

К.Т. Протасов

## Космический мониторинг аномалий подстилающей поверхности Земли адаптивным алгоритмом разладки

Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск

Поступила в редакцию 30.11.99 г.

Решается задача построения эмпирической модели динамики видеоданных, обусловленных поведением экосистем во времени, на основе линейного представления в скользящем базисе Карунена–Лоэва фенологических вариаций ансамбля изображений. Для обнаружения неожиданно возникающих аномалий, регистрируемых на фоне естественных изменений радиояркостей подстилающей поверхности Земли, синтезируется адаптивное байесово правило проверки гипотез и приводятся примеры работы алгоритмов.

### Введение

Появление относительно недорогих станций приема космической видеоинформации низкоорбитальных спутников серии NOAA, «Метеор», SPOT, «Ресурс» и им подобных позволяет ставить и решать задачи ресурсного, климато-экологического мониторинга в рамках конкретного региона с использованием ГИС-технологий. Постоянное совершенствование спутниковой аппаратуры, увеличение спектральных каналов, переход к гиперспектральной и стереосъемкам, увеличение разрешающей способности приемников излучения позволяют решать не только качественные, но и количественные задачи природопользования. Классе народнохозяйственных, экологических задач, решаемых с помощью доставляемой из космоса информации, необозримо велик, об этом свидетельствуют обстоятельные обзоры в сб. «Итоги науки и техники» [1–4].

Существует мнение, что описываемые методы решения тех или иных задач могут быть использованы в самых широких масштабах и период лабораторных исследований заканчивается. Однако более пристальное знакомство с проблемами мониторинга показывает, что пока ещё решены лишь наиболее простые подзадачи сложнейшей задачи анализа космической информации. Даже повторение уже полученных результатов требует их адаптации к конкретным условиям региона, высокой культуры анализа данных, мощного программного и аппаратного оснащения ГИС. Одной из таких нерешенных задач является отсутствие модели описания динамики сезонных вариаций яркостных характеристик ландшафтов. Действительно, при оценивании состояния различных экосистем по наблюдаемым видеоданным необходима, прежде всего, модель динамики сезонных изменений оптического поля радиояркостей ландшафтных образований, на фоне которых разворачиваются экологически значимые события. Так как теоретические основы решения этой сложной задачи не разработаны, а создаваемые фенологические карты сезонных изменений природных комплексов отражают лишь среднестатистическую картину динамики компонент ландшафта и носят качественный характер, то возникает необходимость в создании эмпирической модели динамики видеоданных, порождаемых поведением экосистем во времени.

В связи с этим рассмотрим подход построения линейной модели для описания фенологических вариаций во

времени ансамбля изображений и адаптивный алгоритм обнаружения «аномальных выбросов», регистрируемых на фоне естественных изменений подстилающей поверхности Земли. Апробирование алгоритма проведено на полунатурных данных, полученных прибором AVHRR спутника NOAA и моделированием аномалий.

### 1. Линейная модель ансамбля видеоданных в базисе Карунена–Лоэва и адаптивное восстановление вероятностных описаний ситуаций

В настоящее время станциями приема спутниковой информации накоплен обширный материал, содержащий данные о динамике поведения оптических характеристик ландшафтов. В качестве самостоятельным функционирующих единиц ландшафта выберем фрагментарии, выделяемые на изображениях алгоритмом кластерного анализа в виде текстурно однородных участков изображения. Результатом автоматической классификации видеоданных является сегментация изображений на текстурно-однородные области с близкими оптическими характеристиками [1–4]. Укрупнив таким естественным путем исходную видеоинформацию, будем описывать поведение во времени не каждого отдельного пикселя изображения, а кластера в целом как оптического образа фрагмента ландшафта.

Обозначим через  $t$  время или целочисленный номер сеанса приема очередного космического изображения, тогда зафиксированная совокупность согласованных по масштабам видеоданных одного и того же участка местности на момент времени  $t$  имеет вид

$$\xi_0(u, v), \dots, \xi_{t-\tau}(u, v), \dots, \xi_t(u, v),$$

где  $\xi(u, v) \equiv \xi(i, j)_{l \times m}$  – фрагмент непрерывного изображения или его оцифрованная матричная модель;  $(u, v) \in R^2$  – значения координат пикселей с яркостью  $\xi(u, v)$  ( $\xi(i, j)$  – соответственно в дискретном варианте записи,  $i = 1, \dots, l$ ;  $j = 1, \dots, m$ ,  $l \times m$  – количество отсчетов (элементов) фрагмента);  $\tau$  – интервал времени, в течение которого оптический образ ландшафта практически стационарен ( $\tau$  – интервал квазистационарности). Возможен вариант форми-

рования наблюдений за фрагментом, заданным на носителе более сложной формы, например, соответствующим некоторому заранее выделенному кластеру  $d$ ,  $d = 1, \dots, Q$ , где  $Q$  – общее количество кластеров. Множество точек кластера будем выделять единичной функцией  $\mathbf{1}_d(u, v)$  тех значений  $(u, v)$  пикселей, которые формируют кластер  $d \in Q$  ( $\mathbf{1}_d(u, v)$  – индикатор области определения кластера). Для прозрачности записи выражений будем пользоваться непрерывными моделями представления данных, полагая, однако, что последние оцифрованы, а интегрирование с приемлемой точностью может быть заменено суммированием. Динамику поведения обобщенного фрагмента во времени будем описывать следующей линейной моделью:

$$\xi_\tau(u, v) = \mu_\tau(u, v) + \sum_{i=1}^k X^i \phi_i^\tau(u, v) + \eta(u, v), \quad (1)$$

где  $\mu_\tau(u, v)$  – математическое ожидание;  $\{\phi_i^\tau(u, v)\}_1^k$  – ортонормированный базис Карунена–Лозва (КЛ), оцениваемые на интервале квазистационарности  $\tau$ ;  $\eta(u, v)$  –  $\delta$ -коррелированный (белый) шум с дисперсией  $\sigma^2$ . Технология получения такого базиса по выборочным данным и итерационный алгоритм последовательного нахождения «наиболее важных» базисных функций изложены в Приложении [8–12]. Заметим, что базисные функции определены на множестве  $\mathbf{1}_d(u, v)$  тех значений пикселей  $\{(u, v)\}$ , которые образуют фрагмент или кластер  $d \in \{1, \dots, Q\}$ .

Назовем модель (1) гауссовоподобной, так как при фиксированном векторе параметров  $\mathbf{X} = \mathbf{x}$  наблюдения описываются с точностью до гауссова шума с распределением  $N\left\{0, \frac{\delta(u-r)\delta(v-s)}{\sigma^2}\right\}$  [11]. Достаточно широкий класс ситуаций может быть интерпретирован с использованием модели (1), если предположить, что параметры  $\mathbf{X} \in R^k$  также случайны и распределены с функцией плотности вероятностей  $\omega(\mathbf{x})$ . Тогда безусловный функционал плотности распределения вероятностей наблюдений  $\xi(u, v)$  может быть получен путем интегрирования гауссова функционала плотности по распределению  $\omega(\mathbf{x})$ , а именно:

$$\begin{aligned} f[\xi(u, v)] &= \int_{R^k} f[\eta(u, v)/\mathbf{x}] \omega(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \\ &= C \int_{R^k} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \iint_{1d} [\xi(u, v) - \mathbf{x}^T \mathbf{f}(u, v)]^2 du dv\right\} \omega(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (2) \end{aligned}$$

где  $C$  – константа, связанная с нормировкой функционала  $f[\cdot]$ ;  $\xi(u, v)$  – центрированные наблюдения;  $d\mathbf{x} = dx^1 \times \dots \times dx^k$  и опущен индекс  $\tau$ ;  $T$  – знак транспонирования. Для вычисления  $f[\xi(u, v)]$  воспользуемся идеями адаптивного байесова подхода [5], основанного на интегрировании в (2) с помощью аппроксимации Лапласа, тогда

$$\begin{aligned} f[\xi(u, v)] &\cong C \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \varepsilon_k^2\right\} \frac{\sigma^{-k}}{(\sqrt{2\pi})^k} \times \\ &\times \int_{R^k} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)\right\} \omega(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (3) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_k^2 = \iint_{1d} [\xi(u, v) - \mathbf{x}^{*T} \mathbf{f}(u, v)]^2 dudv, \quad (4)$$

$$\mathbf{x}^* = \iint_{1d} \xi(u, v) \mathbf{f}(u, v) dudv, \quad (5)$$

где  $\mathbf{x}^*$  – оценка максимального правдоподобия (МП) неизвестного вектора параметров  $\mathbf{x}$ , компоненты которого являются коэффициентами разложения наблюдаемого центрированного фрагмента изображения  $\xi(u, v)$  в базисе  $\mathbf{f}(u, v) = \{\phi_i(u, v)\}_{i=1}^k$ . В условиях слабого влияния  $\omega(\mathbf{x})$  на значение интеграла в (3) априорное распределение параметров  $\omega(\mathbf{x})$ , когда оно неизвестно, естественно заменить распределением  $\tilde{\omega}(\mathbf{x})$  оценок максимального правдоподобия этого вектора, а в качестве оценки интеграла в (3) взять его выборочное среднее по выборке  $\tilde{\mathbf{x}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_\tau$ . Эта выборка оценок МП  $\tilde{\mathbf{x}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_\tau$  получена разложением (5) данных материала обучения  $\xi_1(u, v), \dots, \xi_\tau(u, v)$  на интервале квазистационарности  $\tau$ . С учетом этого выражение для функционала плотности вероятности наблюдений имеет вид

$$\begin{aligned} f[\xi(u, v)] &= C \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \varepsilon_k^2\right\} \frac{\sigma^{-k}}{(\sqrt{2\pi})^k} \times \\ &\times \sum_{i=1}^{\tau} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{x}^* - \tilde{\mathbf{x}}_i)^T (\mathbf{x}^* - \tilde{\mathbf{x}}_i)\right\}. \quad (6) \end{aligned}$$

Знание условных функций плотности  $f[\xi(u, v)]$ , определенных для каждого класса  $d \in \{1, \dots, Q\}$ , позволяет строить адаптивные байесовы решающие правила распознавания ситуаций в динамике перемещения интервала стационарности  $\tau$  в ансамбле наблюдений

$$U = \arg \max_{i=1, \dots, Q} P_i f_i[\xi(u, v)], \quad (7)$$

где  $P_i$  – априорные вероятности появления классов;  $U$  – решение,  $U \in \{1, \dots, Q\}$ . Решающее правило при этом имеет следующий смысл: составляющая с  $\exp\{-\varepsilon_k^2/(2\sigma^2)\}$  оценивает степень принадлежности наблюдаемой реализации  $\xi(u, v)$  к линейному подпространству  $\{\phi_i(u, v)\}_1^k$ , «хорошо» описывающему данный класс, а составляющая  $\sum_{i=1}^{\tau} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{x}^* - \tilde{\mathbf{x}}_i)^T (\mathbf{x}^* - \tilde{\mathbf{x}}_i)\right\}$  оценивает степень принадлежности проекции реализации  $\xi(u, v)$  на подпространство  $\{\phi_i(u, v)\}_1^k$  к другим точкам материала обучения, располагающимся в этом подпространстве. Следует заметить, что практическая реализация алгоритма построения оценочного байесова правила основана на использовании условных функций плотности  $f(\xi(i, j))$ , а не функционалов плотности, ввиду того что изображение  $\xi(u, v)$  предполагается оцифрованным с высокой точностью и представлено в дискретной форме. При решении задач классификации правилом (7) и для поиска совокупности элементов изображения, неожиданно изменивших свои статистические характеристики в связи с разладкой процесса, необходимо задать некоторое поисковое окно минимальных размеров,

в рамках которого собственно и выносится решение о разладке. Все пространство изображения анализируется путем сканирования элементарным фрагментом поля изображения, и задача распознавания решается с точностью до фрагмента по пространству.

Проиллюстрируем работу алгоритма построения базиса КЛ на следующем простом примере, когда наблюдаемый ансамбль изображений одного и того же участка подстилающей поверхности Земли (пойма р. Оби и Новосибирское водохранилище) регистрируется ИСЗ NOAA прибором AVHRR в пределах скользящего временного интервала из  $\tau = 12$  последовательных наблюдений первого спектрального диапазона. По этим изображениям восстанавливался скользящий базис КЛ методом, рассмотренным в Приложении [8–12]. Аппроксимационная важность каждой базисной функции характеризуется собственным значением  $\lambda$ , спектр полу-



ченных собственных значений приведен на рис. 1,а. Качество аппроксимации (4) тем или иным набором базисных функций иллюстрируется рис. 1,б.

Поведение графиков свидетельствует о том, что небольшим числом (например, пять) базисных функций наблюдаемая статистика изображений описывается хорошо. Оценка математического ожидания и пять наиболее важных базисных функций КЛ изображены на рис. 2 (где  $a$  – математическое ожидание,  $b - e$  – 1-я – 5-я базисные функции соответственно). Модель (1) далее можно использовать не только для фильтрации, компактного описания фенологических изменений портретов ландшафтных образований, но и для обнаружения аномальных явлений подстилающей поверхности Земли по наблюдаемым космическим видеоданным, установив или оценив доверительные интервалы для нормы и патологии.

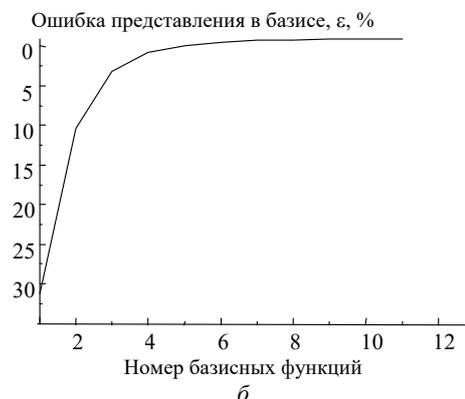


Рис. 1. График собственных значений (а) и характеристика качества аппроксимации наблюдаемых изображений (б) в базисе Карунена–Лоэва

## 2. Обнаружение и выделение аномалий ПЗ адаптивным алгоритмом разладки

Рассмотрим задачу обнаружения неожиданно возникающей аномалии в следующей формальной постановке [6, 7]: предположим, что периодически регистрируется оптическое изображение одного и того же участка подстилающей поверхности  $\xi_s(x,y) = \xi_s(i,j)_{l \times m}$  в последовательные моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_r, \dots, t_n$ . К моменту времени  $t_n$  квазистационарное состояние фрагмента наблюдения описывается следующей моделью:

$$\xi_n(u, v) = \mu_n(u, v) + \mathbf{X}_n^T \boldsymbol{\phi}_n(u, v) + \eta_n(u, v), \quad (8)$$

где  $\eta_n(u, v)$  – независимые реализации некоррелированного шума. Предположим, что наблюдаемые фрагменты изображений могут изменить свои свойства следующим образом:

$$\begin{aligned} &\mu_n(u, v) + \mathbf{X}_n^T \boldsymbol{\phi}_n(u, v) = \\ &= \begin{cases} \mu_0(u, v) + \mathbf{X}^T \boldsymbol{\phi}(u, v), & n \leq r + 1, \text{ ситуация } A_0, \\ \mu_1(u, v) + \mathbf{X}^T \boldsymbol{\phi}(u, v), & n \geq r, \text{ ситуация } A_1, \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\boldsymbol{\phi}(u, v)$  – новый ортонормированный базис КЛ, другими словами, в процессе разладки изменяются и математическое ожидание и корреляционные свойства изображений, описываемые набором базисных функций. Обнаружение изменений свойств процесса эквивалентно принятию гипотезы  $H_1$  (наблюдается разладка процесса), когда она прове-

ряется против альтернативы  $H_0$  (разладка отсутствует,  $r > n$ ). Для проверки гипотез  $H_1$  и  $H_0$  запишем решающее правило отношения правдоподобия с учетом независимости наблюдений

$$\begin{aligned} L(r, \mu_1) &= \frac{\prod_{l=1}^{r-1} f_0[\xi_s(u, v)] \prod_{l=r}^n f_1[\xi_s(u, v)]}{\prod_{l=1}^n f_0[\xi_s(u, v)]} = \prod_{l=r}^n \frac{f_1[\xi_s(u, v)]}{f_0[\xi_s(u, v)]} \cong \\ &\cong \prod_{l=r}^n \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \iint (\xi_s^*(u, v) - \mathbf{y}_l^{*T} \boldsymbol{\phi}(u, v))^2 dudv \right\} \times}{\exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \iint (\xi_s^*(u, v) - \mathbf{x}_l^{*T} \boldsymbol{\phi}(u, v))^2 dudv \right\} \times} \\ &\times \frac{\sum_{j=r, j \neq l}^n \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{y}_l^* - \tilde{\mathbf{y}}_j)^T (\mathbf{y}_l^* - \tilde{\mathbf{y}}_j) \right\} H_1}{\sum_{j=r, j \neq l}^n \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{x}_l^* - \tilde{\mathbf{x}}_j)^T (\mathbf{x}_l^* - \tilde{\mathbf{x}}_j) \right\} H_0} \geq 1, \end{aligned} \quad (10)$$

где центрирование производится относительно соответствующих математических ожиданий, а коэффициенты разложения (их оценки максимального правдоподобия)  $\mathbf{y}$  и  $\mathbf{x}$  подсчитываются относительно соответствующих базисов КЛ  $\boldsymbol{\phi}(u, v)$ ,  $\boldsymbol{\phi}(u, v)$  по формуле (5). Для корректной работы алгоритма необходим этап предварительного обучения, заключаю-

чающегося в нахождении базиса  $\phi(u, v)$  и оценок МП  $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_\tau$  по квазистационарной выборке  $\xi_1(u, v), \dots, \xi_\tau(u, v)$   $\tau < r$  предварительных наблюдений, когда достоверно из-

вестно, что состояние природы характеризуется ситуацией  $A_0$ . Полученным решающим правилом обнаружения разладки воспользуемся следующим образом: двигаясь последовательно от  $n$  назад и, задав  $r = n - 2$ , вычисляем

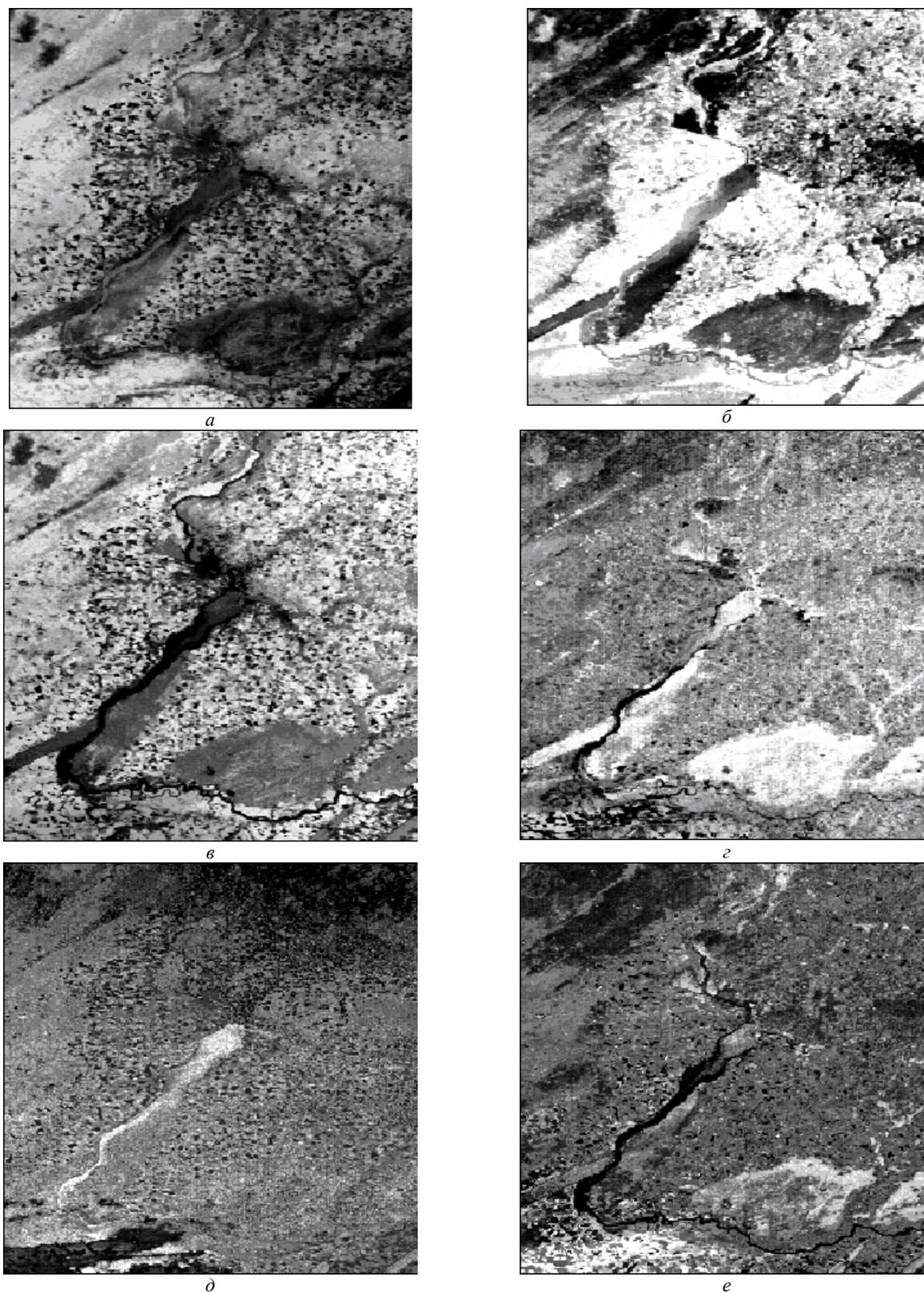


Рис. 2. Математическое ожидание (а) и пять базисных функций КЛ (б – е), полученных по статистике спутниковых изображений

а)  $\mu_1(u, v) \cong \frac{1}{n-r+1} \sum_{l=r}^n \xi_l(u, v)$  (эта оценка избавляет от решения сложной задачи оптимизации функционала правдоподобия по  $\mu_1(u, v)$ );

б) центрируем реализации  $\xi_r(u, v), \dots, \xi_n(u, v)$  относительно  $\mu_1(u, v)$  и  $\mu_0(u, v)$ ;

в) строим новый базис  $\Phi(u, v)$  описанным в Приложении [8–12] способом и получаем оценки МП  $\tilde{y}_r, \dots, \tilde{y}_n$  в этом базисе и  $\tilde{x}_r, \dots, \tilde{x}_n$  – в ранее полученном базисе  $\Phi(u, v)$ ;

г) перебирая (уменьшая)  $r$ , находим  $(\tilde{r}, \tilde{\mu}_1) = \arg \max_{\{r\}} \max_{\{\mu_1(u, v)\}} L(r, \mu_1)$ ;

д) наконец, проверяем гипотезы  $H_1$  и  $H_0$  при найденных  $\tilde{r}, \tilde{\mu}_1, L(\tilde{r}, \tilde{\mu}_1) \underset{H_1}{\cong} 1$ .

Аналогичным образом строится алгоритм с «движением» по выборке вперед.

Учитывая громоздкость реализации такого алгоритма обнаружения разладки, рассмотрим более простой вариант, связанный с тем, что в модели (9) изменяется при разладке лишь математическое ожидание, а коррелированные связи процесса остаются прежними и описываются набором базисных функций КЛ  $\Phi(u, v)$ . Другое упрощение связано с тем, что усреднение в выражении для функционала плотности (2) осуществляется с использованием несобственного распределения  $\omega(x)$ , заданного в виде несущественной для решающего правила константы на расширяющемся носителе  $A$ :

$$\int_{R^k} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (x - x^*)^T (x - x^*) \right\} \omega(x) dx \cong \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{A} \int_A \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (x - x^*)^T (x - x^*) \right\} dx \cong C.$$

В этом случае общая форма выражения для функционала плотности будет иметь следующий вид:

$$f[\xi(u, v)] \cong C \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \iint (\xi(u, v) - \mu(u, v) - x^* \Phi(u, v))^2 dudv \right\},$$

где  $x^*$  – оценка максимального правдоподобия, определяется из выражения (5). Логарифм отношения правдоподобия в этом случае выражается в виде

$$\Lambda_n(r, \mu_1) = \sum_{l=r}^n \frac{1}{2\sigma^2} \left\{ \iint_{1d} [\xi_l(u, v) - \mu_0(u, v) - x_l^{*T} \Phi(u, v)]^2 dudv - \iint_{1d} [\xi_l(u, v) - \mu_1(u, v) - x_l^{*T} \Phi(u, v)]^2 dudv \right\} = \iint_{1d} \left\{ \frac{\mu_1(u, v) - \mu_0(u, v)}{\sigma^2} \sum_{l=r}^n [\xi_l(u, v) - x_l^{*T} \Phi(u, v) - \mu_0(u, v) - \frac{\mu_1(u, v) - \mu_0(u, v)}{2}] dudv \right\} \underset{H_1}{\cong} 0. \quad (11)$$

Обозначим  $\Delta(u, v) = \mu_1(u, v) - \mu_0(u, v)$ , тогда

$$\frac{\delta \Lambda_n(r, \Delta)}{\delta \Delta(u, v)} \cong \frac{1}{n-r+1} \sum_{l=r}^n [\xi_l(u, v) - \mu_0(u, v) - x_l^{*T} \Phi(u, v) - \Delta(u, v)] = 0, \quad (12)$$

$$\tilde{\mu}_1(u, v) = \frac{1}{n-r+1} \sum_{l=r}^n [\xi_l(u, v) - x_l^{*T} \Phi(u, v)],$$

$$\tilde{\mu}_1(u, v) = \frac{1}{n-r+1} \sum_{l=r}^n \xi_l(u, v),$$

так как

$$\frac{1}{n-r+1} \sum_{l=r}^n x_l^{*T} \Phi(u, v) \cong 0.$$

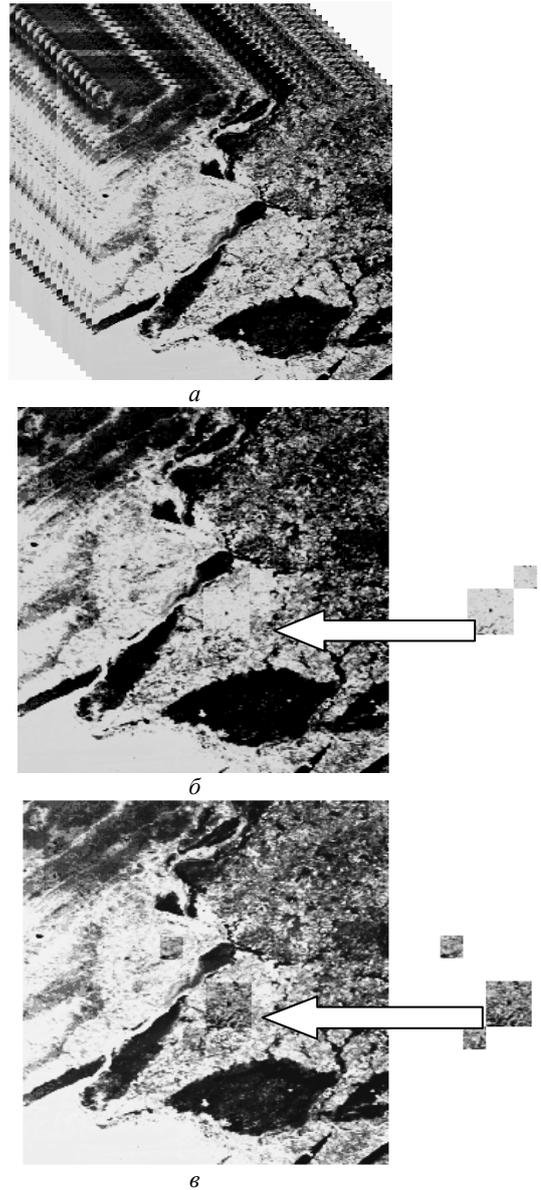


Рис. 3. Ансамбль «однородных» изображений – а; обнаруженное и выделенное алгоритмом нестандартное повышение яркости – б; обнаруженное и выделенное алгоритмом понижение яркости – в

Для иллюстрации работы алгоритма на вновь наблюдаемых изображениях искусственно вносились аномальные искажения в виде повышения уровня яркости (двукратное превышение фона) и понижения уровня яркости в системе фрагментов  $10 \times 10$  пикселей, которые затем обнаруживались решающим правилом (11) на шаге  $t_{13}, t_{14}, t_{15}$ , и локализовывалось место фиксируемой аномалии. На рис. 3,а представлен ансамбль наблюдений на участке квазистационарности, а на рис. 3,б,в – безошибочно обнаруженные алгоритмом аномалии (вынесены за кадр анализируемых фрагментов).

### Заключение

Достоинство данного подхода заключается в том, что несложное обобщение представления КЛ [8–12] позволяет строить линейные модели для векторных изображений с компонентами, полученными в нескольких спектральных диапазонах. Вероятностную модель последовательности наблюдений (8), (9) для построения решающего правила обнаружения разладки предпочтительнее взять, воспользовавшись, например, параметризациями Джонсона.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 98-0503194).

### Приложение

#### Линейные модели многомерных полей в базисе Карунена–Лозва

При обработке многомерной экспериментальной информации широко используются линейные модели представления данных в ортогональных базисах. Среди таких базисов наиболее предпочтительным является базис Карунена–Лозва (известный в литературе по метеорологии, гидрологии, океанологии, физике атмосферы и океана как базис эмпирических ортогональных функций), при этом аппроксимирующий ряд имеет наименьшее число компонент, сохраняя высокую точность аппроксимации данных [8–12].

Наметившиеся тенденции к увеличению размерности регистрируемой информации (в частности, появление многозональной аэрокосмической съемки) и возникающие при этом проблемы совместной обработки данных делают актуальной задачу синтеза линейных моделей многомерных наблюдений, описываемых случайными векторными полями. В связи с этим далее рассматривается достаточно общая задача представления векторных полей векторного аргумента, нахождения соответствующего базиса Карунена–Лозва по экспериментальным данным, предлагается итеративный алгоритм приближенного решения указанной задачи. Будем полагать, что случайное (для простоты и без потери общности – центрированное) векторное поле  $\xi(\mathbf{u}) = (\xi^1(\mathbf{u}), \dots, \xi^s(\mathbf{u}))^T$  векторного аргумента  $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^v)^T$  ( $s, v$  – соответственно размерность функции  $\xi(\cdot)$  и размерность аргумента  $\mathbf{u}$ ,  $T$  – знак транспонирования) задано в области определения  $D = \{\mathbf{u}: u_a^i \leq u^i \leq u_b^i\}$  совокупностью  $N$  реализаций  $\xi_1(\mathbf{u}), \dots, \xi_N(\mathbf{u})$ .

Представим векторное поле следующим (вообще говоря, не единственным [11]) образом:

$$\xi(\mathbf{u}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=k}^n X^i \phi_i(\mathbf{u}), \quad (\text{П.1})$$

где предел понимается в смысле сходимости по норме в пространстве реализаций случайного векторного поля;  $\{\phi_i(\mathbf{u})\}_k$  – векторные базисные функции векторного аргумента. Случайные коэффициенты  $\{X^i\}_k$  определяются из условия минимума среднеквадратического отклонения

$$\varepsilon_k^2 = M \left\| \xi(\mathbf{u}) - \sum_{i=1}^k X^i \phi_i(\mathbf{u}) \right\|^2, \quad (\text{П.2})$$

где  $M$  – знак оператора математического ожидания;  $\|\cdot\|$  – евклидова норма в пространстве наблюдений. Если на базисные функции  $\{\phi_i(\mathbf{u})\}_k$  наложить условия ортонормированности

$$(\phi_i, \phi_j) = \int_D \phi_i^T(\mathbf{u}) \phi_j(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \delta_{ij}, \quad (\text{П.3})$$

где  $\delta_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, k$ ) – символ Кронекера,  $d\mathbf{u} = du^1 \times \dots \times du^v$ , а  $(\dots)$  – знак скалярного произведения, то коэффициенты представления  $\{X^i\}_k$ , минимизирующие (П.2), будут иметь вид

$$X^i = (\xi, \phi_i) = \int_D \xi^T(\mathbf{u}) \phi_i(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (\text{П.4})$$

Существование предела в (П.1) и полной ортонормированной последовательности базисных функций  $\{\phi_i(\mathbf{u})\}_\infty$  обеспечивается рассмотрением лишь процессов  $\xi(\mathbf{u})$ , удовлетворяющих следующему условию: для каждого фиксированного набора значений компонент вектора  $\mathbf{u} \in D$   $M[\xi^T(\mathbf{u}) \xi(\mathbf{u})] < \infty$ . Базисные функции  $\{\phi_i(\mathbf{u})\}_k$  естественно также найти из условий минимума среднеквадратического критерия качества (П.2) аппроксимации векторного поля  $\xi(\mathbf{u})$  отрезком ряда (П.1) из  $k$  членов. Решение указанной вариационной задачи на условный, в смысле ограничений (П.3), вводимых в функционал (П.2) с помощью множителей Лагранжа, экстремум приводит к следующему однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода:

$$\int_D M[\xi(\mathbf{u}) \xi^T(\mathbf{v})] \phi(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \lambda \phi(\mathbf{u}), \quad (\text{П.5})$$

где  $\lambda$  – множитель Лагранжа, а индекс базисных функций и  $\lambda$  ввиду эквивалентности всех уравнений опущены. Искомый базис  $\{\phi_i(\mathbf{u})\}_k$ , соответствующий  $k$  наибольшим собственным значениям  $\{\lambda_i\}_k$ , находится решением уравнения (П.5), однако в общем случае это не простая задача. Имея в распоряжении совокупность реализаций  $\xi_1(\mathbf{u}), \dots, \xi_N(\mathbf{u})$  объема  $N$ , «достаточно полно» характеризующих генеральную совокупность всех реализаций, порождаемых случайным полем  $\xi(\mathbf{u})$ , естественно воспользоваться следующей выборочной оценкой корреляционной функции:

$$M[\xi(\mathbf{u}) \xi^T(\mathbf{v})] \cong \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j(\mathbf{u}) \xi_j^T(\mathbf{v}). \quad (\text{П.6})$$

В этом случае задача (П.5) существенно упрощается (случай вырожденного ядра в (П.5) [12]). Действительно, подставляя (П.6) в интегральное уравнение (П.5), получим

$$\int_D \sum_{j=1}^N \xi_j(\mathbf{u}) \xi_j^T(\mathbf{v}) \tilde{\phi}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \Delta \tilde{\phi}(\mathbf{u}), \quad (\text{П.7})$$

где  $\Delta = N\hat{\lambda}$ , а  $\hat{\lambda}$ ,  $\tilde{\phi}(\mathbf{u})$  – оценки соответствующих  $\lambda$ ,  $\phi(\mathbf{u})$ . Введем следующие обозначения:

$$\int_D \xi_j^T(\mathbf{v}) \tilde{\phi}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = c^j, \quad j = 1, \dots, N,$$

тогда из (П.7) получим выражение для базисных функций

$$\tilde{\phi}(\mathbf{u}) = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^N c^j \xi_j(\mathbf{u}), \quad (\text{П.8})$$

где коэффициенты  $\{c^j\}_N$  пока не определены. Подставив параметризованное выражение (П.8) базисной функции  $\tilde{\phi}(\mathbf{u})$  в уравнение (П.7), получим равенство

$$\frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^N \xi_j(\mathbf{u}) \sum_{i=1}^N c^i \int_D \xi_i^T(\mathbf{v}) \xi_j(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \sum_{j=1}^N c^j \xi_j(\mathbf{u}). \quad (\text{П.9})$$

Вычислим в этом выражении скалярное произведение  $(\xi_j, \xi_i)$  по реализациям случайного поля  $\xi_1(\mathbf{u}), \dots, \xi_N(\mathbf{u})$ , обозначив его  $a_{ji}$ , тогда (П.9) примет вид

$$\sum_{j=1}^N \xi_j(\mathbf{u}) \left\{ \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^N c^i a_{ji} - c^j \right\} = 0. \quad (\text{П.10})$$

В силу линейной независимости реализаций случайного поля в вероятностном смысле и в силу свойства линейно независимых элементов пространства со скалярным произведением равенство (П.10) имеет место при условии

$$\frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^N c^i a_{ji} - c^j = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (\text{П.11})$$

Используя матричную запись, выражение (П.11) преобразуем к виду

$$(a_{ji})\mathbf{c} = \mathbf{c}\Delta, \quad (\text{П.12})$$

где  $\mathbf{c} = (c^1, \dots, c^N)^T$ ;  $(a_{ji})$  – матрица  $N \times N$  Грама;  $\Delta = (\Delta^i \delta_{ij})$ .

Таким образом, определив структуру базисных функций в виде линейной комбинации реализаций случайного процесса, коэффициенты этих линейных комбинаций получаем в результате решения полной проблемы собственных значений для положительно определенной матрицы Грама  $(a_{ji})$  порядка  $N$ , а это уже практически реализуемая задача с помощью численных методов алгебры. Нетрудно проверить, подставив выражение (П.8) в (П.3), что для нормировки функций  $\{\tilde{\phi}_i(\mathbf{u})\}_k$ , с учетом полученных значений  $\{c^i\}_N$ , в формуле для базисных функций (П.9) нужно произвести замену  $\Delta$  на  $\sqrt{\Delta}$ .

Построение линейных моделей (П.1), с использованием оптимального в среднеквадратическом смысле базиса Карунена–Лозва, требует решения уравнений (П.12), как правило, численными методами. Однако трудности практической реализации ограничивают широкое применение

этого базиса, так как в этом случае необходимо решать полную проблему собственных значений для положительно определенных матриц, когда их порядок превосходит  $10^2$ . Это заставляет отказаться от прямых методов решения задачи нахождения базиса Карунена–Лозва (П.12) и конструировать итеративные алгоритмы, которые, уменьшая число операций при получении приближенного результата, лишь в асимптотике приводят к оптимальному решению. Другим преимуществом итеративных алгоритмов является тот факт, что они позволяют найти в первую очередь «самые важные» базисные функции, число которых может быть небольшим.

Одним из способов преодоления указанной трудности ценой отказа от оптимальности в среднеквадратическом смысле является алгоритм построения приспособленного базиса [10], использующий идею ортогонализации последовательности линейно-независимых функций при условии, что выбор очередной функции подчинен определенному критерию. При этом осуществляется равномерное приближение процесса его линейным многообразием небольшой размерности. Итеративность процедуры построения этого базиса позволяет использовать алгоритм для преобразования пространств больших размерностей до  $10^5$ .

Далее предлагается итеративный алгоритм построения базиса, приспособленного в среднеквадратическом смысле (базис ПСК). В данном случае выбор очередной базисной функции основан на минимизации среднеквадратического критерия качества (П.2).

Аппроксимируем реализации исходного описания  $\xi(\mathbf{u})$  элементами линейной оболочки  $G_k$ , заданной ортонормированным базисом  $\{\varphi_i(\mathbf{u})\}_k$  следующим образом. За очередную базисную функцию  $\varphi_j(\mathbf{u})$  ( $j = 1, \dots, k$ ) возьмем ту из  $s_j$  ортонормированных функций  $\varphi_{s_j}(\mathbf{u})$ , полученных процессом ортогонализации Грама–Шмидта [12] выборочных функций  $\xi_1(\mathbf{u}), \dots, \xi_N(\mathbf{u})$

$$\varphi_{s_j}(\mathbf{u}) = \frac{\varphi_{s_j}^*(\mathbf{u})}{\|\varphi_{s_j}^*(\mathbf{u})\|}, \quad \varphi_{s_j}^*(\mathbf{u}) = \xi_{s_j}(\mathbf{u}) - \sum_{i=1}^{j-1} (\xi_{s_j}, \varphi_i) \varphi_i(\mathbf{u}), \quad (\text{П.13})$$

для которой

$$\lambda_j = M[(\xi, \varphi_j)^2] = \max_{[s_j]} M[(\xi, \varphi_{s_j})^2], \quad (\text{П.14})$$

$$s_j = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, k; \quad k \leq N,$$

где в качестве математического ожидания используется выборочная оценка, ассоциированная с (П.6). Процесс отыскания базисных функций заканчивается на  $k$ -шаге, как только будет достигнута заданная точность  $\varepsilon_k^2$  аппроксимации случайного векторного поля линейной комбинацией  $k$  базисных элементов из  $G_k$ , при этом по теореме проектирования элементов  $\xi(\mathbf{u})$  гильбертова пространства на  $G_k$  имеем

$$\xi(\mathbf{u}) \cong \sum_{j=1}^k X^j \varphi_j(\mathbf{u}), \quad (\text{П.15})$$

где  $\{X^j\}_k$  – набор случайных чисел, определяемых по формуле

$$X^j = (\xi, \varphi_j), \quad j = 1, \dots, k. \quad (\text{П.16})$$

Точность аппроксимации в выражении (П.15) определяется (практически используются оценки  $M[\cdot]$  по той же выборке) следующим образом:

$$\varepsilon_k^2 = M[(\xi, \xi)] - \sum_{j=1}^k \lambda_j, \quad (\text{П.17})$$

где  $\lambda_j$  упорядочены по убыванию ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$ ) в силу построения и максимально, насколько это позволяет набор  $\{\xi_j(\mathbf{u})\}_N$ , «исчерпывают» среднеквадратическую ошибку  $\varepsilon_k$  аппроксимации ансамбля  $\{\xi(\mathbf{u})\}$  линейным многообразием из  $G_k$ . Как известно, оптимальный в среднеквадратическом смысле базис  $\{\phi_j(\mathbf{u})\}_k$  с соответствующим спектром собственных значений  $\{\lambda_j\}_k$  разложения Карунена–Лоэва находится оптимизацией критерия (П.17) по  $\{\phi_j(\mathbf{u})\}$  с учетом ортонормируемости последних. К тому же базису  $\{\phi_j(\mathbf{u})\}_k$  приводит задача последовательной максимизации положительно определенной квадратичной формы (П.14) на сферах единичного радиуса в подпространствах, ортогональных функциям  $\{\phi_j(\mathbf{u})\}_k$ , получаемым процедурой (П.13),  $j = 1, \dots, k$ ,  $\phi_0 \equiv 0$ . Последнее обстоятельство указывает на то, что ПСК-базис  $\{\phi_j(\mathbf{u})\}_k$ , получаемый алгоритмом (П.13), (П.14), асимптотически с ростом  $N$  становится базисом Карунена–Лоэва при некоторых предположениях относительно ансамбля  $\{\xi(\mathbf{u})\}$ . Действительно, фактически рассматриваемый алгоритм основан на стохастических принципах поиска экстремума [12] лишь с той особенностью, что «пробными» функциями в данном случае являются элементы выборки. Поэтому для сходимости процедуры поиска необходимо, чтобы функция распределения выборочных значений была положительной в «направлении» искомого решения. Если этот факт априорно не установлен, то о качестве полученного решения можно судить по величине оценки ошибки аппроксимации (П.17):

$$\tilde{\varepsilon}_k^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left[ (\xi_j, \xi_j) - \sum_{i=1}^k (\xi_j, \phi_i)^2 \right].$$

Следует заметить, что алгоритмы, полученные для непрерывных полей, справедливы для полей, заданных отдельными отсчетами в дискретной регулярной или стохастической (но фиксированной) сети наблюдений, однако в этих случаях интегрирование заменяется соответствующим суммированием по множеству точек, в которых регистрируют реализации поля. Несложно выполнить и другие модификации алгоритмов, связанные с представлением полей в области  $D$  с переменными границами, скользящими границами или выделить в линейной модели (П.1) временную переменную в виде

$$\xi(\mathbf{u}, t) = \sum_{i=1}^k X^i(t) \phi_i(\mathbf{u}).$$

1. *Итоги науки и техники. Сер. Исследование Земли из космоса. Т. 1. Физические основы, методы и средства исследования Земли из космоса. М.: ВИНТИ, 1987. 196 с.*
2. *Итоги науки и техники. Сер. Исследование Земли из космоса. Т. 2. Обработка и использование аэрокосмической информации о Земле. М.: ВИНТИ, 1987. 172 с.*
3. *Итоги науки и техники. Сер. Исследование Земли из космоса. Т. 3. Географические информационные системы, дистанционное зондирование и их практическое использование. М.: ВИНТИ, 1989. 212 с.*
4. *Итоги науки и техники. Сер. Исследование Земли из космоса. Т. 4. Космические системы, аппараты и приборы для решения задач природопользования и экологического контроля. М.: ВИНТИ, 1991. 144 с.*
5. *Репин В.Г., Тартаковский Г.П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М.: Сов. радио, 1977. 432 с.*
6. *Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем / Пер. с англ. М. Бассвилль, А. Вилски, А. Банвенист и др. М.: Мир, 1989. 278 с.*
7. *Протасов К.Т. Обнаружение аномалий подстилающей поверхности Земли на космических снимках алгоритмом разладки для ГИС. Геоинформатика. Теория и практика. Вып. 1. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1998. 415 с.*
8. *Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов / Пер. с англ. М.: Наука, 1979. 368 с.*
9. *Ту Дж., Гонсалес Р. Принципы распознавания образов / Пер. с англ. М.: Мир, 1978. 412 с.*
10. *Распознавание образов и медицинская диагностика / Под ред. Ю. И. Неймарка. М.: Наука, 1972. С. 328.*
11. *Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. 1 / Пер. с англ. М.: Сов. радио, 1972. 744 с.*
12. *Протасов К.Т. Линейные модели многомерных полей в базисе Карунена–Лоэва // Оптика атмосферы. 1990. Т. 3. № 1. С. 51–55.*

***K.T. Protasov. Space monitoring of anomalies on the Earth's underlying surface by adaptive change point algorithm.***

A problem of constructing the empirical model of dynamics of the videodata appearing from time behavior of ecological systems is solved based on linear interpretation in Karhunen–Loeve basis of phonological variations of ensemble of images. To find unexpectedly appearing anomalies, recorded against the background of natural variations of radiointensities on the Earth underlying surface, the adaptive Bayes law for hypotheses testing is synthesized. Some examples of the algorithms operation are presented.