

А.А. Переломова

## Нелинейная динамика направленных акустических волн в стратифицированных жидкостях и газах

Калининградский государственный университет, Россия  
Гданьский технический университет, Гданьск, Польша

Поступила в редакцию 20.09.99 г.

Развит метод разделения полного гидродинамического поля в одномерной задаче на составляющие: движущиеся в разных направлениях и стационарную. Система уравнений расщепляется на три нелинейных уравнения для взаимодействующих компонент. Получены новые выражения слаболинейного взаимодействия для общего вида уточненного уравнения состояния. Рассчитанная нелинейная эволюция направленных составляющих показывает, что волна в жидкости распространяется в нужном направлении даже для больших амплитуд начального возмущения. Решение задачи интересно также в свете широкого класса задач с подобным дисперсионным соотношением. Интегральный дисперсионный оператор, вид которого определяется неоднородностью среды, возникает также в теории волноводного распространения электромагнитных волн.

Направленные и стационарные волны, меняющие температуру (и плотность) фона, меняют также основной показатель преломления и создают движущиеся или стационарные области индуцированного преломления и рассеяния электромагнитных волн оптического диапазона, свойства которых описывает предложенная теория.

### 1. Задача разделения направленных волн и стационарной составляющей в общем гидродинамическом поле

Наиболее известный способ разделения волновых возмущений – это разделение по ветвям дисперсионного соотношения. Таким образом можно разделить акустические и гравитационные волны и волны Россби в газе и жидкости [1–3]. Иногда возникают задачи разделения полного волнового поля по направлению распространения [4]. Эта задача, в свою очередь, имеет много аспектов, например: разделить полное поле в любой момент времени на соответствующие компоненты, оценить долю волновой энергии, приходящейся на каждую компоненту, построить начальные возмущения для конкретного типа возмущения (преимущественного для нелинейной задачи, когда генерируются возмущения и других типов) и, наконец, оценить генерацию среднего поля и взаимное влияние волн разных типов.

Основная идея в рамках линейной теории – это собрать компоненты Фурье-преобразования, соответствующие одинаковым знакам  $\omega$  и  $k$  для бегущей вниз волны и противоположным для бегущей вверх (или левой и правой для однородной среды). Сначала получаем соотношения связи независимых переменных (например,  $p, \rho, v$ ) в  $k$ -представлении и затем собираем их интегралом Фурье. Для стационарной составляющей собираем компоненты  $\omega = 0$ . Таким образом, полное поле линейной задачи разделяется на направленные и стационарные компоненты и выводятся операторы проектирования. Затем проекторы применяются для исследования нелинейной динамики.

### 2. Стратифицированная жидкость в поле силы тяжести

#### 2.1. Дисперсионное соотношение и уравнения связи

Система уравнений гидродинамики хорошо известна: она включает в себя второй закон Ньютона и законы сохранения энергии и массы [1, 2]. Будем пользоваться геометрией задач, принятой в геофизической гидродинамике. Считаем, что на жидкость действует гравитационная сила, вызывающая стратификацию жидкости по плотности:

$$\partial v / \partial t + v \partial v / \partial r = - (1/\rho) \partial p / \partial r - g,$$

$$\partial \varepsilon / \partial t + v \partial \varepsilon / \partial r = (-p/\rho) \partial v / \partial r, \quad (1)$$

$$\partial \rho / \partial t + \partial(\rho v) / \partial r = 0.$$

Наконец, нужно добавить уравнение состояния  $\varepsilon = \varepsilon(p, \rho)$ . В формуле (1)  $r$  – координата;  $t$  – время;  $\rho, p, \varepsilon, v$  – плотность, давление, внутренняя энергия, приходящаяся на единицу массы и скорость соответственно;  $g$  – ускорение свободного падения. В общем случае требуется выразить внутреннюю энергию в переменных  $(p, \rho)$ . Для любой жидкости или газа, в том числе стратифицированных, раскладываем возмущение внутренней энергии в ряд Тейлора по малым возмущениям плотности и давления. Для рассмотрения слаболинейной эволюции достаточно провести разложение до возмущений второго порядка малости:

$$\rho_0(\varepsilon - \varepsilon_0) = A(p - p_0) + B(\rho - \rho_0) + A_1(p - p_0)^2/\rho_0 + B_1(\rho - \rho_0)^2/\rho_0 + D(p - p_0)(\rho - \rho_0)/\rho_0, \quad (2)$$

$\rho_0, p_0, \varepsilon_0$  – невозмущенные величины.

Предположим, что фоновая плотность экспоненциально стратифицирована:

$$\rho_0(r) = \rho_{00} \exp(-r/h); \quad p_0(r) = p_{00} \exp(-r/h) = \rho_{00} gh \exp(-r/h),$$

где  $\rho_{00}, p_{00}$  – значения на поверхности Земли;  $h$  – высота «однородной» жидкости (газа), характерный масштаб вертикальной неоднородности;  $p_{00} = \rho_{00} gh$  – следствие стационарного решения линейного аналога уравнения (1):  $dp_0(r)/dr = -\rho_0(r)g$ . Для жидкостей имеется в виду, что  $p_{00}$  – внутреннее давление, а не статическое (т.е. атмосферное над жидкостью). Соответствующие компоненты Фурье-разложения для возмущений в экспоненциально стратифицированной среде имеют вид

$$v'(k, t) = v'_0(k) \exp(r/2h) \exp [i(\omega t - kr)] \exp(\alpha r);$$

$$p'(k, t) = p'_0(k) \exp(-r/2h) \exp [i(\omega t - kr)] \exp(\alpha r);$$

$$p'(k, t) = \rho'_0(k) \exp(-r/2h) \exp [i(\omega t - kr)] \exp(\alpha r).$$

Из линейного аналога (1) получаем дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = k^2 [(gh-B)/A] + g^2(A+1)^2/[4A(gh-B)],$$

где  $\alpha = -(Agh+B)/[2h(gh-B)]$  или  $\omega = 0$ . Два знака частоты в решении дисперсионного соотношения и нулевая частота означают три независимых типа волнового движения. Предлагается разделить полное волновое возмущение на три независимые части: распространяющуюся вниз, вверх и стационарную, вводя полную ортогональную систему проекционных операторов. Это удобно с физической точки зрения, поскольку процедура проецирования может быть применена к полю в любой момент времени.

Основные этапы вывода уравнений для направленных волн следующие [4–7]. Сначала из линеаризованной системы (1) следуют уравнения связи Фурье-компонент возмущений

$$\rho'_0 = \rho_{00} v'_0 (ik + 1/2h - \alpha)/(i\omega);$$

$$p'_0 = \rho_{00} v'_0 [B(-ik - 1/2h + \alpha) - gh(-ik + 1/2h + \alpha)]/(Ai\omega).$$

Возмущения гидродинамических переменных и соответствующие им Фурье-образы обозначены штрихами здесь и далее. Затем получаем уравнения связи в переменных  $(r, t)$ , собираем интегралом Фурье соответствующие компоненты: разных знаков  $\omega$  и  $k$  для волн, бегущей вверх, одного знака для волны, бегущей вниз, и  $\omega = 0$  для стационарного вклада. Эта процедура описана детально в [5, 6]. Уравнения связи в переменных  $(r, t)$  имеют вид

$$p_+ = Lv_+; \quad \rho_+ = L2v_+, \quad p_- = -Lv_-; \quad \rho_- = -L2v_-,$$

$$\rho_{\text{stat}} = L3p_{\text{stat}}, \quad (3)$$

где  $\rho_+ = \rho'_{\text{up}} \exp(-r/2h + \alpha r)$ ;  $p_+ = p'_{\text{up}} \exp(-r/2h + \alpha r)$ ;  $v_+ = v'_{\text{up}} \exp(r/2h + \alpha r)$  и так далее. Интегриродифференциальные операторы  $L1, L2, L3$  имеют вид

$$L1 = \rho_{00} \left( \pi \sqrt{(gh-B)/A} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dr' \times$$

$$\times \left\{ -\frac{gh-B}{A} F_{AB}(r'-r) \partial/\partial r' + \frac{g(A-1)}{2A} F_{AB}(r'-r) \right\};$$

$$L2 = \rho_{00} \left( \pi \sqrt{(gh-B)/A} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dr' F_{AB}(r'-r) \left\{ -\partial/\partial r' + \frac{g(A+1)}{2(gh-B)} \right\};$$

$$L3 = (1 - 2\alpha h - 2h\partial/\partial r)/(2gh),$$

где

$$F_{AB}(r) \equiv \frac{2}{\pi} \left\{ I_0[rg(A+1)]/[2(gh-B)] - L_0[rg(A+1)]/[2(gh-B)] \right\};$$

$I_0, L_0$  – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка и функция Струве соответственно. Далее, пользуясь (3), также получаем из первого уравнения системы (1) линейные эволюционные уравнения для волн, направленных вверх и вниз:

$$\partial v_{\pm}/\partial t \pm \sqrt{\frac{gh-B}{\pi^2 A}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ v_{\pm r'} - \frac{g^2(A+1)^2}{4(gh-B)^2} v_{\pm} \right\} F_{AB}(r'-r) dr' = 0. \quad (4)$$

Эволюционные уравнения также можно получить для переменных  $p_{\pm}, \rho_{\pm}$  из второго и третьего уравнений этой системы.

## 2.2. Проекционные операторы

Интегриродифференциальные матричные операторы для динамики идеальной жидкости и газа в рамках линейной теории были получены в [4, 5]. Теперь выписаны новые уравнения с учетом разложения уравнения состояния (2):

$$P_{\pm} = \begin{pmatrix} 1/2 & \pm l1 & \pm l2 \\ \pm L1/2 & L1l1 & L1l2 \\ \pm L2/2 & L2l1 & L2l2 \end{pmatrix}; \quad P_{\text{stat}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & l3 & l4 \\ 0 & L3l3 & L3l4 \end{pmatrix}; \quad (5)$$

$$l1 = 1/(2\rho_{00}\pi \sqrt{(gh-B)/A}) \int_{-\infty}^{\infty} dr' F_{AB}(r'-r) \left\{ -\partial/\partial r' + \frac{g(A+1)}{2(gh-B)} \right\},$$

$$l2 = -g/(2\rho_{00}\pi \sqrt{(gh-B)/A}) \int_{-1}^1 dr' F_{AB}(r'-r),$$

$$l3 = \frac{Ag}{gh-B} \int_{-\infty}^r dr' \exp \left[ (r'-r) \frac{g(A+1)}{2(gh-B)} \right],$$

$$l4 = \frac{g}{A+1} \int_r^{\infty} dr' \exp \left[ -(r'-r) \frac{g(A+1)}{2(gh-B)} \right] - \frac{gA}{A+1} \int_{-\infty}^r dr' \times$$

$$\times \exp \left[ (r'-r) \frac{g(A+1)}{2(gh-B)} \right];$$

$$L1l1 = \frac{1}{2} - \frac{Ag}{2(gh-B)} \int_{-\infty}^r dr' \exp \left[ (r'-r) \frac{g(A+1)}{2(gh-B)} \right],$$

$$L2l2 = \frac{Ag}{2(gh-B)} \int_{-\infty}^r dr' \exp \left[ (r'-r) \frac{g(A+1)}{2(gh-B)} \right];$$

$$L2I1 = \frac{A}{2(gh-B)} - \frac{A(A+1)g}{2(gh-B)^2} \int_{-\infty}^r dr' \exp\left[(r'-r) \frac{g(A+1)}{2(gh-B)}\right];$$

$$L1I2 = -\frac{g}{2(A+1)} \int_r^{\infty} dr' \exp\left[-(r'-r) \frac{g(A+1)}{2(gh-B)}\right] + \frac{gA}{2(A+1)} \times \\ \times \int_{-\infty}^r dr' \exp\left[(r'-r) \frac{g(A+1)}{2(gh-B)}\right];$$

$$L3I3 = -\frac{A}{gh-B} + \frac{Ag(A+1)}{2(gh-B)^2} \int_{-\infty}^r dr' \exp\left[(r'-r) \frac{g(A+1)}{2(gh-B)}\right];$$

$$L3I4 = 1 - \frac{Ag}{(gh-B)} \int_{-\infty}^r dr' \exp\left[(r'-r) \frac{g(A+1)}{2(gh-B)}\right];$$

$L1, L2, L3$  описаны ранее.

Операторы (5) обладают обычными свойствами ортогональных проекционных операторов:  $P_- + P_+ + P_{\text{stat}} = I$ ;  $P_- P_+ = P_- P_{\text{stat}} = \dots = 0$ ;  $P_- P_- = \dots = I$ ;  $I$  – единичная матрица. Чтобы получить распространяющуюся вверх составляющую поля в любой момент времени, достаточно подействовать оператором  $P_+$  на полное поле:

$$P_+ \begin{pmatrix} v'(r, t) \exp(-r/2h + ar) \\ p'(r, t) \exp(r/2h + ar) \\ r'(r, t) \exp(r/2h + ar) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_+(r, t) \\ p_+(r, t) \\ r_+(r, t) \end{pmatrix}.$$

Видно, что операторы зависят только от  $A, B$ . Это следствие линейного разложения плотности энергии: операторы проецирования выводятся из линеаризованной системы уравнений (1). Удобно перейти к новым переменным

$$v'_s = v'(r, t) \exp(-r/2h + ar);$$

$$p'_s = p'(r, t) \exp(r/2h + ar);$$

$$\rho'_s = \rho'(r, t) \exp(r/2h + ar).$$

### 2.3. Нелинейная эволюция направленных волн

Действуя операторами  $P_-, P_+$  на полную систему нелинейных уравнений (1), можно получить новое эволюционное уравнение с учетом взаимодействия волновых компонент. Вначале выпишем правую квадратично-нелинейную часть системы (1) в виде столбца и, далее, действуя матричным проектором ( $P_-$  или  $P_+$ ) на обе части системы (1) с ненулевой нелинейной правой частью, получаем нелинейный аналог эволюционного уравнения (4) с нелинейной правой частью. Новое уравнение для скорости направленных вниз и вверх волн имеет следующий вид:

$$\partial v_{\pm}/\partial t \pm \sqrt{\frac{gh-B}{\pi^2 A}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ v_{\pm} v'_{\pm} - \frac{g^2(A+1)^2}{4(gh-B)^2} v_{\pm} \right\} F_{AB}(r'-r) dr' = \\ = (1/2 \pm l1 \pm l2) \exp[r(\alpha + 1/2h)], \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} -v'_s \left( \frac{\partial}{\partial r} + \alpha + \frac{1}{2h} \right) v'_s + \frac{\rho'_s}{\rho_{00}} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \alpha - \frac{1}{2h} \right) \rho'_s \\ v'_s \left[ \left( -\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2h} - \alpha + \frac{2A1B}{Agh} - A - D \right) p'_s + \frac{DB}{A} - \frac{B-2B1}{Ah} \right] \rho'_s - \\ - \frac{p'_s (2A1c^2 + D - 1) + \rho'_s (B + 2B1 + c^2 D + gh)}{A} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2h} + \alpha \right) v'_s \\ - v'_s \left( \frac{\partial}{\partial r} + \alpha \right) \rho'_s - \rho'_s \left( \frac{\partial}{\partial r} + \alpha \right) v'_s \end{pmatrix}.$$

Здесь  $v'_s, p'_s, \rho'_s$  соответствуют полным волновым возмущениям, включающим волны всех типов. Можно упростить правую часть в зависимости от поставленной задачи. Исследуя «самодействие» бегущей вниз волны, оставляем, например, только ее вклад в  $v'_s, p'_s, \rho'_s$ . Исследуя воздействие другой моды, оставляем только ее вклад, и т.д. Таким же образом решается задача генерации среднего поля волной, бегущей вверх или вниз [4,5].

Были проведены численные эксперименты, показывающие, что амплитуда генерируемых стационарной и направленной вверх составляющих в воде и атмосфере меньше, чем амплитуда исходной бегущей вниз волны даже для больших значений последней.

## 3. Однородная жидкость

Легко теперь перейти к однородной среде как частному случаю стратифицированной.

### 3.1. Дисперсионное соотношение и уравнения связи

В случае однородной среды (жидкости или газа) формулы принимают гораздо более простой вид. Теперь фоновые плотность и давление – просто постоянные, не зависящие от координаты. Соответствующие компоненты Фурье-разложения принимают вид:  $p'(k, t) = p'_0 \exp[i(\omega t - kr)]$ ;  $\rho'(r, t) = \rho'_0 \exp[i(\omega t - kr)]$ ;  $v'(r, t) = v'_0 \exp[i(\omega t - kr)]$ , где  $p'_0, \rho'_0, v'_0$  – постоянные, так же как фоновые значения  $p_0 = \rho_{00}, \rho_0 = \rho_{00}$ . Таким же образом  $\rho'_{\pm} = \pm L2v'_{\pm}$ ;  $p'_{\pm} = \pm L1v'_{\pm}$ . Дисперсионное соотношение имеет вид  $\omega^2 = k^2[(p_0/\rho_0) - B]/A$  или  $\omega = 0$ . Поскольку среда бездисперсионная, то групповая и фазовая скорости

$$c = [(p_0/\rho_0) - B]/A^{1/2}. \quad (7)$$

Выражения для проекционных операторов могут быть получены непосредственно из предыдущих формул переходом:  $h \rightarrow \infty$ ;  $g \rightarrow 0$ ;  $gh \rightarrow p_{00}/\rho_{00}$ ;  $\alpha \rightarrow 0$ . Новые операторы являются просто множителями:  $L_1 = \rho_0/c$ ;  $L_2 = \rho_0/c$ ;  $l1 = 0$ ;  $l2 = 1/(2L2)$ ;  $l3 = 1$ ;  $l4 = -L1/L2$ . Имеет место новая связь стационарных переменных:  $p_{\text{stat}} = L\rho_{\text{stat}} = 0$ , так что  $L = 0$ . Выбранный таким образом оператор является обратным по отношению к  $L3$ , и формально можно положить  $L3$  равным бесконечности. Направленные волны для однородной среды естественно назвать правой и левой.

Линейные эволюционные уравнения для правой и левой волн имеют совсем простой вид:  $dv_{\pm}/dt \pm c dv_{\pm}/dr = 0$ ;  $v_{\pm}, p_{\pm}, \rho_{\pm}$  – соответствующие части обычных переменных  $v', p', \rho'$ .

### 3.2. Проекционные операторы

Они обладают обычными свойствами ортогональных операторов и имеют вид

$$P_{\pm} = \begin{pmatrix} 1/2 & \pm l/(2L1) & 0 \\ \pm L1/2 & 1/2 & 0 \\ \pm L2/2 & L2/(2L1) & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{\text{stat}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L2/L1 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 3.3. Нелинейная эволюция правой и левой волн

По схеме, описанной в п. 2.3, получаем эволюционное уравнение для правой и левой волн:

$$dv_{\pm}/dt \pm c dv_{\pm}/dr = (1/2 \pm l(2L1) \ 0).$$

$$\left( \begin{array}{c} -v' \frac{\partial}{\partial r} v' + \frac{\rho'}{\rho_0^2} p' \\ -v' \frac{\partial}{\partial r} p' + \left( \frac{1}{A} \right) \frac{\partial v'}{\partial r} [p'(-1 + D + 2A_1 c^2 \rho_0/p_0) + \\ + p'(p_0/\rho_0 + Dc^2 + 2B_1 + B)] \\ -v' \frac{\partial}{\partial r} p' + p' \frac{\partial}{\partial r} v' \end{array} \right)$$

или для случая самодействия

$$dv_{\pm}/dt \pm c dv_{\pm}/dr + \frac{1+(1-D-2A_1 c^2 \rho_0/p_0)/A-(p_0/\rho_0+Dc^2+2B_1)/c^2}{2} \times \\ \times v_{\pm} dv_{\pm}/dr = 0. \quad (8)$$

## 4. Приложения теории

### 4.1. Динамика жидкости газа

Поскольку выражение для плотности энергии взято в общей форме (линейные коэффициенты разложения  $A$  и  $B$  входят в операторы, нелинейные  $A_1, B_1, D$  – в нелинейный столбец), теория применима к широкому спектру жидкостей и газов. Кроме этих коэффициентов необходимо знать лишь фоновые значения плотности и давления. Для идеального газа известно выражение, описывающее внутреннюю энергию  $\varepsilon = p/[\rho(\gamma - 1)]$ ,  $\gamma = C_p/C_v$ , так что известны вместе с тем и все коэффициенты разложения (2):  $A = 1/(\gamma - 1)$ ;  $B = -p_0/\rho_0(\gamma - 1)$ ;  $A_1 = 0$ ;  $B_1 = -B$ ;  $D = -A$ . Как альтернативный вариант для случая однородной среды используется уравнение  $p/\rho^\gamma = p_0/\rho_0^\gamma$  или

$$p' = c^2 \rho' + \frac{c^2(\gamma - 1)}{2\rho_0} \rho'^2 \quad (9)$$

[8, 9], что дает те же квадратичные нелинейные члены.

Соотношение (9) является следствием

$$\frac{dp/dt}{dp/dt} = \frac{\gamma p}{\rho}, \quad (10)$$

которое само является следствием закона сохранения энергии [второго уравнения системы (1)], выражения для внут-

ренней энергии и уравнения непрерывности [третьего уравнения системы (1)]. Уравнение (9) является следствием (10) только в однородной среде.

Для среды со стратификацией дело обстоит иначе. В экспоненциально стратифицированной среде нужно учесть зависимость фоновых плотности и давления от координаты и пользоваться, например,  $\frac{\partial p'}{\partial t} = c^2 \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{v' p_0 (\gamma - 1)}{h}$  вместо линейного аналога (9)  $p' = c^2 \rho'$ . Здесь  $p_0(r) = p_{00} \exp(-r/h)$ , как определено в п. 2.1. Для другого типа стратификации связь будет другая. Иными словами, связь возмущения плотности и давления для стратифицированной среды перестает быть локальной. Разложение (2) является локальным, поэтому коэффициенты разложения можно использовать в среде любой стратификации.

### 4.2. Однородная жидкость

Подробно рассмотрев выбор уравнения состояния или его замены в идеальном газе, переходим к более сложному случаю жидкости, для которой из справочников доступны только линейные члены разложения (2). Согласно (2)

$$A = \frac{C_p k}{\beta V}, \quad B = -\left(\frac{C_p}{\beta V} - p_0\right)/\rho_0, \quad (11)$$

где  $V$  – молярный объем жидкости;  $\beta = -(\partial \rho/\partial T)_{p=\text{const}}/\rho$ ;  $k = (\partial \rho/\partial p)_{T=\text{const}}/\rho$ .  $A$  и  $B$  есть функции равновесных  $(\rho_0, p_0)$ . Принято пользоваться (9) по аналогии с идеальным газом, причем полагается, что  $\gamma$  есть эмпирически постоянная [8, 9].

На самом деле  $\gamma = (C_p/C_v)/(k\rho_0)$  (это выражение следует из (7) и (11), а также (10), согласно которому  $c = \gamma p_0/\rho_0$  также есть функция плотности и давления. Для воды при температуре 10 °С и атмосферном давлении  $\gamma = 7,22$ , тогда как используют приближение  $\gamma$  постоянной, не зависящей от температуры. В [11], например, принято значение 7,15. Метод разложения внутренней энергии гораздо более точен, так как позволяет получить локальную связь возмущенной плотности и давления в зависимости от фоновых значений. Коэффициенты сжимаемости, теплового расширения и т.д. можно выписать просто из справочника [12].

Однако нелинейные коэффициенты (2) не найдены экспериментально для жидкостей и отсутствуют в справочниках даже для воды. При изучении нелинейной динамики жидкости воспользуемся уравнением (9). Вместо второго уравнения системы (1) и уравнения состояния имеем

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \gamma p_0 \frac{\partial v'}{\partial r} = -v' \frac{\partial p'}{\partial r} - \gamma p' \frac{\partial v'}{\partial r}. \quad (12)$$

Эволюционное уравнение для направленной волны с учетом только самодействия есть в нелинейной акустике газов:

$$dv_{\pm}/dt \pm c dv_{\pm}/dr + \frac{\gamma + 1}{2} v_{\pm} dv_{\pm}/dr = 0. \quad (13)$$

То же уравнение можно получить методом медленно меняющейся амплитуды [8, 9]. Хорошо известно также аналитическое решение (13). Динамика бегущих вниз и вверх волн для некоторых типов возмущений обсуждена в [4, 5, 10]. Волны, распространяющиеся вверх и вниз, сохраняют свои свойства даже для больших начальных ам-

плитуд, например для амплитуды скорости начальных условий около 500 м/с. Начальные возмущения строятся по формулам линейной теории, динамика рассчитывалась по известной нелинейной схеме Лагранжа [4, 5].

### 4.3. Экспоненциально стратифицированная по плотности жидкость

В общем случае, когда имеются все коэффициенты разложения (2), нелинейный столбец выписан в (6). В стратифицированной среде эмпирическим уравнением (9) связи плотности и давления воды для случая адиабатического процесса пользоваться нельзя. На примере идеального газа показано, что связь перестает быть локальной и зависит от стратификации фона. Если бы были известны нелинейные коэффициенты разложения (2), то задача слабонелинейной динамики решалась бы точно. Пока же остается предположить, что для жидкости справедливо уравнение (10). Выпишем эволюционное уравнение для скорости:

$$\begin{aligned} \partial v_{\pm} / \partial t \pm \sqrt{\frac{\gamma gh}{\pi^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ v_{\pm} r' r' - \frac{1}{4h^2} v_{\pm} \right\} F(r-r') dr' = \\ = [1/2 \ 1/(2L1) \ 0] \exp(r/2h) \times \\ \times \begin{pmatrix} -v'_s \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2h} \right) v'_s + \frac{\rho'_s}{\rho_{00}} \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{2h} \right) p'_s \\ -v'_s \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{2h} \right) p'_s - g p'_s \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2h} \right) v'_s \\ -v'_s \left( \frac{\partial}{\partial r} \rho'_s - \rho'_s \frac{\partial}{\partial r} \right) v'_s \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

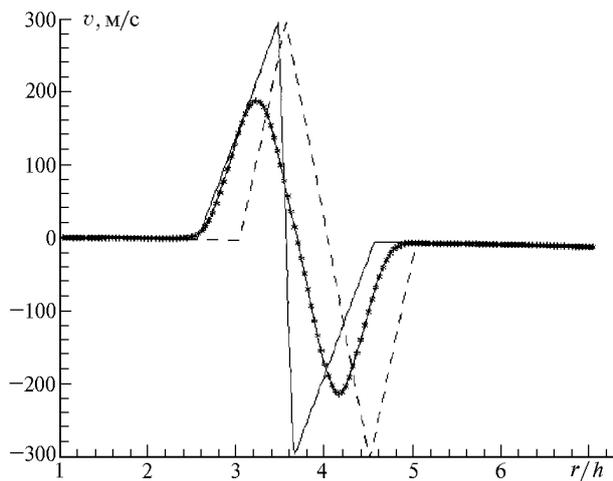


Рис. 1. Нелинейная эволюция пилообразного начального возмущения скорости для волны, распространяющейся в случае однородной и стратифицированной воды: - - - - начальное возмущение; — — — возмущение в однородной воде, 10 с с начала эволюции; \*\*\* — возмущение в стратифицированной воде, 10 с с начала эволюции

Причем согласно (10)  $\alpha = 0$ . Из формул (11), однако, следует, что  $\alpha$  равна нулю только для идеального газа ( $\alpha = 0$  в случае  $B/A = p_0/\rho_0$ ). Для воды при статическом давлении 1 атм и температуре 10°C  $A = 9,604$ ,  $B = -2,061 \cdot 10^7$  Дж/кг,  $\alpha/2h = 0,85$ , т.е. даже в линейном приближении использование (10) значительно занижает амплитуды скорости, давления и плотности. Эта разница вызвана также грубостью использования (10) в качестве замены уравнения состояния (2) и уравнений сохранения энергии и массы [второго и третьего уравнений системы (1)].

### 4.4. Иллюстрации

По формулам (13) и (14) рассчитана линейная и слабонелинейная динамика некоторых типов начальных возмущений в стратифицированной и однородной воде. Приняты значения  $p_0 = 3050,9 \cdot 10^5$  Па;  $\rho_0 = 998,206$  кг/м<sup>3</sup> и  $\gamma = 7,15$  [11, 12]. Рис. 1 представляет слабонелинейную динамику «пилообразного» возмущения скорости в левой волне в случае однородной и стратифицированной атмосферы. Видна роль дисперсии: возмущение уширяется, расплывается. Амплитуда волны в стратифицированной воде уменьшается. Помимо дисперсионного расплывания, это обусловлено еще и тем, что график представлен для скорости, в то время как формулы для направленной волны получены для переменной  $v \cdot \exp(-r/2h + \alpha r)$  (как отмечалось, в приближении (10)  $\alpha = 0$ ). На рис. 2 представлена линейная и слабонелинейная динамика направленной вниз волны скорости в стратифицированной воде с учетом только «самодействия» волны. Максимальная скорость достигает 200 м/с. Через 15 с после начала эволюции заметны характерные нелинейное искажение волны и укрупнение ее заднего фронта.

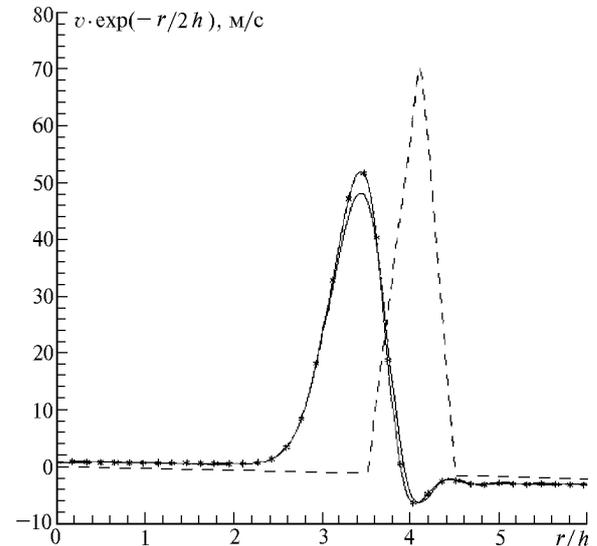


Рис. 2. Линейная и нелинейная эволюция начального возмущения скорости для воды, распространяющейся вниз в случае стратифицированной воды: - - - - начальное возмущение; — — — нелинейное возмущение, 15 с с начала эволюции; \*\*\* — линейное возмущение, 15 с с начала эволюции

## Заключение

Получены проекторы в наиболее общей форме, зависящей только от уравнения состояния, как в однородной, так и в экспоненциально стратифицированной среде. Средой может быть любая невязкая жидкость или газ. Операторы проецирования служат и для исследования задачи нелинейной динамики для разделения волнового поля на компоненты: движущиеся в разных направлениях и стационарную. Вид проекторов зависит от дисперсионного отношения, которое возникает и в задачах «волноводного» распространения электромагнитных волн [13].

Применение проекторов позволяет исследовать задачи «самодействия» отдельных мод и взаимного их влияния, например, генерации среднего поля левой или правой волной. Проекторы применимы в задачах с граничным режимом так же, как и в задачах с начальными условиями.

С помощью проекционных операторов получено уравнение слабонелинейной эволюции направленной моды с учетом только «самодействия» в самой общей форме, зависящей от коэффициентов разложения внутренней энергии.

Направленные волны и стационарная составляющая меняют параметры среды – плотность, давление, соответственно температуру и скорость. Это позволяет

изменять также и оптические свойства среды, в частности основной показатель преломления, и наоборот, по индуцированному изменению оптических свойств среды определять источник, его локализацию и мощность.

1. Монин А.С., Обухов А.М. //Изв. АН СССР. Геофизика. 1958. № 41. С. 1360–1373.
2. Гордин В.А. Математические проблемы гидродинамики в предсказании погоды. Аналитические аспекты. Л.: Гидрометеоиздат, 1987. 256 с.
3. Brekhovskich L.M. and Godin A.O. Acoustics of layered media. Berlin: Springer-Verlag, 1990. 141 p.
4. Переломова А.А. // Изв. РАН. Сер. ФАО. 1993. Т. 29. № 1. С. 47–50.
5. Perelomova A.A. // EAA Symposium. Gdansk-Jurata. 1997. P. 189–194.
6. Brezhnev Yu.V., Leble S.B., Perelomova A.A. // Phys. Express. 1993. N 41. P. 29–37.
7. Leble S.B. Nonlinear waves in waveguides with Stratification. Berlin: Springer-Verlag, 1990. 163 p.
8. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 383 с.
9. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
10. Perelomova A.A. // Acta Acustic. 1988. N 84. P. 1002–1006.
11. Fujikama Sh., Akamatsu T. // J. Fluid Mech. 1980. N 97. P. 81–512.
12. Haar L., Gallagher J.S., Kell G.S. NBS/NRS Stream Tables. Hemisphere Publishing Corp., 1984. 211 p.
13. Sailing H. // J. Math. Phys. 1992. N 433. P. 507–516.

### *A.A. Perelomova. Nonlinear dynamics of directed acoustic waves in stratified liquids and gases.*

The method of one-dimensional overall hydrodynamic field separation to inputs, moving in opposite directions and stationary one, is developed. The system of equations is splitted into three nonlinear equations for interacting components. New expression which describe weak nonlinear interaction are derived for general from of equation of state. Computations show that directed waves conserve their properties even for large amplitudes of initial conditions. Solution of the problem is interesting in connection with wide class of problems with the same dispersion relation. Integral operator of dispersion, which form is determined by inhomogeneity of medium, appears also in the theory of waveguide electromagnetic waves propagation.

The direct and stationary waves change the background temperature (and density), change in the same way the main refractive index and create propagating and stationary areas of induced diffraction and scattering of electromagnetic waves, which properties are described by the theory proposed.