего вида:

$$\frac{d[p_1(s)\,I_1(s)]}{ds}+C_1\,p_1(s)\,I_1(s)=\frac{p_0(s)}{\lambda_0(s)}\,I_0(s)-\frac{p_1(s)}{\lambda_1(s)}\,I_1(s). \qquad (31)$$

Наконец, вычтя (31) из (27), получаем

$$\frac{d[p_0(s)\,I_0(s)]}{ds}=\frac{p_1(s)}{\lambda_1(s)}\,I_1(s)-\frac{p_0(s)}{\lambda_0(s)}\,I_0(s). \qquad (32)$$

Уравнения (31) и (32) являются конечным результатом наших алгебраических преобразований и по содержанию полностью эквивалентны интегральным уравнениям Титова (20) и (21), если их дополнить тождеством

$$\langle I(s)\rangle = p_0(s)\,I_0(s) + p_1(s)\,I_1(s) \qquad (33)$$

и начальными условиями

$$I_0(0) = I_1(0) = \Gamma. \qquad (34)$$

После подстановки уравнения (22), определяющего $C_1$, в уравнения (31) и (32) и принимая во внимание, что $d/ds = \mathbf{\Omega}\cdot\nabla$, приходим к заключению, что модель, разработанная Титовым для особого случая прозрачного ясного неба в отсутствии излучения ($S_i = \sigma_0 = \sigma_{s0} = 0$), идентична марковской модели, определяемой уравнением (18) и основанной на кинетической теории.

### 4. Упрощения и обобщения

Приближенная модель, описываемая уравнением (18), может быть упрощена путем введения дальнейших приближений. Большинство работ в этом направлении ограничены случаем изотропной статистики [$\lambda_i \neq \lambda_i(\mathbf{\Omega})$] и изотропного рассеяния ($4\pi f_i = 1$). Для случая изотропного рассеяния уравнение (18) сводится к виду

$$\mathbf{\Omega}\cdot\nabla(p_i I_1)+\sigma_i p_i I_i=p_i S_i+\frac{\sigma_{si}}{4\pi}\int\limits_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'\,p_i I_i(\mathbf{\Omega}')+\frac{p_j I_j}{\lambda_j}-\frac{p_i I_i}{\lambda_i},\, j\neq i. \qquad (35)$$

Если предположить, что один, либо оба, $\lambda_i$ в уравнении (35) малы (и поэтому $\lambda_c$ тоже мал), то в результате простого асимптотического анализа [11] мы получим ожидаемый результат, известный как предел атомарной смеси:

$$\mathbf{\Omega}\cdot\nabla \langle I\rangle + \langle\sigma\rangle \langle I\rangle = \langle S\rangle + \frac{\langle\sigma_s\rangle}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' \langle I(\mathbf{\Omega}')\rangle, \tag{36}$$

где

$$\langle\sigma\rangle = p_0\,\sigma_0 + p_1\,\sigma_1\,, \tag{37}$$

а $\langle\sigma_s\rangle$ и $\langle S\rangle$ выражаются аналогично. Второй асимптотический предел, рассмотренный в литературе [11], соответствует случаю небольшого количества вещества с большим сечением, смешанного с большим количеством вещества с маленьким сечением. В этом случае в результате преобразований получается ренормированное уравнение переноса вида

$$\mathbf{\Omega}\cdot\nabla \langle I\rangle + \sigma_{eff}\langle I\rangle = S_{eff} + \frac{\langle\sigma_{s,eff}\rangle}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' \langle I(\mathbf{\Omega}')\rangle, \tag{38}$$

где $S_{eff}$, $\sigma_{eff}$, и $\sigma_{s,eff}$ – эффективный источник и эффективные сечения, приближенно учитывающие стохастичность задачи. Эти эффективные параметры явно выражаются через $S_i$, $\sigma_i$, $\sigma_{si}$ и $\lambda_i$, но в целях экономии места здесь эти выражения не приводятся. Тем не менее в подтверждение правильности данного асимптотического подхода подчеркнем, что данные эффективные параметры везде неотрицательны, даже вдали от рассматриваемого здесь асимптотического предела.

В ряде работ рассмотрен еще один асимптотический предел, в котором уравнение (35) сводится к диффузионной модели стохастического переноса излучения. В первой из этих работ [11] величины $\sigma_{ai} = \sigma_i - \sigma_{si}$ и $S_i$ в уравнении (35) масштабируются как $O(\varepsilon^2)$, где $\varepsilon$ – формальный параметр малости, а градиентный член масштабируется как $O(\varepsilon)$. Величины $\lambda_i$ не масштабируются и поэтому берутся как $O(1)$. В результате преобразований получается система двух уравнений диффузии для плотностей энергии $E_i$ (интеграл $I_i$ по углу, деленный на скорость света). В более поздней работе [12] этот анализ обобщается на случай различного масштабирования $\lambda_i$. В зависимости от задаваемого вида масштабирования получается либо система двух связанных уравнений диффузии для $E_i$, либо одно уравнение диффузии для средней по ансамблю плотности энергии $<E>$. В качестве дальнейшего обобщения в работе [13] были получены асимптотические диффузионные модели в случае анизотропной статистики и независимого масштабирования двух $\lambda_i$.

В литературе сообщалось и о других диффузионных описаниях, соответствующих уравнению (35). Среди них – аппроксимации сферических гармоник $P_1$ и $P_2$ [14]; диффузионная модель, основанная на дискретных модах Кейса транспортной теории [14], и диффузионные теории с ограничением по потоку [15, 16]. Ограничение по потоку означает, что, благодаря нелинейности коэффициента диффузии, в законе диффузии Фика поток радиации никогда не превосходит произведения плотности энергии радиации на скорость света, вне зависимости от величины пространственных градиентов.

Все предлагаемые выше упрощения касаются основной транспортной модели, основанной либо на уравнении (18), либо на уравнении (35) в случае изотропного рассеяния, оба из которых сами являются приближенными. Кроме этого, для исследования проблемы стохастического переноса в марковском приближении в литературе предлагаются модели, построенные на более точных, но и более сложных уравнениях, чем уравнения (18) и (35). Все они основаны на *точном* стохастическом уравнении баланса, которое при изотропном рассеянии имеет вид [8]:

$$\mathbf{\Omega}\cdot\nabla(p_i I_i) + \sigma_i p_i I_i = p_i S_i + \frac{\sigma_{si}}{4\pi}\int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'\, p_i I_i(\mathbf{\Omega}') + \frac{p_j \overline{I}_j}{\lambda_j} - \frac{p_i \overline{I}_i}{\lambda_i}, j \neq i. \tag{39}$$

Эти два уравнения (при $i = 0$ и $i = 1$) не замкнуты, так как содержат четыре неизвестных, а именно $I_i$, имеющих тот же смысл, что и выше, а также $\overline{I}_i$, имеющих смысл средних по ансамблю интенсивностей при условии, что точка **r** находится на границе раздела, причем материал $i$ расположен слева от границы (вектор $\mathbf{\Omega}$ направлен слева направо). Таким образом, для использования системы (39) необходимо сделать ее замкнутой. Простейшее из предложенных замыканий [8] состоит в использовании равенства

$$\overline{I}_i = I_i. \tag{40}$$

В результате этого (приближенного) замыкания уравнение (39) становится идентичным уравнению (35), полученному с помощью исходного уравнения Лиувилля. Отметим, что данное замыкание является точным при решении марковских задач с чистым поглощением ($\sigma_{si} = 0$).

Для дальнейшего повышения точности уравнения (35) были предложены еще несколько замыканий. Два из них заключаются во введении вместо уравнения (40) алгебраических выражений [17,18]:

$$\overline{I}_i = \alpha I_i \tag{41}$$

либо

$$\overline{I}_i = \beta I_i + \gamma E_i, \tag{42}$$

где $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ относительно просто выражаются в явном виде. Качественно эти два замыкания отличаются тем, что в уравнении (42) различные направления смешиваются в слагаемом, содержащем плотность энергии $E_i$, в то время как в уравнении (41) такого смешения нет. В случае чистого поглощения ($\sigma_{si} = 0$) $\alpha = \beta = 1$ и $\gamma = 0$, и поэтому данные замыкания трансформируются в уравнение (40) и, значит, становятся точными. Предлагаются еще два замыкания, заключающиеся в использовании дополнительных уравнений переноса для $\overline{I}_i$ [19,20]. Таким образом, эти две модели представляют собой систему четырех уравнений переноса для четырех неизвестных: $I_0$, $I_1$, $\overline{I}_0$ и $\overline{I}_1$. Как таковые, эти модели достаточно сложны, но и наиболее точны. Детально эти модели здесь обсуждать не будем, а лишь отметим, что обе они являются точными в случае чистого поглощения ($\sigma_{si} = 0$).

В заключение этой части кратко рассмотрим несколько случаев немарковской статистики смеси. Все модели стохастического переноса, рассмотренные к настоящему моменту в данной статье, строятся на предположении о том, что статистика смеси описывается марковским процессом. Как указывалось в части 2, однородная марковская статистика соответствует экспоненциальному распределению облаков и межоблачных промежутков по размерам.

В более реальном случае немарковского распределения для построения точной модели и решения задачи с чистым поглощением можно использовать теорию обновления [4,21,22]. В этом случае в качестве основной модели процесса переноса используется интегральное, а не дифференциальное уравнение переноса. Модель, основанная на теории обновления, содержит систему четырех интегральных уравнений, решением которой является средняя по ансамблю интенсивность $\langle I \rangle$. Можно показать [22], что для марковской статистики эти четыре интегральные уравнения эквивалентны двум дифференциальным уравнениям (16).

При наличии рассеяния можно построить приближенную модель для немарковской статистики, если для анализа интегрального члена, отвечающего за рассеяние, использовать тот же метод, что и для случая с источником излучения $S$ в уравнениях возобновления. Это тот же подход, что был использован для введения рассеяния в уравнение (16), полученное из исходного уравнения Лиувилля для случая чистого поглощения, которое в результате привело к уравнению (18), как к марковской модели с рассеянием.

Был предложен и второй подход к работе с немарковской статистикой смеси при исследовании стохастического переноса [23]. Эта модель строится на марковской модели в форме уравнения (18), в котором длина марковского перехода $\lambda_{i,eff}$ заменена на эффективный параметр:

$$\lambda_{i,eff} = q\,\lambda_i. \tag{43}$$

Коэффициент $q$ не имеет индекса $i$ и изменяется в диапазоне $0 < q \le 1$, причем значение $q = 1$ соответствует случаю марковской статистики. Он определяется путем решения уравнений обновления для случая чистого поглощения. Было показано, что если в уравнении (18) подставить $\sigma_{si} = 0$ и заменить $\lambda_i$ на $q\lambda_i$, то при некоторых $q$ из него можно получить и правильную среднюю длину свободного пробега фотона, и правильное решение при глубинном режиме. Данная модель для немарковской статистики особенно привлекательна своей простотой, ибо, в сравнении с более сложной системой четырех интегральных уравнений теории обновления, она построена на системе двух уравнений переноса в форме (18).

## 5. Заключение

В данной статье мы представили краткий обзор моделей, основанных на кинетической теории и описывающих транспорт частиц и перенос излучения в дискретной стохастической смеси с двумя состояниями. Эти модели обеспечивают один путь подхода к решению проблемы взаимодействия облако–радиация, состоящий в представлении облаков и ясного неба в качестве двух компонентов стохастической смеси. Мы подробно показали, что модель Титова, построенная на интегральном уравнении и описывающая перенос излучения в поле разорванной облачности, эквивалентна одной из дифференциальных моделей из кинетической теории. В лице Георгия Титова данное научное направление потеряло ярчайшего сподвижника, но в наших сердцах навсегда останется то многое, что он сделал, и то великое, кем он был. Нам всем будет недоставать Георгия и той огромной теплоты, коей он обладал.

Автор глубоко признателен Евгению Касьянову за приглашение участвовать в создании этого специального выпуска, посвященного памяти Георгия Титова.


1. *Titov G.A.*// J. Atmos. Sci. 1990. V. 47. P. 24–48.
2. *Pomraning G.C.* Transport theory in discrete stochastic mixtures// Advances in Nuclear Science and Technology. 1996. V. 24. P. 47–93. Plenum Press, New York.
3. *Pomraning G.C.*// Trans. Th. Statist. Phys. 1998 (in press).
4. *Pomraning G.C.*// J. Quant. Specrtosc. Radiat. Transfer. 1989. V. 42. P. 279–293.
5. *Vanderhaegen D.*// J. Quant. Specrtosc. Radiat. Transfer. 1986. V. 36. P. 557–561.
6. *Pomraning G.C.*// J. Quant. Specrtosc. Radiat. Transfer. 1996. V. 56. P. 629–646.
7. *Pomraning G.C., Levermore C.D., Wong J.* Transport theory in binary statistical mixtures // Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. 1989. V. 115. P. 1–35. Dekker, New York.
8. *Adams M.L., Larsen E.W., Pomraning G.C.*// J. Quant. Specrtosc. Radiat. Transfer. 1989. V. 42. P. 253–266.
9. *Sahni D.C.* // Ann. Nucl. Energy. 1989. V. 42. P. 253–266.
10. *Sahni D.C.* // J. Math. Phys. 1989. V. 30. P. 1554–1559.
11. *Malvagi F., Levermore C.D., Pomraning G.C.* // Trans. Th. Statist. Phys. 1989. V. 18. P. 287–312.
12. *Sammartino M., Malvagi F., Pomraning G.C.* // J. Math. Phys. 1992. V. 33. P. 1480–1501.
13. *Pomraning G.C.* // Ann. Nucl. Energy. 1992. V. 19. P. 737–763.
14. *Su B., Pomraning G.C.* // Ann. Nucl. Sci. Eng. 1995. V. 120. P. 75–90.
15. *Sammartino M., Pomraning G.C.* // J. Quant. Specrtosc. Radiat. Transfer. 1991. V. 46. P. 237–249.
16. *Sammartino M.* // J. Quant. Specrtosc. Radiat. Transfer. 1995. V. 54. P. 637–649.
17. *Su B., Pomraning G.C.*// J. Quant. Specrtosc. Radiat. Transfer. 1994. V. 51. P. 893–912.
18. *Pomraning G.C., Su B.* A closure for stochastic transport equations // Proc. International Conf. on Reactor Physics and Reactor Computations. 1994. P. 672–679. Ben-Gurion University of the Negev Press. Israel.
19. *Pomraning G.C.* // J. Quant. Specrtosc. Radiat. Transfer. 1991. V. 46. P. 221–236.
20. *Su B., Pomraning G.C.* // J. Quant. Specrtosc. Radiat. Transfer. 1995. V. 54. P. 779–801.
21. *Vanderhaegen D.* // J. Quant. Specrtosc. Radiat. Transfer. 1988. V. 39. P. 333–337.
22. *Pomraning G.C.*// J. Quant. Specrtosc. Radiat. Transfer. 1997. V. 57. P. 295–307.
23. *Levermore C.D., Pomraning G.C., Wong J.* // J. Math. Phys. 1988. V. 29. P. 995–1004.


*G.C. Pomraning.* **Cloud-radiation Interactions: the Titov and other Models.**

We discuss the treatment of radiative transfer through a two-component discrete stochastic mixture. A broken cloud field can be modeled as such a stochastic mixture, with the clouds and clear sky representing the two components. The integral equation approach of Titov for a Markovian mixture is shown to be equivalent to a differential model introduced in the kinetic theory literature. Simplifications and extensions of this model are also discussed. The simplifications include a renormalized equation of transfer, as well as various diffusive models. The extensions involve more accurate descriptions utilizing additional radiative transfer equations, as well as allowance for non-Markovian mixing statistics.