

**В.В. Войцехович, В.Г. Орлов, Л.Д. Санчес**  
**Влияние атмосферных флуктуаций**  
**на центр тяжести изображения**

*Институт астрономии, г. Мехико, Мексика*

Поступила в редакцию 30.10.2001 г.

Влияние атмосферных флуктуаций на центр тяжести изображения исследуется путем численного моделирования. Моделирование проводилось для условий слабой турбулентности в случае переменной и постоянной  $C_n^2$  (вертикальное и горизонтальное направления распространения излучения). Показано, что в условиях слабой турбулентности величина исследуемого эффекта не превышает 15%. Однако поскольку данный эффект усиливается с ростом турбулентности, можно ожидать, что в условиях сильной турбулентности атмосферные флуктуации будут оказывать значительное влияние на центр тяжести изображения. Сравнение результатов для вертикального и горизонтального направлений распространения излучения показывает, что величина эффекта незначительно зависит от структуры контура  $C_n^2$ . Вероятно, данный эффект определяется двумя параметрами: интегральной величиной турбулентности (параметром Фрида) и уровнем флуктуаций (дисперсией логарифма амплитуды).

### Введение

Измерения центра тяжести изображения часто используются в датчиках волнового фронта типа гартмановских для восстановления фазы, нарушенной турбулентностью [1–7]. Данный подход применяется как в фундаментальных исследованиях атмосферной турбулентности, так и для практических целей (как, например, в адаптивной оптике атмосферы), а также используется в различных приложениях, поскольку дает прямую и простую связь между данными измерений и градиентом фазы. При таком подходе предполагается, что градиент фазы, усредненный по субапертуре гартмановской маски, пропорционален соответствующему сдвигу центра тяжести изображения. Однако это простое соотношение справедливо только тогда, когда не учитывается влияние флуктуаций амплитуды. Согласно общепринятому мнению [8] при слабой турбулентности влияние флуктуаций на центр тяжести изображения пренебрежимо мало, но данное предположение никогда не проверялось численными расчетами.

В данной работе рассчитывается величина исследуемого эффекта путем численного моделирования на основе недавно предложенного метода случайных волновых векторов [9, 10], который позволяет моделировать реализации амплитуды и фазы с желаемой и взаимной статистикой.

### 1. Определение ошибки, обусловленной флуктуациями

Пусть волна  $\psi(\rho)$  проходит сквозь тонкую линзу диаметром  $d$  и с фокусным расстоянием  $f$ . Центр тяжести  $\rho_c$  изображения, сформированного этой волной

в фокальной плоскости линзы, может быть представлен как

$$\rho_c = \{x_c, y_c\} = -\frac{f}{k} \frac{G_d \int d^2 \rho \exp[2\chi(\rho)] \nabla S(\rho)}{\int d^2 \rho \exp[2\chi(\rho)]}, \quad (1)$$

где  $x_c, y_c$  – декартовы координаты центра тяжести изображения;  $\chi(\rho)$  и  $S(\rho)$  – логарифм амплитуды и фаза волны  $\psi$  соответственно;  $k$  – волновое число;  $G_d$  обозначает интегрирование по апертуре линзы.

Однако в экспериментах, связанных с восстановлением фазы на основе измерений центра тяжести изображения (например, при помощи датчиков волнового фронта типа Гартмана), влияние флуктуаций амплитуды на центр тяжести изображения всегда предполагается пренебрежимо малым. Математически это предположение может быть записано

$$\rho'_c = \{x'_c, y'_c\} = -\frac{f}{k\Sigma} \int d^2 \rho \nabla S(\rho), \quad (2)$$

где  $\Sigma$  – площадь линзы.

Поскольку в задачах, связанных с распространением излучения через турбулентную атмосферу,  $\rho_c$  и  $\rho'_c$  являются случайными величинами, то можно определить относительную ошибку  $\sigma$  измерений центра тяжести изображения, связанную с флуктуациями:

$$\sigma = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sqrt{\langle (x_c - x'_c)^2 \rangle}}{\sqrt{\langle x_c^2 \rangle}} + \frac{\sqrt{\langle (y_c - y'_c)^2 \rangle}}{\sqrt{\langle y_c^2 \rangle}} \right]. \quad (3)$$

С физической точки зрения  $\sigma$  показывает, насколько велик относительный вклад флуктуаций в сдвиг центра тяжести изображения. Далее в статье эта величина рассчитывается путем численного моделирования в зависимости от условий турбулентности и размера линзы.

## 2. Метод численного моделирования

В рамках данной статьи ограничимся рассмотрением прохождения изначально плоской волны через слабо турбулентную атмосферу. В таком случае можно использовать метод случайных волновых векторов (СВВ), который позволяет моделировать реализации фазы и логарифма амплитуды с желаемой и взаимной статистикой. Ниже приводим только краткое описание метода СВВ, поскольку более детальное рассмотрение этого метода было проведено в [9].

Реализации фазы  $S(\rho)$  и логарифма амплитуды  $\chi(\rho)$  на апертуре моделируются следующим образом:

$$\begin{aligned} S(\rho) &= \sum_{m=1}^M F(p_m) \cos(\mathbf{p}_m \cdot \rho + \varphi_m); \\ \chi(\rho) &= \sum_{m=1}^M G(p_m) \cos(\mathbf{p}_m \cdot \rho + \varphi_m + \psi_m), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\rho$  – двумерный радиус-вектор в плоскости апертуры;  $M$  – число гармоник, используемых при моделировании;  $\mathbf{p}_m$  – двумерный случайный волновой вектор;  $p_m$  – модуль вектора  $\mathbf{p}_m$ .

На параметры в уравнения (4) наложены следующие статистические ограничения:

1) Модуль  $p_m$  и направление  $\theta_m$  вектора  $\mathbf{p}_m$ , а также величины  $\varphi_m$  и  $\psi_m$  предполагаются статистически независимыми.

2) Величины  $\theta_m$  и  $\varphi_m$  распределены равномерно в интервале  $[-\pi, \pi]$ .

При выполнении этих условий уравнения (4) позволяют прямую физическую интерпретацию. Статистическая независимость от  $\varphi_m$  и равномерное распределение этого параметра в интервале  $[-\pi, \pi]$  сводят задачу к рассмотрению только однородных процессов. Затем из класса однородных процессов выбираются изотропные процессы путем наложения случайного равномерного распределения на интервал  $[-\pi, \pi]$  для ориентации  $\theta_m$  вектора  $\mathbf{p}_m$ . Таким образом, с этими двумя ограничениями параметры  $S$  и  $\chi$  моделируются изотропными случайными функциями в соответствии с существующей теорией атмосферной турбулентности.

Далее выберем совместную функцию плотности вероятности параметров  $\mathbf{p}_m$ ,  $F(\mathbf{p}_m)$ ,  $G(\mathbf{p}_m)$ ,  $\varphi_m$  и  $\psi_m$  таким образом, чтобы модельные спектры  $W_S^M$ ,  $W_\chi^M$  и  $W_{S\chi}^M$  совпадали с соответствующими теоретическими спектрами  $W_S$ ,  $W_\chi$  и  $W_{S\chi}$ .

С помощью приведенных выше условий можно выразить параметры уравнения (4) через теоретические спектры следующим образом (детальный вывод см. в [9]).

Амплитуды  $F$  и  $G$ :

$$F(p) = \sqrt{\frac{W_S(p)}{\pi M \Omega(p)}}; \quad G(k) = \sqrt{\frac{W_\chi(p)}{\pi M \Omega(p)}}. \quad (5)$$

Функция плотности вероятности (ФПВ)

$$\Omega(p) = 1/[2\pi p^2 \log(K_2/K_1)], \quad (6)$$

где  $[K_1, K_2]$  – интервал, в котором генерируются значения  $p$ .

Совместная ФПВ  $\eta(\psi, p)$  параметров  $\psi$  и  $p$

$$\eta(\psi, p) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha(p)}} \exp\left[-\frac{\psi^2}{4\alpha(p)}\right];$$

$$\alpha(p) = \log \sqrt{\frac{W_S(p) W_\chi(p)}{W_{S\chi}(p)}}. \quad (7)$$

При условии слабой турбулентности теоретические спектры могут быть получены из решения Рытова параболического уравнения, как [11]:

$$W_S(p) = 0,651 \Phi_n(p) \int dz C_n^2(z) \left[1 + \cos\left(\frac{z}{k} p^2\right)\right],$$

$$W_\chi(p) = 0,651 \Phi_n(p) \int dz C_n^2(z) \left[1 - \cos\left(\frac{z}{k} p^2\right)\right],$$

$$W_{S\chi}(p) = 0,651 \Phi_n(p) \int dz C_n^2(z) \sin\left(\frac{z}{k} p^2\right), \quad (8)$$

где  $\Phi_n$  – спектр показателя преломления;  $C_n^2(z)$  – контур структурной постоянной показателя преломления, и интегрирование проводится по пути распространения излучения.

Пошаговое описание процедуры моделирования можно найти в [9].

## 3. Результаты моделирования

С помощью уравнений (1)–(3) и моделирования по методу СВВ можно оценить относительную ошибку  $\sigma$ , определяемую уравнением (3). Моделирование проводится для случая колмогоровской турбулентности  $\Phi_n(p) = p^{-11/3}$ . В качестве основных параметров моделирования взяты следующие: предельные частоты  $K_1 = 10^{-3} \text{ м}^{-1}$  и  $K_2 = 10^3 \text{ м}^{-1}$ , а также число гармоник  $M = 100$ . Предельные частоты были выбраны после серии предварительных численных экспериментов, которые показали, что дальнейшее уменьшение  $K_1$  и увеличение  $K_2$  практически не изменяют окончательных результатов. Число гармоник было выбрано аналогичным образом. Число реализаций, используемых для статистического усреднения в уравнении (3), равнялось 1000. Моделирование проводилось для двух схем распространения излучения, которые представляют интерес с практической точки зрения: переменная  $C_n^2$  (вертикальное распространение) и постоянная  $C_n^2$  (горизонтальное распространение).

Для расчета с переменной  $C_n^2$  использовалась модель Хафнагеля для  $C_n^2(z)$  [12] в следующем виде:

$$C_n^2(z) = C_0 r_0^{-5/3} \times k^{-2} \left[ \left( \frac{z}{z_0} \right)^{10} \exp\left(-\frac{z}{z_1}\right) + \exp\left(-\frac{z}{z_2}\right) \right], \quad (10)$$

где  $r_0$  – параметр Фрида;  $k$  – волновое число;  $C_0 = 1,027 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-3}$ ,  $z_0 = 4,632 \cdot 10^3 \text{ м}$ ,  $z_1 = 10^3 \text{ м}$ ,  $z_2 = 1,5 \cdot 10^3 \text{ м}$ .

Выражения для спектров  $W_S$ ,  $W_\chi$  и  $W_{S\chi}$ , соответствующих рассматриваемой модели, можно найти в [9]. Результаты моделирования приведены на рис. 1, а

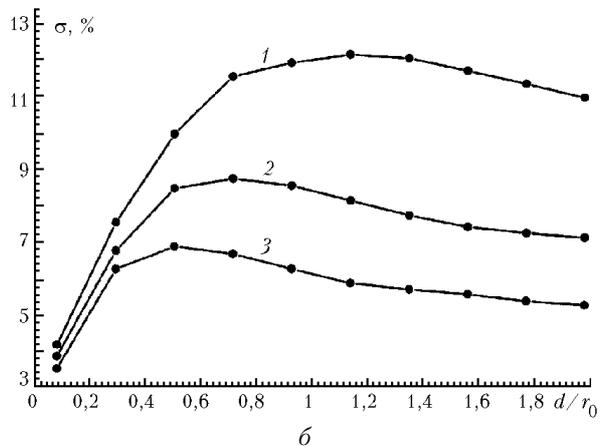
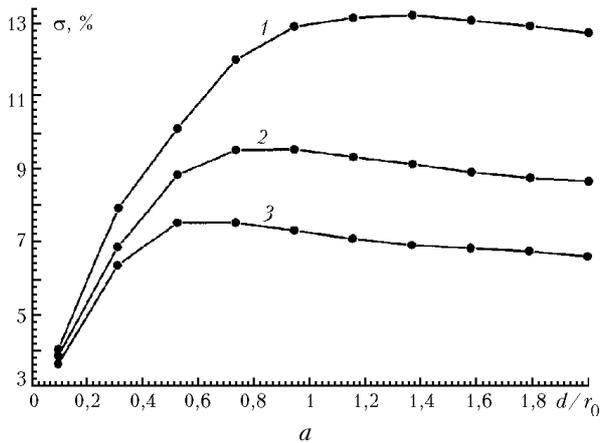


Рис. 1. Относительная ошибка  $\sigma$  в зависимости от отношения диаметра линзы  $d$  к параметру Фрида  $r_0$ : а – вертикальное направление распространения излучения (модель Хафнагеля контура  $C_n^2$ ); б – горизонтальное. а, б – 1 –  $r_0 = 0,1 \text{ м}$ ,  $\sigma_\chi = 0,3$ ; 2 –  $r_0 = 0,15 \text{ м}$ ,  $\sigma_\chi = 0,21$ ; 3 –  $r_0 = 0,2 \text{ м}$ ,  $\sigma_\chi = 0,16$ ;  $\lambda = 0,55 \text{ мкм}$

в виде зависимости относительной ошибки от отношения диаметра линзы  $d$  к параметру Фрида  $r_0$ . Кроме того, на графике указаны величины длины волны  $\lambda$ , параметра Фрида  $r_0$  и стандартного отклонения логарифма амплитуды  $\sigma_\chi$ .

Для случая горизонтального распространения излучения  $C_n^2(z)$  постоянна, т.е.  $C_n^2(z) = C_n^2$ . Теоретические спектры можно выразить следующим образом:

$$W_S(p) = 1,544 r_0^{-5/3} p^{-11/3} \left[ 1 + \frac{k}{p^2 L} \sin\left(\frac{p^2 L}{k}\right) \right],$$

$$W_\chi(p) = 1,544 r_0^{-5/3} p^{-11/3} \left[ 1 - \frac{k}{p^2 L} \sin\left(\frac{p^2 L}{k}\right) \right], \quad (11)$$

$$W_{S\chi}(p) = 1,544 r_0^{-5/3} p^{-11/3} \frac{k}{p^2 L} \left[ 1 - \cos\left(\frac{p^2 L}{k}\right) \right],$$

где  $L$  – длина пути распространения излучения и  $r_0 = 1,68(k^2 C_n^2 L)^{-3/5}$ .

Результаты моделирования для горизонтального направления распространения излучения представлены на рис. 1, б. Так же, как и в предыдущем случае, относительная ошибка приводится в зависимости от отношения диаметра линзы к параметру Фрида. Для сравнения длина пути распространения излучения выбрана таким образом, чтобы обеспечить такое же значение  $\sigma_\chi$ , как и в предыдущем случае.

Как видно из рис. 1, ошибка сначала растет до максимума, а затем постепенно приближается к определенному асимптотическому значению. Такое поведение можно объяснить следующим образом. Судя по уравнениям (1)–(3), в данной задаче присутствуют три различных масштаба: радиус корреляции амплитуды, радиус взаимной корреляции градиента фазы и амплитуды и радиус корреляции градиента фазы.

В начальной части, когда размер апертуры мал по сравнению с радиусом корреляции флуктуаций амплитуды, основной вклад в ошибку вносится линейными компонентами амплитуды и градиента фазы, которые обеспечивают почти линейное увеличение ошибки. Затем, по мере того как размер апертуры увеличивается и становится больше, чем радиус корреляции амплитуды, но остается малым по сравнению с радиусом взаимной корреляции градиента фазы и амплитуды, нелинейные члены начинают вносить больший вклад в величину ошибки. В этой части ошибка увеличивается медленнее и нелинейным образом и достигает максимального значения, когда размер апертуры становится одного порядка с радиусом взаимной корреляции амплитуды и градиента фазы. Наконец, когда размер апертуры становится больше, чем радиус взаимной корреляции амплитуды и градиента фазы, основной вклад в ошибку вносится теми зонами апертуры, которые имеют размер, сравнимый с радиусом взаимной корреляции амплитуды и градиента фазы. На этом участке можно видеть, что ошибка медленно приближается к асимптотическому значению.

Из сравнения рис. 1, а и б, можно сделать вывод, что величина эффекта не очень сильно различается для двух схем зондирования. Это означает, что исследуемый эффект незначительно зависит от детальной структуры контура  $C_n^2$ , он, скорее, определяется двумя интегральными параметрами контура  $C_n^2$ : интегральной величиной турбулентности (параметр Фрида) и уровнем флуктуаций (дисперсия логарифма амплитуды).

## Заключение

Оценено влияние флуктуаций на результаты измерений центра тяжести изображения. Полученные результаты показали, что в условиях слабой турбулентности величина данного эффекта не превышает 15%. Однако данный эффект растет с ростом турбулентности. Поэтому можно ожидать, что в условиях сильной турбулентности флуктуации будут оказывать довольно сильное влияние на центр тяжести изображения, и, начиная с определенного уровня турбулентности, это может сделать невозможным восстановление фазы из измерений центра тяжести изображения.

Величина исследуемого эффекта оценивалась для двух схем распространения излучения: постоянной  $C_n^2$  (горизонтальное распространение) и  $C_n^2$ , изменяющейся вдоль трассы (вертикальное распространение). Сравнение результатов показало, что между этими двумя схемами существует определенное отличие, но оно невелико. Это означает, что величина эффекта в основном зависит не от детальной структуры контура Фрида и дисперсии логарифма амплитуды.

1. *Войцехович В.В., Губин В.Б., Микулич А.В.* Оценка параметров адаптивных астрономических систем на основе экспериментальных данных // Оптика атмосф. 1988. Т. 1. № 5. С. 66–70.
2. *Rigaut F., Rousset G., Kern P., Fontanella J.C., Gaffard J.P., Merkle F.* Adaptive optics on a 3.6-m telescope: results and performance // Astron. and Astrophys. 1991. V. 250. P. 280–290.

3. *Jiang W., Li H., Liu C., Wu X., Huang S., Xian H., Rong Z., Wang C., Li M., Ling N., and Guan C.* A 37 element adaptive optics system with H-S wavefront sensor // Proc. ICO-16 Satellite Conf. on Active and Adaptive Optics / F. Merkle, ed. ICO 16 Secretariat, Garching, Germany, 1993. P. 127–135.
4. *Li H., Xian H., and Jiang W.* Atmospheric turbulence parameter measurement using Hartmann-Shack wavefront sensor // Proc. ICO-16 Satellite Conf. on Active and Adaptive Optics / F. Merkle, ed. ICO 16 Secretariat, Garching, Germany, 1993. P. 21–25.
5. *Colucci D., Lloyd-Hart M., Wittman D., Angel R., Ghez A., and McLeod B.* A reflective Shack-Hartmann wave-front sensor for adaptive optics // Publ. Astron. Soc. Pacif. 1994. V. 106. P. 1104–1110.
6. *Rigaut F., Ellerbroek B.L., Northcott M.J.* Comparison of curvature-based and Shack-Hartman-based adaptive optics for large astronomical telescopes // Appl. Opt. 1997. V. 36. P. 2856–2868.
7. *Voitsekhovich V.V.* Hartmann test in atmospheric research // J. Opt. Soc. Amer. A. 1996. V. 8. P. 1749–1757.
8. *Roddier F.* The effects of atmospheric turbulence in optical astronomy // Progr. in Optics. 1981. V. 19. P. 281–376.
9. *Kouznetsov D., Voitsekhovich V.V., and Ortega-Martinez R.* Simulation of turbulence-induced phase and log-amplitude distortions // Appl. Opt. 1997. V. 36. P. 464–469.
10. *Voitsekhovich V.V., Kouznetsov D., Orlov V.G., Cuevas S.* Method of random wavevectors in simulation of anisoplanatic effects // Appl. Opt. 1999. V. 38. P. 3985–3992.
11. *Tatarskii V.I.* The Effects of the Turbulent Atmosphere on Wave Propagation. National Science Foundation Report TT-68-50464, 1968.
12. *Hufnagel R.E.* Variation of atmospheric turbulence // Optical Propagation through Turbulence, OSA Technical Digest Series. OSA, Washington, D.C. 1974. P. WA1-1–WA1-4.

### *V.V. Voitsekhovich, V.G. Orlov, and Sanchez L.J.* Influence of atmospheric scintillations on the image centroid.

The influence of scintillations on the image centroid is investigated by means of computer simulations. The simulations have been performed for the case of weak-turbulence conditions for both varying and constant  $C_n^2$  (vertical and horizontal propagation). It is shown that, under the weak-turbulence conditions, the magnitude of the effect does not exceed 15%. However, because the magnitude of the effect grows up with the increasing turbulence, one can expect quite strong influence of scintillations on the image centroid under the strong-turbulence conditions. The comparison of the results for vertical and horizontal propagation shows that there is no strong dependence of the magnitude of the effect on the detailed structure of  $C_n^2$  profile: probably, this magnitude is determined mainly by two profile: the integral turbulence strength (Fried parameter) and the scintillation level (log-amplitude variance).