«Оптика атмосферы и океана», **12,** № 8 (1999)

АДАПТИВНАЯ ОПТИКА

УДК 535.416.3

Ю.Н. Исаев, Е.В. Захарова

КРИТЕРИИ ЭФФЕКТИВНОСТИ АДАПТИВНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ БАЗИСАХ РАЗЛОЖЕНИЯ ФАЗЫ СЛУЧАЙНОЙ ВОЛНЫ

Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск

Поступила в редакцию 12.01.99 г. Принята к печати 21.06.99 г.

Исследуется представление фазы случайной волны в различных базисах: ортогональные функции Карунена–Лоэва–Обухова, полиномы Цернике, дискретные функции Уолша и вэйвлеты Хаара. Приводятся критерии качества адаптивной оптической системы, определяющие ее потенциальную эффективность, такие как ошибка фазовой коррекции и параметр Штреля.

При распространении электромагнитной волны в атмосфере происходит искажение фазы, связанное с прохождением через случайно-неоднородную среду. Анализ пространственной модуляции фазы позволяет извлечь информацию о важных параметрах среды распространения. Пространственная модуляция фазы волны приводит к изменению других параметров излучения, в частности интенсивности. Такое воздействие фазы может быть эффективно использовано для улучшения энергетических параметров излучаемой волны, что широко используется в методах адаптивной компенсации оптических сигналов. На основании информации об искажении фазы можно осуществить оптимизацию критериев качества функционирования адаптивной оптической системы (АОС).

Фаза принимаемого или формируемого сигнала представляет собой сложный математический объект исследования, и для удобства анализа ее представляют в виде разложения по ортогональным функциям, выбор которых определяется целью задачи. Минимальную ошибку разложения случайной фазы для заданного числа мод дает базис Карунена–Лоэва–Обухова (КЛО) [1] и поэтому его использование является оптимальным при представлении фазы случайной волны. К сожалению, оптимальный базис КЛО имеет сложную аналитическую форму, поэтому вместо оптимального часто используют близкий к нему базис Цернике [2, 3]. Для сокращения времени обработки данных удобно использовать базисы, обладающие свойствами быстрых преобразований, такие как базисы Уолша и Хаара [4]. Эффективный метод преобразования коэффициентов разложения фазы случайной волны в произвольном ортонормированном базисе в коэффициенты разложения в оптимальном базисе КЛО разработан авторами [5–8]. В настоящей работе представлены критерии эффективности АОС для различных базисов разложения случайной фазы и приводятся результаты численного эксперимента, позволяющие оценить эффективность использования данных базисов.

При модальной компенсации искажений волнового фронта в системах адаптивной оптики фазу волны $S(\rho)$ представляют в виде разложения по ортонормированным функциям $\varphi_k(\rho)$ $(\rho = \{x, y\} = \{\rho, \theta\})$:

$$S(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(\rho). \qquad (1)$$

В частности, фазу волны, прошедшей случайно-неоднородную среду, часто представляют в виде разложения по полиномам Цернике $Z_k(\rho)$ [2]. Преимущество данного базиса заключается в простоте аналитического представления и в относительной простоте реализации нескольких первых мод, совпадающих с классическими аберрациями, в виде корректирующих устройств АОС. Следует заметить, что данное разложение не оптимально в статистическом смысле, что проявляется в корреляции коэффициентов разложения. Из-за сложности аналитических вычислений статистических оценок часто пренебрегают корреляцией коэффициентов разложения [2, 3, 9], тем самым снижая точность расчетов. Удобнее в этом смысле использовать статистически оптимальный базис КЛО, для которого норма ошибки разложения фазы, усредненная по ансамблю реализаций, минимальна при удержании заданного числа членов в бесконечном ряде разложения и отсутствует корреляция коэффициентов разложения [1], что значительно упрощает последующее использование результатов разложения и их анализ.

Для определения степени совершенства базиса, используемого в качестве корректирующего устройства, существует остаточная ошибка коррекции волнового фронта

$$\varepsilon(\rho) = S(\rho) - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k(\rho), \qquad (2)$$

представляющая собой случайную функцию координат, в которой из распределения фазы последовательно устраняются N первых аберраций. Второй момент ошибки коррекции $\varepsilon(\rho)$ представляет собой распределение дисперсии фазовой ошибки по апертуре $\sigma^2(\rho)$, которое является мерой точности аппроксимации случайной фазы в ортонормированном базисе $\varphi_k(\rho)$. Считая компенсацию N первых мод полной, подставим в выражение (2) фазу волны $S(\rho)$ в виде (1) и, применяя операцию математического ожидания, получим выражение для дисперсии фазовой ошибки $\sigma^2(\rho)$ [3]:

$$\sigma^2(\rho) = \sum_{i \ge N} \sum_{k \ge N} \alpha_{ik}\, \varphi_i(\rho)\, \varphi_k(\rho), \qquad (3)$$

где α_{ik} – вторые моменты коэффициентов разложения фазы $< a_i a_k >$ или коэффициенты Фурье-разложения корреляционной функции в базисе $\varphi_k(\rho)$.

Приведем профиль $\sigma^2(\rho) = \sigma^2(\rho, 0)$ при фиксированном угле $\theta = 0$ для базиса Цернике

$$\sigma^2(\rho) = \sum_{m=0} \sum_{i \ge N} \sum_{k \ge N} \alpha_{ik}^m R_i^m(\rho)\, R_k^m(\rho) \qquad (4)$$

($R_k^m(\rho)$ – радиальные части полиномов Цернике $Z_j(\rho) = R_k^m(\rho)\exp(im\theta)$).

Коэффициенты α_{ik}^m можно получить, используя выражение [5]:

$$\alpha_{ik}^m = \int_0^R \rho d\rho \int_0^R R_i^m(\rho)\, R_k^m(\rho')\, M_m(\rho, \rho')\, \rho' d\rho', \qquad (5)$$

где R – радиус апертуры;

$$M_m(\rho, \rho') = -\frac{6{,}88\pi}{r_0^{5/3}} \int_0^\infty \frac{J_m(\kappa\rho')\, J_m(\kappa\rho)\, \kappa d\kappa}{\kappa^{11/3}}$$

– для колмогоровской и

$$M_m(\rho,\rho') = -\frac{6{,}88\pi}{r_0^{5/3}} \int_0^\infty \frac{J_m(\kappa\rho')\, J_m(\kappa\rho)\, \kappa d\kappa}{(\kappa^2 + 1/L_0^2)^{11/6}}$$

– для кармановской моделей атмосферы; $J_m(x)$ – функция Бесселя первого рода m-го порядка; L_0 – внешний масштаб турбулентности; r_0 – радиус Фрида.

Для определения дисперсии фазовой ошибки $\sigma^2(\rho)$ в базисе прямоугольных функций Уолша $Wal_k(\rho)$ [4] выражение (3) при $\theta = 0$ можно переписать в виде

$$\sigma^2(\rho) = \sum_{m=0} \sum_{i \ge N} \sum_{k \ge N} \beta_{ik}^m\, Wal_i(\rho^2)\, Wal_k(\rho^2), \qquad (6)$$

где коэффициенты $\{\beta_{ik}^m\} = \mathbf{B}$ есть корреляционная матрица коэффициентов разложения фазы в базисе Уолша. Кроме того, их можно определить из матричного соотношения [6]:

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{A}\, \mathbf{C}\,, \qquad (7)$$

где $\mathbf{A} = \{\alpha_{ik}^m\}$; $\mathbf{C}$ – матрица преобразования из базиса Уолша в базис Цернике; Т – символ транспонирования.

Отметим, что в формуле (6) функции Уолша рассчитываются по ρ^2. Это связано с тем, что функции Уолша определяются как одномерные [4] и для данной задачи конструируется их пространственная форма на круге и учитывается, что площадь элементарной площадки в полярной системе координат равна $\rho d\rho d\theta$. Данное замечание следует учитывать и для вэйвлет-функций Хаара, приводимых ниже.

Для определения дисперсии фазовой ошибки $\sigma^2(\rho)$ в базисе вэйвлетов Хаара $H_k(\rho)$ достаточно в выражении (6) заменить функции $Wal_k(\rho)$ на $H_k(\rho)$, а в (7) заменить $\mathbf{C}$ на матрицу преобразования из базиса Хаара в базис Цернике.

Наиболее компактный вид выражение (3) имеет в оптимальном базисе КЛО, для фиксированного угла $\theta = 0$ оно записывается как

$$\sigma^2(\rho) = \sum_{m=0} \sum_{k \ge N} \lambda_k\, [K_k^m(\rho)]^2, \qquad (8)$$

где $K_k^m(\rho)$ – радиальные части функций КЛО $\Psi_s(\rho) = K_k^m(\rho)\exp(im\theta)$; λ_k – собственные числа матрицы Грама $\mathbf{A}$ при представлении функций КЛО через полиномы Цернике [7, 8]. Собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$ составляют матрицу преобразования коэффициентов разложения фазы из базиса Цернике в базис КЛО, которые позволяют преобразовать уравнение (4) в (8).

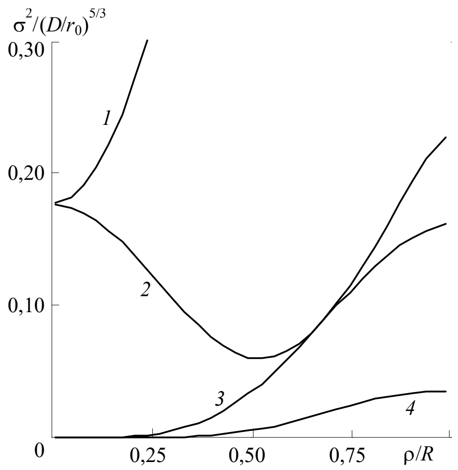

Рис. 1. Распределение дисперсии фазовой ошибки по радиусу апертуры для базиса КЛО: *1* – коррекция средней фазы; *2* – коррекция средней фазы и наклонов; *3* – коррекция первых четырех мод; *4* – коррекция первых шести мод; D – диаметр апертуры

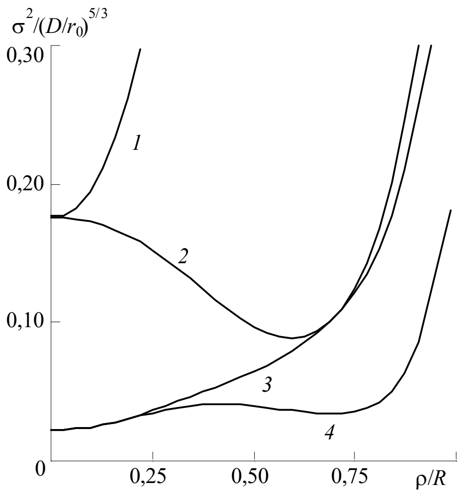

Рис. 2. Распределение дисперсии фазовой ошибки по радиусу апертуры для базиса Цернике: *1* – коррекция средней фазы; *2* – коррекция средней фазы и наклонов; *3* – то же плюс коррекция дефокусировки; *4* – то же плюс коррекция астигматизма

Следует отметить, что другие статистические критерии качества являются функционалами $\sigma^2(\rho)$. В работах авторов [5, 6] приведены матрицы преобразования из произвольного базиса в оптимальный базис КЛО, позволяющие упрощать громоздкие выражения типа (4) и (6), тем самым существенно облегчая как аналитические, так и численные расчеты критериев качества АОС. В качестве иллюстрации на рис. 1, 2 приведен профиль $\sigma^2(\rho)$, рассчитанный по формулам (4), (8) для колмогоровской модели турбулентности при компенсации первых N аберраций.

К недостаткам базиса КЛО можно отнести сложную аналитическую форму и трудности реализации его в корректирующих устройствах. В этом смысле наиболее удобны прямоугольные функции, такие как дискретные функции Уолша или вэйвлеты Хаара [4], относящиеся к типу быстрых преобразований. Обычно коэффициенты разложения фазы определяют из набора локальных наклонов фазы, чему предшествует большая вычислительная работа. Для уменьшения времени сходимости линейного оценочного алгоритма предпочтительными являются алгоритмы быстрых преобразований, что позволяет использовать в обработке специализированные процессоры. На рис. 3, 4 представлен профиль $\sigma^2(\rho)$, рассчитанный по формуле (6) для базиса Уолша и аналогичной формуле для базиса Хаара для колмогоровской модели турбулентности при компенсации первых N аберраций. Поскольку рассматриваемые базисы неоптимальные, то при коррекции приходится учитывать большое количество мод.

Из рис. 1–4 видно, что распределение дисперсии фазовой ошибки по радиусу для базисов прямоугольных функций выше в центре апертуры в отличие от базисов КЛО и Цернике, что объясняется зависимостью функций Уолша и Хаара от ρ^2. Отметим, что для базиса Хаара дисперсия фазовой ошибки несколько лучше, чем для базиса Уолша, поскольку базис Хаара является локальным и имеет большее число степеней свободы. Отметим также, что наименьшую дисперсию фазовой ошибки имеет оптимальный базис КЛО.

Удобным критерием качества многих оптических систем является параметр Штреля St, представляющий собой отношение интенсивности излучения в фокусе реальной системы к интенсивности в системе без искажений [9]. На рис. 5 и 6 показана зависимость St от нормированного диаметра апертуры при коррекции разного числа мод для базисов КЛО и Хаара соответственно. Оценочные расчеты проведены по формуле [3]:

$$\mathrm{St} \approx \exp(-\varepsilon^2),$$

где $\varepsilon^2 = S^{-1}\int\limits_S \sigma^2(\rho)\, d^2\rho$ – средняя по апертуре квадратичная ошибка коррекции; S – площадь апертуры.

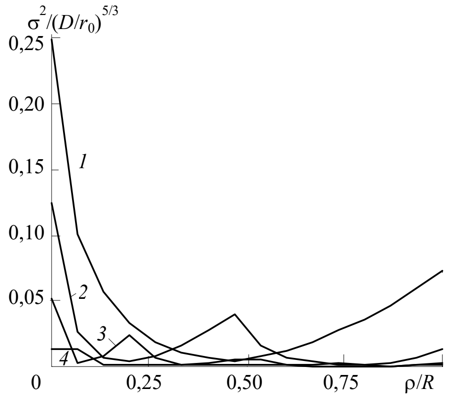

Рис. 3. Распределение дисперсии фазовой ошибки по радиусу апертуры для базиса Хаара при коррекции по всем угловым индексам: *1* – коррекция первой моды; *2* – коррекция двух первых мод; *3* – коррекция первых четырех мод; *4* – коррекция первых восьми мод

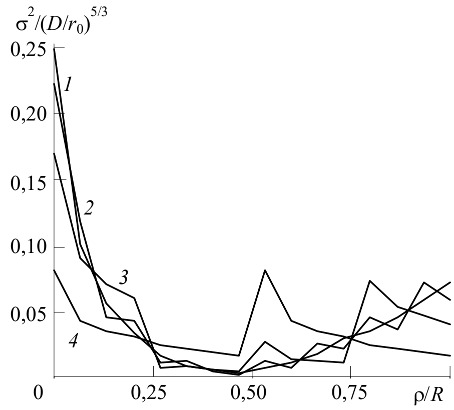

Рис. 4. Распределение дисперсии фазовой ошибки по радиусу апертуры для базиса Уолша при коррекции по всем угловым индексам: *1* – коррекция первой моды; *2* – коррекция двух первых мод; *3* – коррекция первых четырех мод; *4* – коррекция первых восьми мод

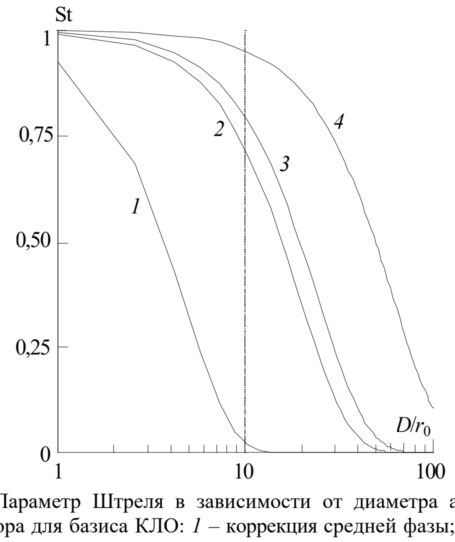

Рис. 5. Параметр Штреля в зависимости от диаметра апертуры корректора для базиса КЛО: *1* – коррекция средней фазы; *2* – коррекция средней фазы и наклонов; *3* – коррекция первых четырех мод; *4* – коррекция первых шести мод

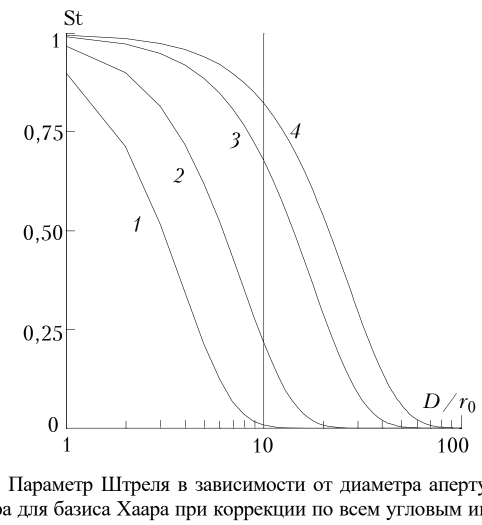

Рис. 6. Параметр Штреля в зависимости от диаметра апертуры корректора для базиса Хаара при коррекции по всем угловым индексам: *1* – коррекция первой моды; *2* – коррекция двух первых мод; *3* – коррекция первых четырех мод; *4* – коррекция первых шести мод

Из рис. 1–6 следует, что в разложениях (4), (6), (8) при заданном числе компенсируемых мод базис КЛО является наилучшим. Что касается временных промежутков вычислительных алгоритмов, то здесь авторы отдают предпочтение базисам Уолша и Хаара, так как преобразования по ним выполняются экономичнее и быстрее даже тогда, когда берется относительно большое число членов разложения.

Из проведенных исследований можно сделать вывод, что рассмотренные базисы имеют взаимоисключающие преимущества, следовательно, нужна возможность перехода из разложения фазы случайной волны в каком-либо одном базисе к разложению в другом, чтобы использовать различные свойства этих базисов для анализа и адаптивного управления волновым фронтом. В частности, если восстановление волнового фронта производится в произвольном базисе, требующем большого количества мод, то достаточно вектор коэффициентов разложения фазы в заданном базисе умножить на матрицу преобразования в базис КЛО. При этом корректирующая система оптимизируется, т.е. комбинации группы мод принимают форму функций КЛО, потенциально подготавливая систему к принятию сигнала, и в дальнейшем одним сигналом управляется группа мод. Таким образом, количество управляющих сигналов сокращается, и нет необходимости строить корректор в самом базисе КЛО, который, заметим, меняется с изменением состояния атмосферы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 96-02-18791, и института «Открытое Общество» (ISSEP), грант № а98-940.

1. *Обухов А.М.* Турбулентность и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1988. 414 с.
2. *Noll R.J.* Zernike polynomials and atmospheric turbulence // J. Opt. Soc. Amer. 1976. V. 66. P. 207–211.
3. *Воронцов М.А., Шмальгаузен В.И.* Принципы адаптивной оптики. М.: Наука, 1985. 336 с.
4. *Залмазон Л.А.* Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применения в управлении, связи и других областях. М.: Наука, 1989. 496 с.
5. *Исаев Ю.Н., Захарова Е.В.* Представление функций Карунена–Лоэва–Обухова в базисах Уолша и Хаара // Оптика атмосферы и океана. 1997. Т. 10. № 8. С. 959–966.
6. *Исаев Ю.Н., Захарова Е.В.* Синтез оптимального базиса для восстановления случайных волновых полей // Оптика атмосферы и океана. 1998. Т. 11. № 5. С. 451–454.
7. *Аксенов В.П., Исаев Ю.Н.* Оптимальное модовое разложение фазы, восстановленной по измерениям наклонов волнового фронта в турбулентной атмосфере. Ч. I. Представление аберраций в базисе Карунена–Лоэва–Обухова // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. № 7. С. 947–954.
8. *Аксенов В.П., Банах В.А., Захарова Е.В., Исаев Ю.Н.* Оптимальное модовое разложение фазы, восстановленной по измерениям наклонов волнового фронта в турбулентной атмосфере. Ч. II. Погрешность алгоритмов и численный эксперимент // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. № 7. С. 955–959.
9. *Wang J.Y.* Phase-compensated optical beam propagation through atmospheric turbulence // Appl. Opt. 1978. V. 17. N 16. P. 2580.

Yu. N. Isaev, E.V. Zakharova. **Performance Critetria of Adaptive Optical Systems for Different Bases of Random Wave Phase Expansion.**

Authors analyze a representation of random wave phase in different bases: the orthogonal Karhunen–Loeve–Obukhov functions, Zernike polynomials, discrete Walsh functions, and Haar wavelets. The performance criteria of adaptive optical system, which determine its potential efficiency, as the phase compensation error and Shtrehl ratio, are presented.