

К.А. Шаповалов

# Рассеяние света частицами цилиндрической формы в приближении Рэлея–Ганса–Дебая. 1. Строго ориентированные частицы

Красноярская государственная медицинская академия

Поступила в редакцию 17.11.2003 г.

Получены выражения для расчета амплитуды и сечения светорассеяния оптически «мягкими» гексагональными цилиндрическими частицами конечной длины в приближении Рэлея–Ганса–Дебая. Проведено численное сравнение индикатрисы светорассеяния (или элемента матрицы рассеяния  $f_{11}$ ) для бесконечно длинного кругового цилиндра (строгое решение) и для конечных кругового и гексагонального цилиндров в приближении Рэлея–Ганса–Дебая. Получены приближенные формулы сечений светорассеяния кругового и гексагонального цилиндров в приближении Рэлея–Ганса–Дебая для малых дифракционных параметров  $ka < 1$ ,  $kH < 1$  (где  $k$ ,  $H$ ,  $a$  – волновое число, высота и радиус цилиндра соответственно).

Во многих областях исследований: оптика дисперсных сред, дистанционное зондирование и другие, для тщательного и быстрого анализа характеристик светорассеяния частицами произвольной формы и структуры используются различные приближения [1, 2]. Так, для оптически «мягких» светорассеивающих частиц ( $|n - 1| \ll 1$ , где  $n$  – относительный показатель преломления частицы) часто применяют приближения Рэлея–Ганса–Дебая (РГД), аномальной дифракции (АД) и дифракции Фраунгофера. Для цилиндрических частиц кругового и гексагонального сечения в приближении АД получены формулы в [3, 4], но в приближении РГД такие подробные расчеты сделаны только для круговых цилиндров [5].

Целью данной работы являются анализ и сравнение некоторых характеристик светорассеяния в приближении РГД для цилиндров кругового и гексагонального сечений.

## 1. Амплитуда и индикатриса светорассеяния

Используя интегральное представление амплитуды светорассеяния в приближении РГД [6]:

$$f(\mathbf{s}, \mathbf{i}) = \frac{k^2}{4\pi} [-\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{e}_i)] \int (n^2 - 1) \exp[ik\mathbf{r}'(\mathbf{i} - \mathbf{s})] dV', \quad (1)$$

где  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{i}$  – единичные векторы вдоль направления рассеяния и распространения света соответственно;  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число;  $\lambda$  – длина волны в дисперсионной среде;  $\mathbf{e}_i$  – единичный вектор в направлении поляризации падающей волны;  $\mathbf{r}'$  – радиус-вектор точки внутри частицы, после интегрирования для однородного кругового цилиндра высоты  $H$  и радиуса  $a$  имеем (см. [6]):

$$f(\mathbf{s}, \mathbf{i}) = \frac{k^2}{4\pi} [-\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{e}_i)] (n^2 - 1) V_k \frac{2J_1(\sqrt{k_1^2 + k_2^2} a)}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2} a} \times j_0\left(\frac{k_3 H}{2}\right), \quad (2)$$

где  $V_k = \pi a^2 H$  – объем кругового цилиндра;  $J_1(x)$  – функция Бесселя первого порядка,  $j_0(x) = \sin(x)/x$  – сферическая функция Бесселя нулевого порядка;

$$k_1 = k[\sin(\theta_i)\cos(\phi_i) - \sin(\theta_s)\cos(\phi_s)],$$

$$k_2 = k[\sin(\theta_i)\sin(\phi_i) - \sin(\theta_s)\sin(\phi_s)],$$

$$k_3 = k[\cos(\theta_i) - \cos(\theta_s)],$$

$\theta_i, \phi_i, \theta_s, \phi_s$  – углы в сферической системе координат, указывающие направление падающей  $\mathbf{i}$  и рассеянной  $\mathbf{s}$  волн соответственно.

Для цилиндра гексагонального сечения (рис. 1) после интегрирования получим выражение

$$f(\mathbf{s}, \mathbf{i}) = \frac{k^2}{4\pi} [-\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{e}_i)] (n^2 - 1) V_r F(H, a, \theta_i, \phi_i, \theta_s, \phi_s), \quad (3)$$

где  $V_r = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 H$  – объем гексагонального цилиндра;

$$F(H, a, \theta_i, \phi_i, \theta_s, \phi_s) = \frac{2}{3} j_0\left(\frac{k_3 H}{2}\right) [F_1 + F_2 + F_3],$$

$$F_1 = j_0\left(\frac{k_1 a}{2}\right) j_0\left(\frac{k_2 \sqrt{3} a}{2}\right),$$

$$F_2 = \frac{1}{4} \left(1 - \sqrt{3} \frac{k_1}{k_2}\right) j_0\left(\frac{\sqrt{3} a (k_2 - \sqrt{3} k_1)}{4}\right) j_0\left(\frac{a (k_1 + \sqrt{3} k_2)}{4}\right),$$

$$F_3 = \frac{1}{4} \left(1 + \sqrt{3} \frac{k_1}{k_2}\right) j_0\left(\frac{\sqrt{3} a (k_2 + \sqrt{3} k_1)}{4}\right) j_0\left(\frac{a (k_1 - \sqrt{3} k_2)}{4}\right).$$

Индикатриса светорассеяния [или элемент матрицы рассеяния  $f_{11}$ ] для естественного света (поляризация хаотична) рассчитывалась по формуле

$$f_{11}(\beta) = \frac{1 + \cos^2(\beta)}{2} k^2 |f(\beta)|^2, \quad (4)$$

где  $|f(\beta)|^2$  – квадрат модуля амплитуды светорассеяния из (2) или (3);  $\beta$  – угол рассеяния, отсчитываемый от направления рассеяния вперед.

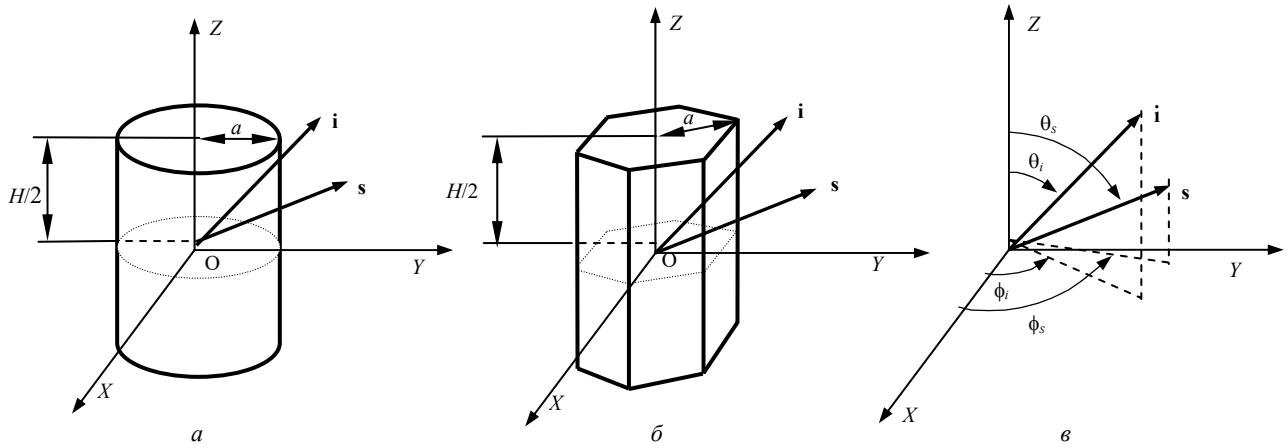


Рис. 1. Цилиндрическая частица радиуса  $a$  и высоты  $H$  кругового (а), гексагонального сечений (б) и система координат (в), используемая при вычислениях

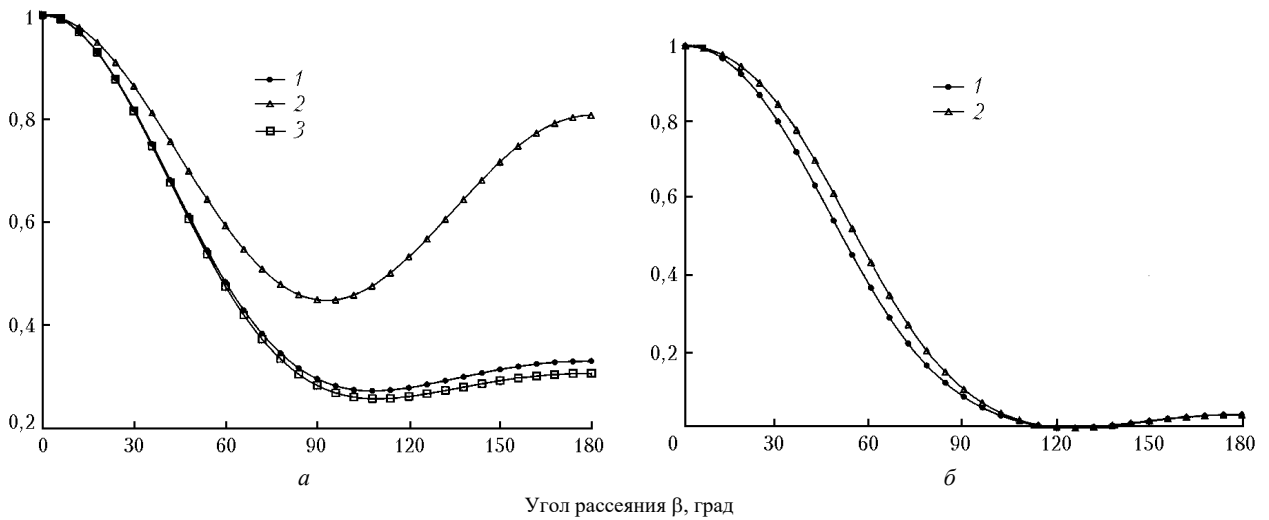


Рис. 2. Зависимость индикатрисы светорассеяния  $f_{11}(\beta)/f_{11}(0)$  от угла рассеяния  $\beta$  для кругового РГД (1), гексагонального РГД (2) и бесконечно длинного цилиндра (3) с относительным показателем преломления  $n = 1,027 - i0,068$  при  $ka = 1$ ,  $kh = 2$  и для света, падающего перпендикулярно (а) и вдоль (б) оси симметрии цилиндра

Расчеты для бесконечно длинного цилиндра (строгое решение) велись по алгоритму, указанному в [8], в приближении РГД по формулам (2), (3). Индикатриса нормировалась на направление рассеяния вперед. Относительная погрешность здесь и далее вычислялась как  $(F_{\text{прибл}}/F_{\text{точн}} - 1) \cdot 100\%$ .

Численное сравнение выявило, что величина относительной погрешности индикатрисы светорассеяния как для кругового, так и для гексагонального РГД цилиндра по сравнению с результатами строгого решения бесконечно длинного цилиндра не превышает 9% в области углов рассеяния до  $30^\circ$ . Индикатриса светорассеяния для цилиндра размером  $ka = 1$  и  $kH = 2$ , когда свет падает перпендикулярно оси симметрии цилиндра ( $\theta_i = 90^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\beta = \phi_s$ ), показана на рис. 2, а, а вдоль оси симметрии цилиндра ( $\theta_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\beta = \theta_s$ ) соответственно на рис. 2, б.

Отметим также, что при небольших дифракционных параметрах ( $ka < 1$ ) выражение (3) можно упростить, используя равенство (см. [7]):

$$j_0(x-y) = \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) j_m(x) j_m(y), \quad (5)$$

или при  $x < 1$  и  $y < 1$  ограничиваемся первым слагаемым, тогда

$$j_0(x-y) \approx j_0(x)j_0(y).$$

Индикатриса светорассеяния  $f_{11}(\beta)/f_{11}(0)$

В результате при  $ka < 1$  из (3) после преобразований следует

$$F(H, a, \theta_i, \phi_i, \theta_s, \phi_s) \approx j_0\left(\frac{k_3 H}{2}\right) j_0\left(\frac{k_1 a}{2}\right) j_0\left(\frac{k_2 \sqrt{3} a}{2}\right). \quad (6)$$

## 2. Сечение светорассеяния

Сечение светорассеяния  $\sigma_s$  по [6, 8] равно:

$$\sigma_s = \int_{4\pi} |\mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{i})|^2 d\omega, \quad (7)$$

где  $d\omega$  – элемент телесного угла (в сферической системе координат  $\sin(\theta_s) d\theta_s d\phi_s$ ).

Предполагая, что на частицу падает естественный свет (поляризация хаотична), разлагая при малых дифракционных параметрах  $ka < 1$  и  $kH < 1$  в ряд Тейлора амплитуду (2) и интегрируя, получим сечение светорассеяния  $\sigma_s$  для кругового цилиндра:

$$\sigma_s = \frac{(ka)^4 H^2 (n^2 - 1)^2}{16} UC(H, a, \theta_i, \phi_i), \quad (8)$$

где

$$UC(H, a, \theta_i, \phi_i) = UC_1 + UC_2,$$

$$UC_1 = \frac{2\pi}{3} \left\{ 4 - (kH)^2 \left( \frac{2}{15} + \frac{\cos^2(\theta_i)}{3} \right) - (ka)^2 \left( \frac{3}{5} + \sin^2(\theta_i) \right) \right\},$$

$$UC_2 = \frac{2\pi}{3} \left\{ (kH)^2 (ka)^2 \left( \frac{1}{84} + \frac{\sin^2(\theta_i) \cos^2(\theta_i)}{12} + \frac{\sin^2(\theta_i)}{30} + \frac{\cos^2(\theta_i)}{20} \right) \right\}.$$

Аналогично из (3) и (6), учитывая разложение в ряд Тейлора при малых дифракционных параметрах  $ka < 1$  и  $kH < 1$ , получим для гексагонального цилиндра

$$\sigma_s = \frac{27(ka)^4 H^2 (n^2 - 1)^2}{64\pi^2} UH(H, a, \theta_i, \phi_i), \quad (9)$$

где

$$UH(H, a, \theta_i, \phi_i) = UH_1 + UH_2,$$

$$UH_1 = \frac{2\pi}{3} \left\{ 4 - (kH)^2 \left( \frac{2}{15} + \frac{\cos^2(\theta_i)}{3} \right) - (ka)^2 \left( \frac{2}{5} + \frac{\sin^2(\theta_i) [3 \sin^2(\phi_i) + \cos^2(\phi_i)]}{3} \right) \right\},$$

$$UH_2 = \frac{2\pi}{3} \left\{ (kH)^2 (ka)^2 \left( \frac{1}{126} + \frac{\sin^2(\theta_i)}{18} \times \left[ 3 \sin^2(\phi_i) + \cos^2(\phi_i) \right] \left[ \frac{1}{5} + \frac{\cos^2(\theta_i)}{2} \right] + \frac{\cos^2(\theta_i)}{30} \right) \right\}.$$

В рэлеевском случае ( $ka \ll 1$ ,  $kH \ll 1$ ) из (8) следует для кругового цилиндра

$$\sigma_s = \frac{\pi(ka)^4 H^2 (n^2 - 1)^2}{6}, \quad (10)$$

что совпадает с [5], а из (9) для гексагонального рэлеевского цилиндра имеем

$$\sigma_s = \frac{9(ka)^4 H^2 (n^2 - 1)^2}{8\pi}. \quad (11)$$

Относительная погрешность значений сечения светорассеяния, рассчитанных по приближенным формулам (8) и (9), для кругового и гексагонального РГД цилиндров при  $\phi_i = 0^\circ$

ka	Круговой цилиндр				Гексагональный цилиндр			
	kH = 0,3		kH = 0,7		kH = 0,3		kH = 0,7	
	$\theta_i = 0^\circ$	$\theta_i = 90^\circ$	$\theta_i = 0^\circ$	$\theta_i = 90^\circ$	$\theta_i = 0^\circ$	$\theta_i = 90^\circ$	$\theta_i = 0^\circ$	$\theta_i = 90^\circ$
0,05	-0,008	-0,001	-0,251	-0,017	-0,002	0,037	-0,245	0,020
0,10	-0,008	-0,002	-0,252	-0,018	0,017	0,149	-0,226	0,133
0,15	-0,009	-0,006	-0,252	-0,022	0,048	0,336	-0,195	0,319
0,20	-0,010	-0,017	-0,254	-0,034	0,091	0,596	-0,152	0,580
0,25	-0,013	-0,040	-0,257	-0,057	0,146	0,929	-0,097	0,913
0,30	-0,018	-0,084	-0,262	-0,101	0,213	1,333	-0,030	1,317
0,40	-0,039	-0,268	-0,284	-0,286	0,379	2,346	0,135	2,330
0,50	-0,085	-0,666	-0,331	-0,686	0,584	3,613	0,341	3,598
0,60	-0,169	-1,416	-0,417	-1,439	0,823	5,105	0,579	5,090
0,70	-0,309	-2,699	-0,560	-2,729	1,088	6,779	0,843	6,763
0,80	-0,530	-4,756	-0,783	-4,795	1,367	8,576	1,123	8,558
0,85	-0,678	-6,168	-0,934	-6,214	1,510	9,497	1,264	9,477
0,90	-0,858	-7,895	-1,116	-7,949	1,651	10,418	1,405	10,396
0,95	-1,073	-9,988	-1,333	-10,052	1,789	11,325	1,543	11,300
1,00	-1,328	-12,506	-1,592	-12,581	1,923	12,201	1,675	12,173

Проводилось также численное сравнение значений приближенных сечений светорассеяния из (8), (9) и сечений светорассеяния РГД цилиндров, полученных непосредственным интегрированием по (7). В результате для однородных РГД цилиндров относительная погрешность по модулю не превышает 12% при  $ka < 1$  и  $kH < 1$  (таблица) и не зависит от показателя преломления частицы.

### Заклучение

Получены выражения для расчета амплитуды и сечения светорассеяния оптически «мягкими» цилиндрическими частицами конечной длины гексагонального сечения в

приближении РГД. Проведено сравнение численных результатов расчета индикатрисы светорассеяния кругового, гексагонального цилиндров в приближении РГД и бесконечно длинного цилиндра (строгое решение). Получено, что относительная погрешность РГД индикатрисы светорассеяния кругового, гексагонального цилиндров не превышает 9% в области углов рассеяния до  $30^\circ$ . Численное сравнение значений сечения светорассеяния кругового и гексагонального РГД цилиндров и значений сечения светорассеяния, рассчитанных по приближенным формулам для малых дифракционных параметров ( $ka < 1$  и  $kH < 1$ ) РГД цилиндров, дает относительную погрешность по модулю не более 12%.

1. Сидько Ф.Я., Лопатин В.Н., Парамонов Л.Е. Поляризационные характеристики взвесей биологических частиц. Новосибирск: Наука, 1990. 120 с.
2. Лопатин В.Н., Сидько Ф.Я. Введение в оптику взвесей клеток. Новосибирск: Наука, 1988. 240 с.
3. Петрушин А.Г. Рассеяние и ослабление излучения «мягкими» цилиндрами конечной длины // Оптика и спектроскопия. 1983. Т. 54. Вып. 5. С. 882–884.
4. Кузнецов В.В., Павлова Л.Н. Ослабление и поглощение радиации оптически «мягкими» частицами цилиндрической формы // Изв. АН СССР. Физ. атмосфер. и океана. 1988. Т. 24. № 2. С. 205–211.
5. Ван де Хюлст Г. Рассеяние света малыми частицами. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. 536 с.
6. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах / Пер. с англ. М.: Мир, 1981. Т. 1. 280 с.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И.М. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
8. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами / Пер. с англ. М.: Мир, 1986. 660 с.

*K.A. Shapovalov. Light scattering by cylindrical particles in the Rayleigh–Gans–Debye approximation. 1. Rigorously oriented particles.*

The equations for calculation of the amplitude and cross section of light scattering by optically «soft» hexagonal cylindrical particles of finite length in the Rayleigh–Gans–Debye approximation are obtained. Numerical results for the light scattering phase function (or element of scattering matrix  $f_{11}$ ) for infinitely long cylinder (rigorous solution) and for finite circular and hexagonal cylinders in the Rayleigh–Gans–Debye approximation are compared. The approximate equations for the light scattering cross section of circular and hexagonal cylinders in Rayleigh–Gans–Debye approximation for small diffraction parameters  $ka < 1$ ,  $kH < 1$  (where  $k$ ,  $H$ ,  $a$  are wavenumber, height and radius of cylinder, respectively) are obtained.