

Ю.Н. Исаев

Синтез вэйвлет-базиса для анализа оптических сигналов. Часть I. Ортогональный вэйвлет-базис

Институт оптического мониторинга СО РАН, г. Томск

Поступила в редакцию 23.07.2002 г.

Для анализа и реконструкции оптических сигналов используются различные ортогональные базисы. Представлен алгоритм, позволяющий синтезировать ортогональные вэйвлеты, подчиняющиеся условию кратномасштабного анализа, и большое число новых вэйвлетов, полученных по этому алгоритму. Приводится синтез ортогональных симметричных вэйвлетов, примеры сжатия и фильтрации изображения, демонстрируются высокие локальные свойства вэйвлетов, их способность разлагать сигнал по масштабам неоднородности.

Введение

Интенсивность и фаза оптического излучения, прошедшего атмосферу со случайными неоднородностями, используются для извлечения информации об атмосфере или передачи информации через нее. В результате взаимодействия с турбулентной средой распространения фаза и интенсивность волны становятся топологически сложными объектами. Происходит преобразование гладкого рельефа волнового фронта в прерывистую изломанную структуру со степенными особенностями и сингулярностями.

Для удобства и упрощения анализа эти сложные математические объекты, условно будем называть их случайными оптическими сигналами, обычно представляются в виде сумм ортогональных составляющих бесчисленным количеством способов. И поскольку каждый раз система ортогональных функций, применяемая для разложения, бывает известна, то интенсивность или фаза оптической волны полностью определяются наборами весовых чисел для этих функций.

Такие наборы чисел – это спектры оптических сигналов. Спектр – это единственно возможная форма аналитического выражения сигналов в рамках линейной теории, и весь вопрос сводится лишь к выбору наиболее подходящей базисной системы функций, удобной для решения той или иной практической задачи. Насколько адекватным реальности окажется восстановление сигнала, зависит от удачи выбора базиса. При решении задач восстановления поля возникает необходимость хранить большие массивы данных изображения, устранять шумы изображения, сокращать время обработки данных и тем самым приблизиться к реальным временным масштабам физического процесса, отслеживать эволюцию частоты сигнала, вызванную различными временными и пространственными масштабами неоднородности.

В данной статье не будем рассматривать полиномиальные функции, гладкость которых заставляет их

вести себя определенным образом, потому что сигналы, с которыми приходится встречаться на практике, хотя и непрерывные, но не дифференцируемые. Полиномиальные функции не достаточно гибки, чтобы отслеживать скачки и степенные особенности натуральных сигналов. Поэтому в данной статье рассмотрим вэйвлет-базисы, обладающие фрактальным свойством самоподобия и позволяющие отслеживать сингулярности и изломы исследуемого сигнала. Замечательное свойство самоподобия является причиной других полезных свойств, таких как локальность, возможность быстрых преобразований, высокой степени компрессии сигналов и изображений, выделения сингулярных особенностей и фрактальной структуры случайного сигнала, разложения исследуемого сигнала по масштабам неоднородности.

В настоящий момент существует широкий класс вэйвлет-базисов различной природы, однако их математическое описание слабо освещено в отечественной литературе. Количество публикаций по синтезу вэйвлет-преобразований не велико. Отметим некоторые из них. Полезной и интересной является работа о возможностях приложения вэйвлет-преобразований [1]. Наиболее информативными можно назвать работы [2, 3], в которых приводятся классификация вэйвлетов и все необходимые теоремы по синтезу вэйвлет-преобразований. Недавно появился перевод замечательных, фундаментальных книг по конструкции вэйвлетов И. Добеши [4] и Ч. Чуи [5]. И наконец, самым мощным источником информации о вэйвлетах остается Internet. На сайтах <http://www.mathsoft.com/wavelet.html>, <http://playfair.stanford.edu/~wavelab>, www.wavelet.org, www.math.spbu.ru/~dmp/ можно получить информацию о программах, статьях, конференциях по теории и приложениям вэйвлетов. Последним из перечисленных является сайт Санкт-Петербургского семинара «Всплески и их приложение». Для инженеров, интересующихся приложениями готовых программ по вэйвлет-преобразованиям, можно пореко-

мендовать известные математические программные средства MATLAB-6.1, Mathematica-4 и Mathcad-2001 (Wavelet Extension).

В данной статье проведем синтез новых вэйвлет-базисов и покажем на примерах их применение для обработки сигналов. Новые они потому, что ни один из полученных ниже вэйвлетов не относится к известным группам, которые приводятся в существующей литературе по данной теме. Ниже будет рассмотрен синтез симметричных вэйвлетов, который, по утверждению авторов большого количества статей по вэйвлетам, принципиально невозможен. Из широкого класса вэйвлетов будем конструировать только ортогональные вэйвлеты и только те, которые подчиняются свойству кратномасштабного анализа. Именно это свойство позволяет осуществлять эффективные быстрые алгоритмы разложения и восстановления.

Для удобства анализа исследуемый сигнал $f(x)$ раскладывается в ряд по ортонормированным вэйвлет-функциям

$$\begin{aligned} \Psi_{jk}(x) &= 2^{-j/2} \Psi(2^{-j} x - k); \\ f(x) &= \sum_{jk} c_{jk} \Psi_{jk}(x). \end{aligned} \quad (1)$$

Коэффициенты разложения определяются скалярным произведением

$$c_{jk} = \langle f, \Psi_{jk} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Psi_{jk}(x) dx. \quad (2)$$

Построим базисную функцию $\Psi(x)$, используемую в разложении (1). Для этого выберем скейлинговую (масштабную) функцию $\varphi(x)$, обладающую фрактальным свойством кратномасштабности:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^N p_k \varphi(2x - k). \quad (3)$$

Это выражение называется масштабирующим уравнением и является фундаментальным выражением в теории вэйвлетов. Оно является инструментом для построения новых вэйвлетов и дает существенную экономию вычислительных затрат. Заметим, что аналитического вида функция $\varphi(x)$ не имеет. Функция $\varphi(x)$ образуется в результате сжатия и сдвигов себе подобных функций. Вид функции $\varphi(x)$ определяется коэффициентами разложения и их количеством, т.е. верхним индексом суммирования. Верхний индекс N является также и носителем функции $\varphi(x)$, $N = \text{supp } \varphi(x)$. Найти подобную функцию, значит, определить коэффициенты этого разложения.

Составим для коэффициентов необходимую систему уравнений. Для этого подчиним функцию $\varphi(x)$ условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1. \quad (4)$$

Для коэффициентов это выражение преобразуется в следующее:

$$\sum_{k=1}^N p_k = 1. \quad (5)$$

Будем считать, что $\varphi(x)$ подчиняется условиям ортогональности

$$\langle \varphi(x), \varphi(x - k) \rangle = \delta_{0k}. \quad (6)$$

Подставим (3) в (6) и получим для коэффициентов

$$\sum_{k=0}^N p_k p_{k+2m} = \delta_{0m}, \quad m = 0, \dots, N/2. \quad (7)$$

Вэйвлет-функция $\Psi(x)$ в этом случае определяется соотношением [4, 5]:

$$\Psi(x) = \sum_{k=0}^N (-1)^k p_{N-k} \varphi(2x - k), \quad (8)$$

которое является следствием выражения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) dx = 0.$$

Система уравнений (5) и (7) необходима, чтобы решить вариационную задачу по определению коэффициентов для конструкции вэйвлетов. Например, при $N = 4$ мы имеем уравнения

$$\sum_{k=0}^4 p_k^2 = 1, \quad p_0 p_2 + p_1 p_3 = 0. \quad (9)$$

Чтобы сузить неоднозначность, в [3] предлагается привлечь уравнение моментов для функции $\varphi(x)$: $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) x^m dx = M$. Тогда получим еще несколько уравнений

$$\sum_{k=0}^N (-1)^k k^m p_k = M, \quad m = 0, \dots, N/2. \quad (10)$$

Однако, при таких дополнительных условиях, сходимость численных, вариационных алгоритмов в большей степени зависит от удаи выбора начальных, стартовых, значений коэффициентов. Это требует определенных навыков от исследователя. Если стартовые значения выбраны неудачно, итерационный алгоритм может просто не сойтись. Причем из решения исключаются вэйвлеты, не подчиняющиеся ограничению (10), т.е. вэйвлеты с меньшей гладкостью. Поэтому нужны жесткие условия, которые бы, с одной стороны, допускали известный произвол в задании стартовых значений вариационного алгоритма, а с другой стороны, позволили бы «выловить» все возможные решения.

Автором статьи получен критерий, по сути, являющийся более жестким требованием на ортогональность и выражающийся соотношениями

$$\sum_{k=0}^N p_k p_{k+1} = b_1, \quad (11)$$

$$\sum_{k=0}^N p_k p_{k+3} = b_3; \quad (12)$$

$$b_3 = 0,5 - b_1, \quad (13)$$

где $b_1 \leq 1/\sqrt{3}$ и $b_0 = 1$, $b_2 = b_4 = 0$ в соответствии с условием (7). Заметим, что индекс у коэффициентов b соответствует фиксированному индексу в выражениях (7), (10) и (11). Непрерывно изменяя значения коэффициента b_1 от его максимального значения $\approx 0,56$ в сторону уменьшения и используя уравнения (11) – (13) вместе с уравнением (7), можно получить все возможные решения коэффициентов для конструкции ортогональных вэйвлетов. С помощью описанного алгоритма можно, например, проследить эволюцию перехода известного второго вэйвлета Добеши в первый вэйвлет Хаара–Добеши. А в промежутке между первым и вторым вэйвлетами предложенный алгоритм показывает каскад вэйвлетов с разной степенью гладкости (рис. 1). Используя вышеописанный алгоритм, автор получил большое разнообразие вэйвлетов с различной степенью гладкости и различными N -носителями функции $\varphi(x)$, причем, начиная с $N = \text{supp}\varphi(x) = 5$, одно из множества решений было для симметричного вэйвлета. Некоторые из решений автору удалось получить аналитически.

После определения коэффициентов необходимо представить графически скейлинговую $\varphi(x)$ и вэйвлет-функции $\Psi(x)$. Как было сказано выше, аналитического вида эти функции не имеют. Поэтому приведем алгоритм графического представления функций $\varphi(x)$ и $\Psi(x)$. Для этого будем использовать уравнение (3)

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^N p_k \varphi(2x - k). \quad (14)$$

Выберем в качестве x дискретные значения $s = 1, 2, \dots, N - 1$, тогда уравнение (3) можно переписать в виде

$$\varphi(s) = \sum_{k=0}^N p_{2s-k} \varphi(k). \quad (15)$$

Как нетрудно заметить, это уравнение на собственные значения, которое можно переписать в виде

$$\mathbf{A}\varphi = \varphi. \quad (16)$$

В частности, при $N = 4$ мы получаем уравнение, где матрица \mathbf{A} имеет размерность 3×3 :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} p_1 & p_0 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 \\ 0 & p_4 & p_3 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Уравнение на собственные значения (16) и условие нормировки $\sum_{k=0}^N \varphi(k) = 1$ позволяют нам определить

$\varphi(x)$ в точках $x = 1, 2, 3, \dots, N - 1$. Напомним, что в точках $x = 0$ и $x = N$ $\varphi(x) = 0$. Далее находим $\varphi(x)$ в точках $x/2$ ($x = 1, 2, \dots, N - 1$) с помощью рекуррентного соотношения (14). Таким образом, итерация продолжается до необходимой степени точности. Значение вэйвлет-функции $\Psi(x)$ определяется параллельно со скейлинговой функцией $\varphi(x)$ в тех же точках с помощью соотношения (8).

Приведем коэффициенты, полученные автором для функций $\varphi(x)$ и $\Psi(x)$ решением вариационной задачи с использованием уравнений (7)–(11) при $N = 4$:

$$a = 3,3431457; \quad p_0 = \frac{1 - \sqrt{a}}{12}, \quad p_1 = \frac{3 - \sqrt{a}}{6},$$

$$p_2 = \frac{5 + \sqrt{a}}{6}, \quad p_3 = \frac{3 + \sqrt{a}}{6}, \quad p_4 = \frac{1 - \sqrt{a}}{12},$$

и приведем графические зависимости функций $\varphi(x)$ и $\Psi(x)$, полученные с использованием вышеописанного алгоритма (рис. 2,а).

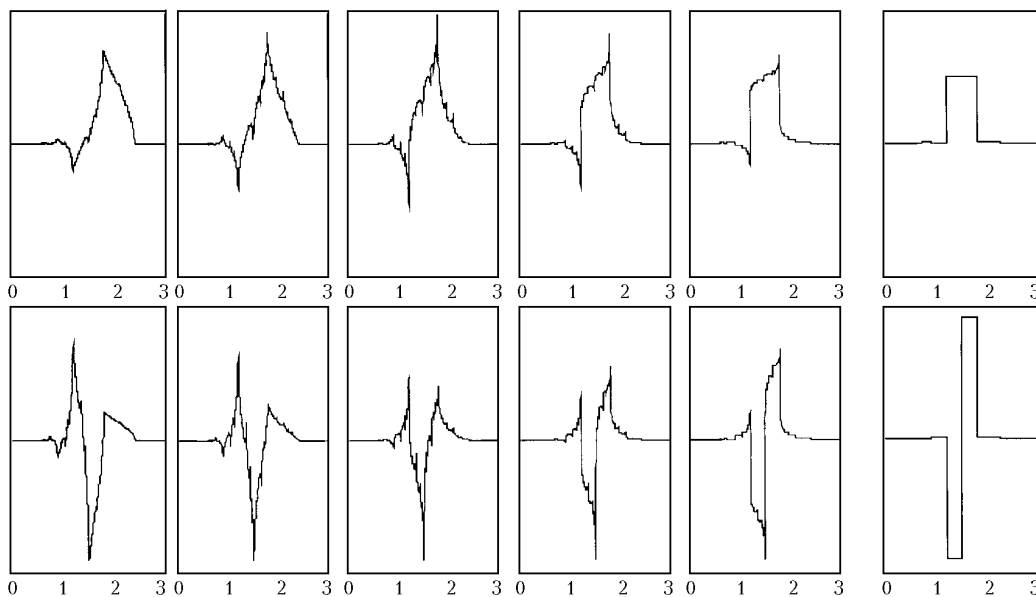


Рис. 1. Эволюция преобразования вэйвлета Добеши-2 в вэйвлет Хаара; верхний ряд – скейлинговые функции, нижний ряд – вэйвлеты

Как видно из рис. 2,б, скейлинговая функция $\varphi(x)$ имеет фрактальный характер. Выделенный маленький фрагмент, увеличенный в несколько раз, ярко демонстрирует фрактальность функции $\varphi(x)$. На рис. 3,а представлена модельная функция, имеющая скачки производной, а на рис. 3,б представлены последовательные этапы вэйвлет-восстановления модель-

ной функции с привлечением все большего и большего числа вэйвлетов. При восстановлении функции производилась сортировка коэффициентов, и оставались наиболее значимые коэффициенты. Такой процесс называется сжатием или компрессией сигнала. Наибольшее число коэффициентов K в разложении равнялось $2^{10} = 1024$.

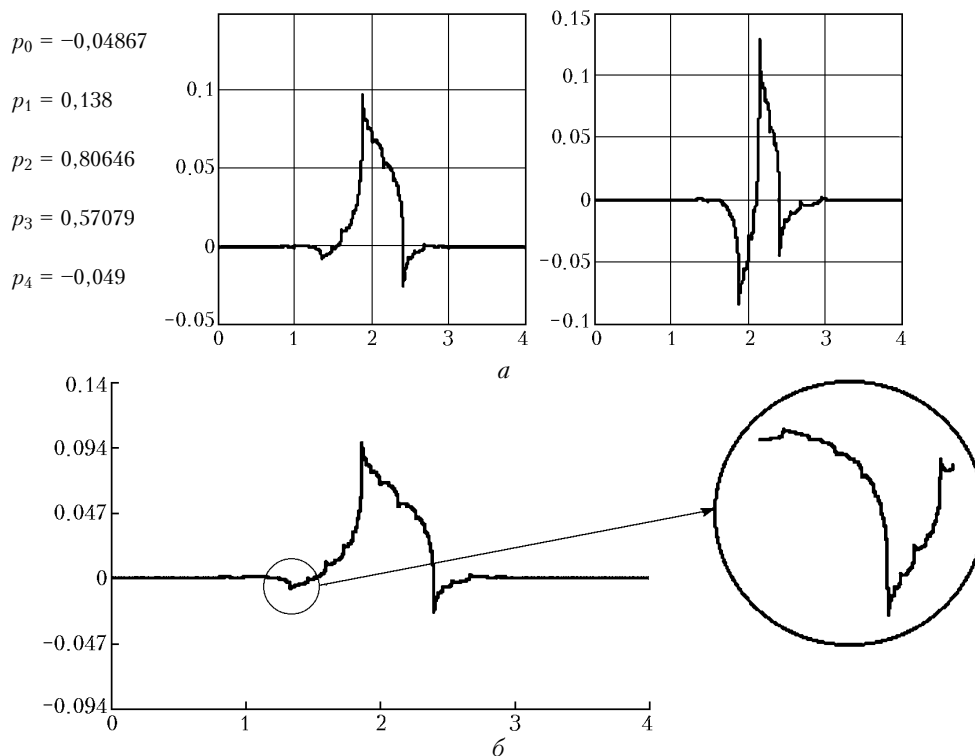


Рис. 2. Коэффициенты, φ - (слева) и Ψ - (справа) функции при $N = 4$ (а); демонстрация фрактальной структуры скейлинговой функции (б)

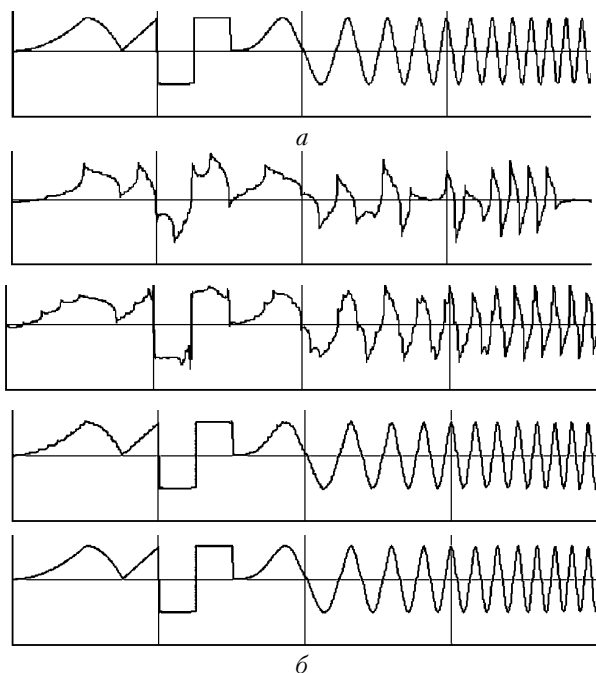


Рис. 3. Модельный сигнал (а) и вэйвлет-разложение сигнала при $K = 2^4, 2^6, 2^8, 2^{10}$ сверху вниз соответственно (б)

Для синтеза более гладкого вэйвлета увеличим значение коэффициента b_1 в уравнении (11). После вариации коэффициентов получим следующие значения и графические зависимости для скейлинговой и вэйвлет-функций соответственно (рис. 4,а).

Приведем синтез симметричного вэйвлета. Симметричный вэйвлет, в силу симметрии коэффициентов, позволяет существенно сократить время разложения и восстановления сигнала. Он является предпочтительным еще и потому, что обычно имеет большее число нулевых моментов, что приводит к лучшей сжимаемости сигналов. Там, где сигнал гладкий, его коэффициенты разложения для мелких масштабов будут нулевыми.

В работах [4, 5] приводится синтез симметричных вэйвлетов в рамках кратномасштабного анализа, но, к сожалению, они либо не ортогональны, либо обладают слабой симметрией (симлеты, Койфлеты). Вероятно, категоричное утверждение о невозможности построения симметричных ортогональных вэйвлетов в работе [4] оттолкнуло исследователей от данной проблемы. В нашем случае вэйвлеты приобретают симметричность за счет незначительной потери гладкости и точности. (Говоря о неточности, мы имеем в виду

погрешность, не превышающую желаемый уровень точности восстановления сигнала). Для синтеза симметричного вэйвлета следует решить вариационную задачу для уравнений (9), (11) и (12) с дополнительным условием симметрии коэффициентов. После несложных преобразований получим следующую систему уравнений:

$$2p_0^2 + 2p_1^2 + p_2^2 = 1, \quad (18)$$

$$2p_0 p_2 = -p_1^2, \quad (19)$$

$$2p_0 - 2p_1 + p_2 = 0. \quad (20)$$

Решением этой системы уравнений будет:

$$p_0 = -\frac{\sqrt{15134 - 10304\sqrt{2}}}{322}, \quad p_4 = p_0,$$

$$p_2 = \frac{4\sqrt{2093 - 322\sqrt{2}} - \sqrt{15134 - 10304\sqrt{2}}}{161},$$

$$p_1 = \sqrt{-2p_2 p_0}, \quad p_3 = p_1.$$

Полученные коэффициенты, скейлинговая и вэйвлет-функции представлены на рис. 4,б.

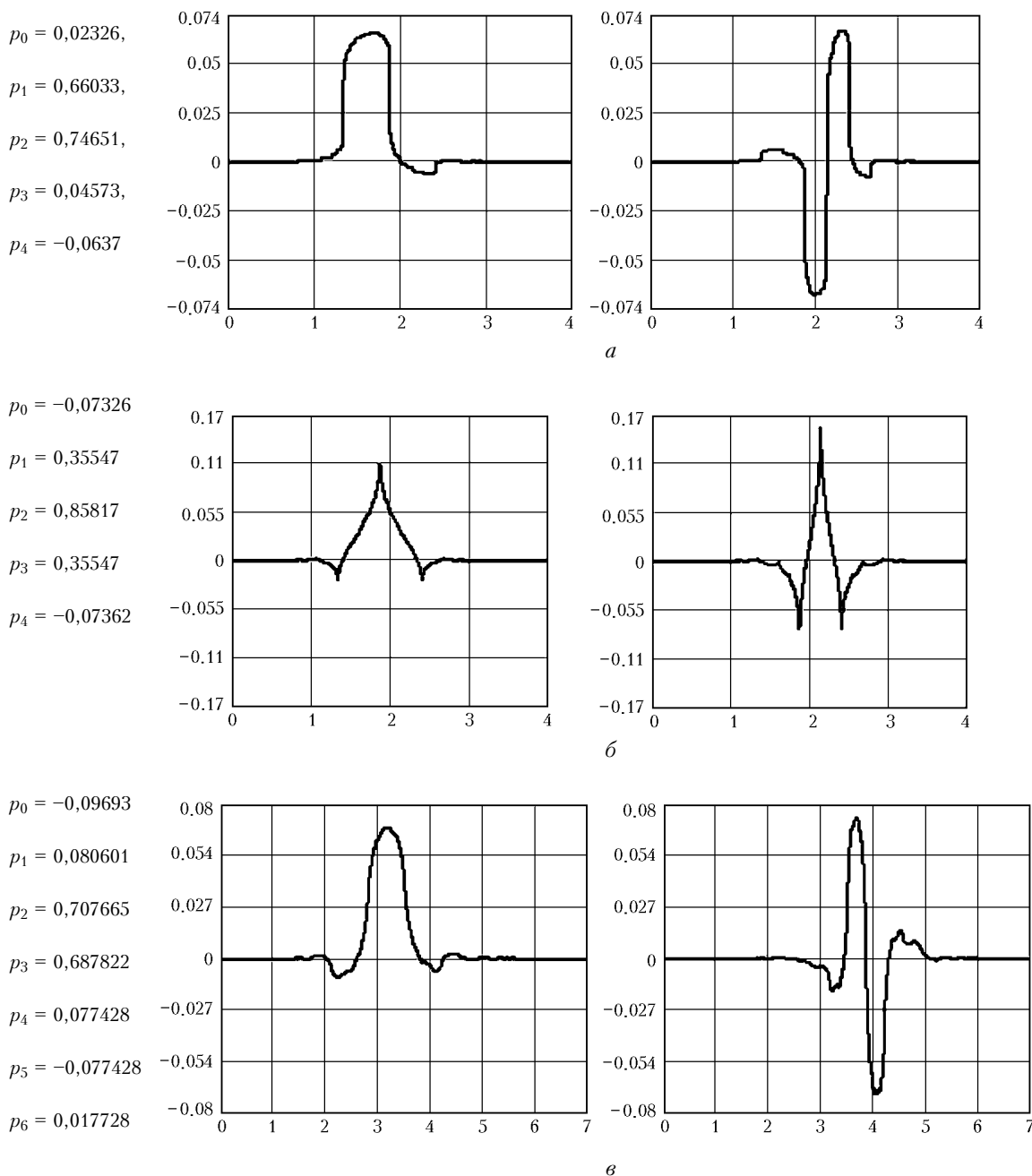


Рис. 4. ϕ – скейлинговая функция (слева) и Ψ – вэйвлет (справа)

Для того чтобы вэйвлет имел более высокую гладкость, увеличим носитель скейлинговой функции $N = \text{supp } \varphi(x)$. При $N = 6$ получаем коэффициенты и графики для $\varphi(x)$ и $\Psi(x)$, которые представлены на рис. 4,в. Полученный вэйвлет обладает более высокой гладкостью и близок к симметричному. Используем синтезированные вэйвлеты для компрессии сигнала. «Набросим» на модельный сигнал (рис. 5,а) 5%-й шум (рис. 5,б) и попытаемся избавиться от шума. Результаты фильтрации сигнала представлены на рис. 5,в-д. Максимальное число коэффициентов разложения K равнялось 2^9 .

Чтобы улучшить симметрию скейлинговой функции, необходимо увеличить носитель N и учесть дополнительное условие симметрии коэффициентов. Например, если при $N = 7$ дополнительно принять $p_0 = p_7, p_1 = p_6, p_2 = p_5, p_3 = p_4$, то система уравнений сокращается до четырех уравнений. Решив такую систему, получим группу вэйвлетов, приведенных на рис. 6.

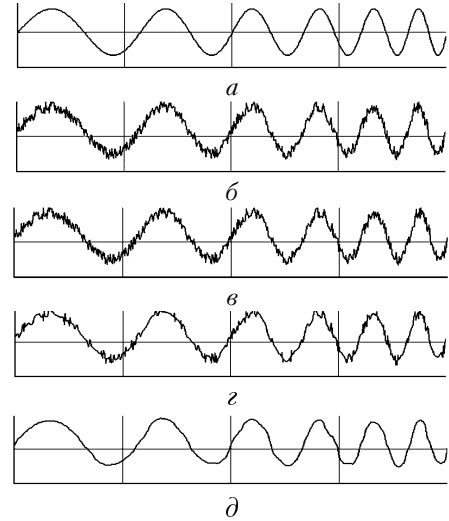


Рис. 5. Фильтрация модельного сигнала. K – число коэффициентов разложения: а – модельный сигнал; б – модельный сигнал с 5%-м шумом; восстановленные сигналы: в – при $K = 2^9$; д – при $K = 2^7$

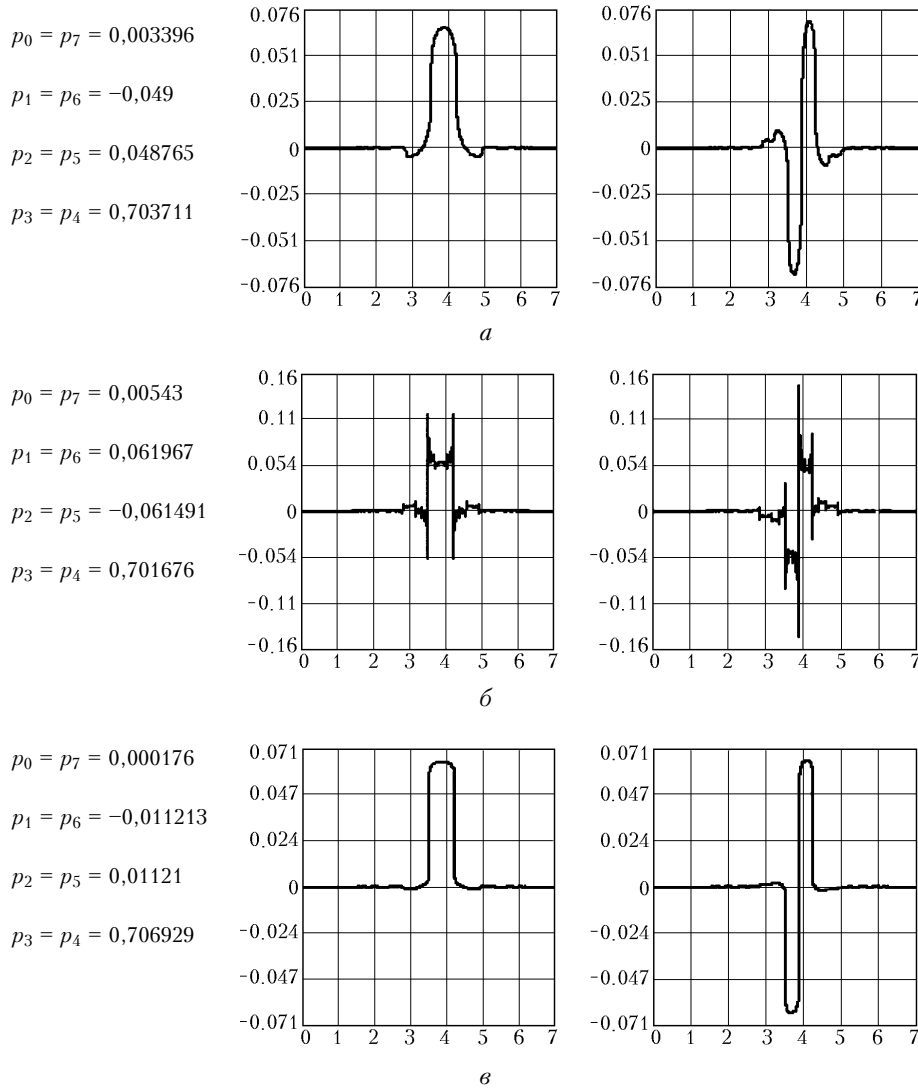


Рис. 6. φ – скейлинговая функция (слева) и Ψ – вэйвлет (справа)

Хочу обратить внимание читателя на то, что для первого и второго коэффициентов выполняется равенство $p_1 = -p_2$, значит, систему уравнений можно было сократить еще на одно уравнение. Таким образом, достаточно варьировать только три коэффициента.

Приведем вэйвлет-разложение разрывного модельного сигнала, представленного на рис. 7,а, демонстрирующее хорошие локальные свойства вэйвлетов. В качестве базисного выбран симметричный вэйвлет, представленный на рис. 6,а.

Приведем коэффициенты и графики еще нескольких вэйвлетов, полученных автором по описанному алгоритму при $N = 8$ (рис. 8,а), $N = 9$ (рис. 8,б) и $N = 10$ (рис. 8,в). Покажем на примере способность вэйвлетов хорошо разделять сигнал по масштабам неоднородности. Для примера будем использовать вэйвлет, изображенный на рис. 8,в.

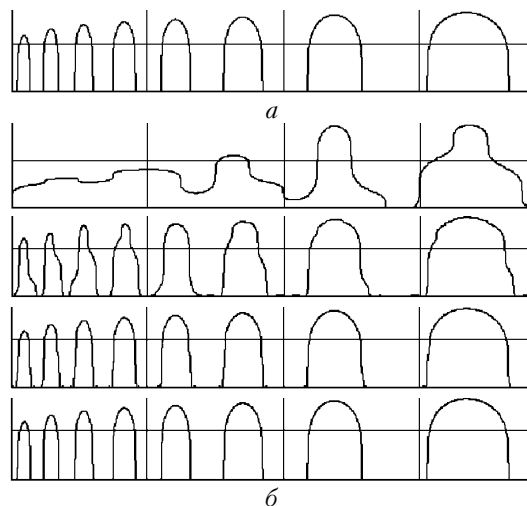


Рис. 7. Модельный сигнал (а) и вэйвлет-разложение сигнала при $K = 2^4, 2^6, 2^8, 2^{10}$ сверху вниз соответственно (б)

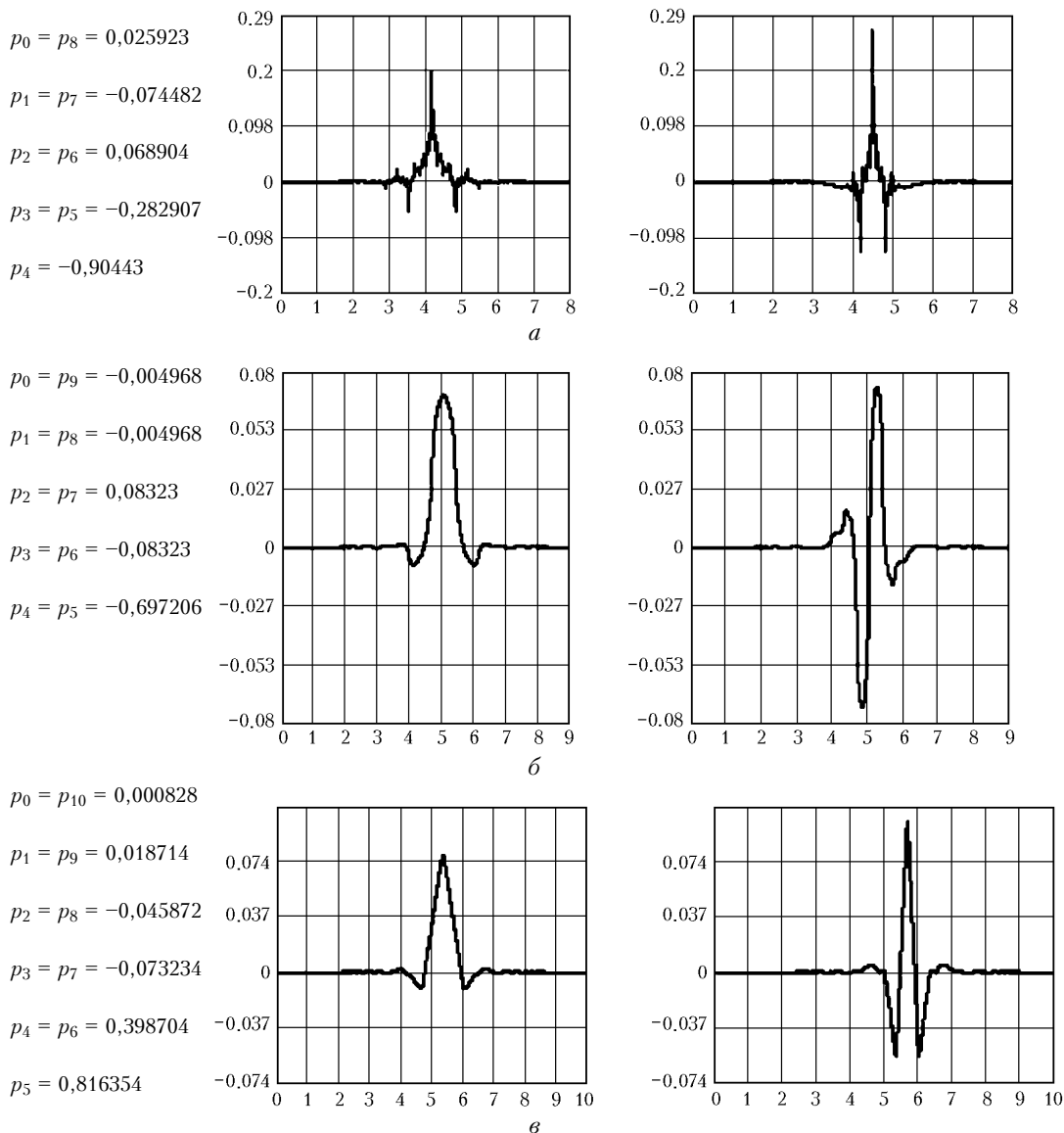


Рис. 8. φ – скейлинговая функция (слева) и Ψ – вэйвлет (справа)

В качестве модельного сигнала возьмем сумму двух синусоид (рис. 9,а). Частота одной синусоиды в 10 раз больше другой. Амплитуда высокочастотной синусоиды в 2 раза меньше низкочастотной.

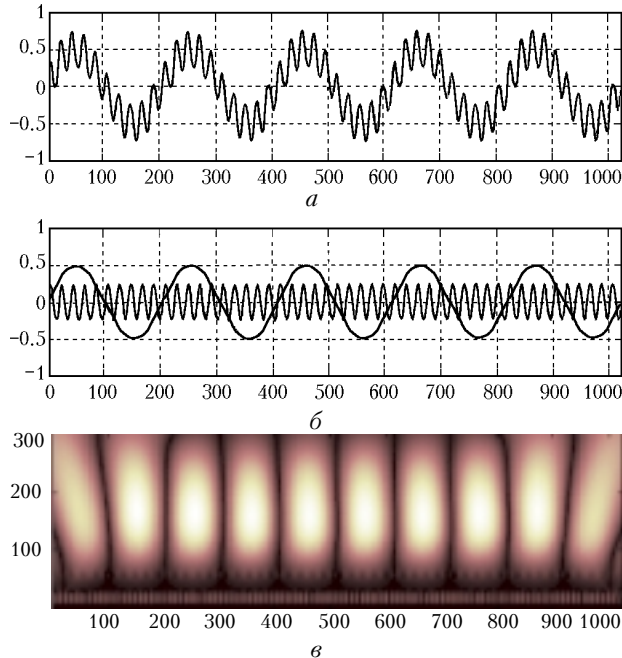


Рис. 9. Модельный сигнал – сумма двух синусоид (а); разделение модельного сигнала по масштабам неоднородности с помощью вэйвлет-разложения (б); картина абсолютных значений коэффициентов вэйвлет-разложения модельного сигнала (в)

На рис. 9,б показан низкочастотный тренд, полученный удерживанием только первых 2^5 членов разложения из 2^{10} . Там же представлен высокочастотный тренд, полученный вычитанием первых 2^5 членов разложения из 2^{10} . На рис. 9,в дана картина абсолютных значений коэффициентов разложения, представляющая собой развертку масштабов неоднородности модельного сигнала.

Yu.N. Isaev. Synthesis of wavelet basis for analysis of optical signals. Part 1. Orthogonal wavelet basis.

To analyze and reconstruct random optical signals, various orthogonal bases are used. The algorithm allowing one to synthesize orthogonal wavelets under the condition of multiple scale analysis is presented, and a large number of new wavelets are obtained with this algorithm. Orthogonal symmetric wavelets are synthesized. Examples of images compression and filtration are presented. Local properties of wavelets and the possibility of signal expansion in terms of inhomogeneity scales are demonstrated.

В работе представлен вариационный алгоритм для определения коэффициентов скейлинговой функции в масштабирующем уравнении. Алгоритм имеет жесткие условия ограничения, что позволяет получать быструю сходимость вариационного алгоритма и определять все возможные решения при заданном носителе скейлинговой функции.

Вариационный алгоритм позволяет синтезировать ортогональные вэйвлеты, подчиняющиеся условию кратномасштабного анализа. Приводится большое количество новых вэйвлетов, синтезированных по этому алгоритму. Впервые получены ортогональные симметричные вэйвлеты, подчиняющиеся кратномасштабному анализу. Приводятся примеры сжатия и фильтрации изображения. Продемонстрированы локальные свойства вэйвлетов и способность разложения сигналов по масштабам неоднородности.

Во второй части данной статьи предполагается подробно описать алгоритм синтеза неортогональных, симметричных вэйвлетов. Будут приведены алгоритмы представления дифференциальных и интегральных операторов через вэйвлет-базисы, которые, в частности, могут быть полезными при моделировании наклонов фронта волны, имеющей прерывистую структуру (прямая задача), а также при восстановлении сигнала по его локальным наклонам с областями замирания сигнала (обратная задача).

1. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физ. наук. 1996. Т. 166. № 11. С. 1145–1170.
2. Новиков И.Я., Стечкин С.Б. Основы теории всплесков // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. № 6. С. 53–128.
3. Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их использование // Успехи физ. наук. 2001. Т. 171. № 5. С. 465–501.
4. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам: Пер. с англ. Е.В. Мищенко / Под ред. А.П. Петухова. М.; Ижевск: НИС «Регулярная и хаотическая динамика». 2001. 464 с.
5. Чуи К. Введение в вэйвлеты: Пер. с англ. / Под ред. Я.М. Жилейкина. М.: Мир, 2001. 412 с.