

Б.В. Кауль¹, И.В. Самохвалов²

Ориентация частиц кристаллических облаков *Si*: Часть 1. Ориентация при падении

¹ *Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск*

² *Томский государственный университет*

Поступила в редакцию 15.07.2005 г.

Предлагается модель распределения по углам отклонения больших диаметров частиц кристаллических облаков от горизонтального положения при их ориентации в процессе гравитационного оседания. Получено однопараметрическое распределение по углам ориентации. Параметр распределения зависит от размера частиц и скорости диссипации энергии в ячейках турбулентности.

Частицы кристаллических облаков анизотричны. Отношение их наибольших диаметров к наименьшим колеблется от полутора до нескольких единиц. При падении частиц аэродинамические силы ориентируют их большими диаметрами поперек направления встречного потока воздуха [1, 2]. В то же время на частицы действуют деструктивные, по отношению к процессу ориентации, силы. К таковым относятся стохастические флуктуации момента количества движения частицы в результате броуновского вращения и взаимодействия с турбулентными микропульсациями скорости воздушного потока. Оценки показывают, что энергетика этих двух механизмов дезориентации сопоставима по порядку величины в области размеров 5–10 мкм. Для частиц меньших размеров определяющим является тепловое движение. Для частиц размером 100 мкм энергия взаимодействия с турбулентными ячейками диссипации примерно на три порядка больше kT .

Эффективно разрушают ориентацию турбулентные ячейки, размеры которых сопоставимы с наибольшим диаметром частицы. Вихри большого масштаба на ориентацию частиц существенного влияния не оказывают, но ответственны за макроскопический перенос, в частности они препятствуют сепарации размеров частиц по высотам при гравитационном оседании [3, 4].

Ориентация при падении является основным механизмом ориентации частиц. С помощью наблюдений наклона солнечных столбов [5] и лидарных исследований матриц обратного рассеяния [6] была доказана возможность ориентации частиц большими диаметрами преимущественно в некоторое азимутальное направление, предположительно поперек скорости ветра. Обоснование этой гипотезы предполагается дать в последующей публикации. Эксперименты показали, что сильные проявления азимутальной ориентации встречаются редко. Без риска существенной ошибки ее можно не учитывать в расчетах углового распределения рассеянной радиации. Ниже

речь пойдет только о распределении по углам отклонения больших диаметров от горизонтального положения. Распределение по углам азимутальной ориентации предполагается равномерным.

Материал данной статьи может быть использован для построения оптических моделей кристаллических облаков. В частности, ближайшую цель мы усматриваем в установлении связи между элементом m_{44} нормированной матрицы обратного рассеяния света (МОРС), определяемой при зондировании кристаллического облака в зенит или надир, и параметрами распределения по углам θ отклонения оснований пластинок или осей столбиков от горизонтального положения. В работах [6, 7] показано, что элемент m_{44} не зависит от азимутальной ориентации. Для конкретного ансамбля частиц его вариации зависят только от вариаций функции распределения частиц по углу θ . Поскольку в нашем распоряжении имеется инструмент (лидар «Стратосфера»), позволяющий измерять полную МОРС, представляется возможность сравнения результатов моделирования с экспериментом.

Кристаллические облака содержат частицы разнообразных форм и размеров. Международная классификация содержит десять типов частиц, а наиболее детальная классификация содержит 80 разновидностей кристаллов [8]. Тем не менее имеются данные о том, что в облаках *Si* и *Ss* на высотах 6,5–11 км преобладают кристаллы столбчатых и пластинчатых форм [9], которые в модели ориентации будем аппроксимировать сжатыми и вытянутыми эллипсоидами вращения.

Спектр размеров частиц в кристаллических облаках верхнего яруса занимает интервал от единиц микрон до миллиметра. Соответственно режимы движения частиц различны. Для мелких частиц воздух является вязкой средой. Скорость их оседания может быть оценена по формуле Стокса. Для более крупных частиц движение носит турбулентный характер. Скорость их движения будем оценивать по

известному эмпирическому соотношению между скоростью падения u и максимальным диаметром частиц h

$$u = Ah^\beta. \quad (1)$$

Значения эмпирических констант A и β для кристаллов различных форм, позаимствованные из [11], приведены в [12], где скорость определяется в см/с, а максимальный размер в мм. Для перехода к основным единицам системы СИ нужно использовать константу

$$A^* = 10^{3\beta-2} A. \quad (1')$$

Сравнение скоростей падения, вычисленных по формуле Стокса и по формуле (1), показывает, что обе формулы дают примерно равные (от 0,5 до 4 см/с) скорости для частиц размерами от 5 до 20 мкм. Для более крупных частиц формула Стокса дает завышенные значения по сравнению с экспериментальными данными. В дальнейшем для упрощения будем считать, что формула (1) справедлива для всех размеров.

Граница между режимами вязкого и турбулентного движения расположена вблизи числа Рейнольдса $Re \approx 1$. Если известно распределение частиц по максимальным размерам, то можно определить, как движение облачных частиц распределяется по указанным двум режимам. В качестве исходного распределения принимается двухпараметрическое гамма-распределение функции плотности вероятности [12]:

$$f_1(h) = \frac{\mu^{\mu+1}}{\Gamma(\mu+1)h_m} \left(\frac{h}{h_m}\right)^\mu \exp\left(-\mu\frac{h}{h_m}\right), \quad (2)$$

где h – наибольшие диаметры частиц; параметр $\mu = 4$; $h_m = 4 \cdot 10^{-4}$ м – мода распределения.

Однако сопоставление распределения (2) с измерениями, проведенными позже с более совершенной аппаратурой [13, 14], приводит к выводу, что это распределение дает заниженное значение мелких частиц. Поэтому окончательно принимается распределение вероятности

$$f(h) = 0,8f_1(h) + 0,2f_2(h), \quad (3)$$

где $f_2(h) = \alpha \exp(-\alpha h)$, $\alpha = 10^4$.

Вид распределения (3) показан на рис. 1. Для него выполняется условие нормировки

$$\int_0^\infty f(h)dh = 1,$$

и оно удовлетворительно описывает экспериментальный спектр, представленный в [14].

Воспользовавшись определением $Re = uh/v$, где v – кинематическая вязкость воздуха, и эмпирическим соотношением (1), перейдем к распределению по числам Рейнольдса. Для этого применим правило для распределений случайных величин, связанных функциональной зависимостью [15]. Вид распределения по числам Рейнольдса показан на рис. 2.

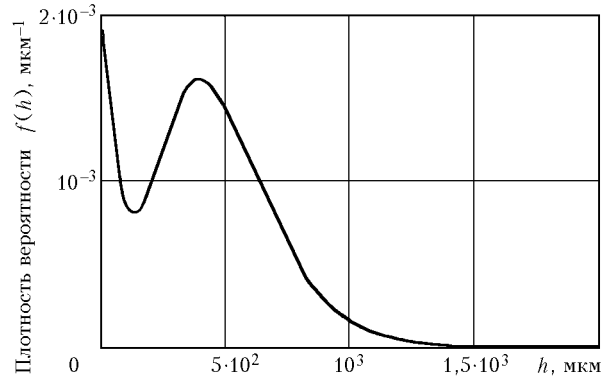


Рис. 1. Распределение частиц кристаллических облаков по размерам больших диаметров, принятое для оценки распределения по числам Рейнольдса

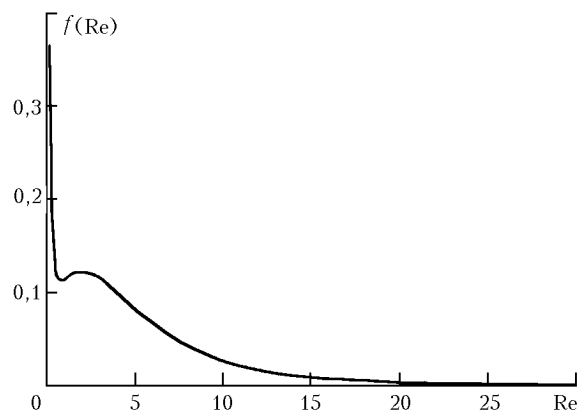


Рис. 2. Распределение по числам Рейнольдса, соответствующее распределению по размерам, представленному на рис. 1

Распределение удовлетворяет условию нормировки $P(0, \dots, \infty) = 1$, где P – полная вероятность. Доля частиц, удовлетворяющих условию $Re \leq 1$, равна 0,215. Размеры частиц, удовлетворяющих этому же условию, соответствуют интервалу $0 < h_m < 200$ мкм.

Вышеизложенное означает, что падение около 80% облачных частиц происходит в режиме образования турбулентных вихрей. Но числа Рейнольдса не превышают значений $10 \div 20$, что соответствует стационарному режиму, при котором в системе координат, связанной с частицей, частная производная скорости потока по времени равна нулю и нулю равна циркуляция, взятая по любому контуру вокруг частицы. Иными словами, вихри движутся вместе с частицей и стационарны. Все это относится к установившемуся режиму падения, при котором частица занимает симметричное положение относительно потока. При отклонении от положения равновесия симметрия вихревого поля нарушается и циркуляция потока становится отличной от нуля.

В соответствии с законом сохранения момента количества движения на частицу действует момент сил, противоположный по знаку моменту, обусловленному циркулирующей скоростью потока. Существенно, что для всего спектра размеров частиц $Re < 40$ и, следовательно, не наступает режим отрыва вихрей, при котором возможны осцилляции частиц.

Вихри локализованы вблизи частицы, а поле скоростей встречного потока воздуха, в среднем, можно считать потенциальным. В этом случае модуль момента сил, действующих на эллипсоид вращения, описывается формулой [1, 10]:

$$M(\theta) = \lambda u^2 \rho V \sin 2\theta / 2, \quad (4)$$

где θ – угол между направлением скорости падения частицы u и направлением малой оси эллипсоида вращения; ρ – плотность воздуха; V – объем эллипсоида; λ – форм-фактор, зависящий от соотношения между малой b и большой a полуосями эллипсоида:

$$\lambda = \left\{ e^3 \left[e - \sqrt{1 - e^2} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \right) \right]^{-1} - 1 \right\}^{-1}, \quad (5)$$

где $e = \sqrt{(a^2 - b^2)/a^2}$ – эксцентриситет.

Объемы сфероида и вытянутого эллипсоида вращения можно выразить через размеры больших полуосей и эксцентриситет следующими формулами:

$$V_c = \frac{4}{3} \pi a^3 \sqrt{1 - e^2}, \quad V_s = \frac{4}{3} \pi a^3 (1 - e^2). \quad (6)$$

Сделаем подстановку $a = h/2$ в (6), подразумевая под h наибольшие диаметры частиц, а скорость падения определим из формулы (1) с учетом замечания (1').

Тогда для ориентирующего момента получим

$$M_c(\theta) = \frac{1}{12} \pi \Lambda_c \rho A^2 \cdot 10^{(6\beta-4)} h^{3+2\beta} \sin 2\theta \quad (7)$$

– для пластинчатых частиц,

$$M_s(\theta) = \frac{1}{12} \pi \Lambda_s \rho A^2 \cdot 10^{(6\beta-4)} h^{3+2\beta} \sin 2\theta \quad (8)$$

– для столбиков,

где $\Lambda_c = \lambda \sqrt{1 - e^2}$ и $\Lambda_s = \lambda(1 - e^2)$ – обобщенные форм-факторы.

Энергия, которую нужно затратить на реализацию ансамбля из N частиц с распределением по размерам $f(h)$, отклоненных от положения равновесия на угол θ , равна

$$U(\theta) = N \int_0^\infty \int_0^\infty M(\theta, h) f(h) dh d\theta. \quad (9)$$

Она зависит только от обобщенной координаты θ и может считаться потенциальной энергией ансамбля частиц. В состоянии равновесия убыль потенциальной энергии восполняется за счет взаимодействия частиц с ячейками турбулентных микропульсаций, кинетическая энергия которых пропорциональна массе воздуха в ячейке, умноженной на средний квадрат скорости пульсаций $\langle u_t^2 \rangle$.

Определим масштабы длины и скорости в интервале диссипации [16]:

$$l = \left(\frac{v^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}, \quad u_t = (\varepsilon v)^{1/4}, \quad (10)$$

где ε – скорость диссипации энергии. В оценках будем принимать, что высоте 10 км соответствуют $T = 250$ К и $v = 3 \cdot 10^{-5}$ м²/с. Скорость диссипации сильно зависит от турбулентного состояния атмосферы. В среднем для тропопаузы приводятся значения $\varepsilon = 4+5 \cdot 10^{-4}$ м²/с³ ($\sim 4+5$ см²/с³), но отмечается, что в облаках значения могут в десятки и даже сотни раз превышать указанные [17]. Для справки заметим, что при отмеченных выше v и ε $u_t \approx 3,5 \cdot 10^{-2}$ м/с, а $l \approx 2,5$ мм.

Ячейка диаметром l обладает, в среднем, энергией

$$w = \frac{1}{6} \pi l^3 \rho \langle u_t^2 \rangle. \quad (11)$$

Из (10) и (11) определим энергию ячейки как функцию средней скорости диссипации

$$w(\varepsilon) = \frac{1}{6} \pi \rho v^{11/4} \varepsilon^{-1/4}. \quad (12)$$

Эффективность передачи энергии частице от турбулентной ячейки примем равной отношению их объемов

$$p(\varepsilon, h) = h^3 (v^3/\varepsilon)^{-3/4}. \quad (13)$$

Кинетическую энергию, получаемую частицей при столкновении с ячейкой, запишем как

$$W(h, \varepsilon) = p(h, \varepsilon) w(\varepsilon). \quad (14)$$

Найдем распределение по углу ориентации из условия баланса потенциальной энергии частиц и кинетической энергии турбулентных пульсаций

$$dU(\theta, h) + dE(\varepsilon, h) = 0. \quad (15)$$

Предположим вначале, что ансамбль состоит из n частиц одинакового размера \bar{h} . Тогда (15) можно записать в следующем виде:

$$nM(\theta, \bar{h}) d\theta = -W(\bar{h}, \varepsilon) dn. \quad (16)$$

Интегрирование этого уравнения дает следующий результат:

$$n(\theta) = C \exp(\chi \cos 2\theta), \quad (17)$$

где с учетом формул (7), (8), (12)–(14)

$$\chi(\bar{h}, \varepsilon) = \Lambda_{c,s} 10^{(6\beta-4)} A^2 \bar{h}^{2\beta} / 4\sqrt{v\varepsilon}. \quad (18)$$

Зависимость χ от больших диаметров частиц h при пяти значениях скорости диссипации ε показана на рис. 3. В табл. 1 приведены значения χ для некоторых размеров.

Вид распределения для трех значений χ показан на рис. 4. При $\chi \rightarrow 0$ распределение переходит в равномерное с плотностью вероятности $1/\pi$. В табл. 2 приведены значения квадратного корня из дисперсии σ , которые дают представление о величине флаттера при указанных значениях χ .

Таблица 1

Зависимость параметра распределения χ от максимального диаметра частиц h при пяти значениях скорости диссипации энергии ϵ . Верхние значения – для пластинчатых частиц, нижние – для столбчатых

$\epsilon, \text{ м}^2/\text{с}^3$	$h, \text{ мкм}$										
	5	10	20	30	50	100	200	300	400	500	750
10^{-4}	0,20	0,71	1,61	2,97	6,38	18,0	51,0	93,7	144	202	372
	0,04	0,14	0,50	1,06	2,71	19,9	34,7	73,2	124	187	395
$5 \cdot 10^{-4}$	0,09	0,25	0,72	1,33	2,85	8,07	22,8	41,9	64,5	90,2	166
	0,02	0,06	0,22	0,47	2,21	4,34	15,5	32,7	55,6	83,8	176
$5 \cdot 10^{-3}$	0,03	0,08	0,23	0,42	0,90	2,55	7,22	13,3	20,4	28,5	52,4
	0,01	0,02	0,07	0,15	0,38	1,37	4,91	10,4	17,6	26,5	55,9
10^{-2}	0,01	0,03	0,07	0,13	0,28	0,81	2,28	4,19	6,45	9,02	16,6
	–	0,01	0,02	0,05	0,12	0,43	1,55	3,27	5,56	8,38	17,7
$5 \cdot 10^{-1}$	–	0,01	0,02	0,04	0,09	0,25	0,72	1,33	2,04	2,85	5,24
	–	–	–	0,01	0,04	0,14	0,49	1,04	1,77	2,65	5,59

Таблица 2

Значения среднеквадратического отклонения от горизонтального положения

χ	1	3	5	10	30	50	100	200	300	500
$(\sqrt{\sigma})^\circ$	36,3	18,9	13,7	9,3	5,3	4,1	2,9	2,0	1,6	1,3

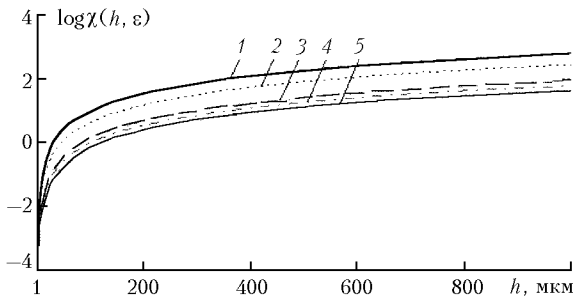


Рис. 3. Зависимость показателя распределения $\chi(h, \epsilon)$ по углам ориентации (17) от диаметра пластинчатых частиц h при следующих значениях скорости диссипации энергии $\epsilon, \text{ м}^2/\text{с}^3$: 1 – 10^{-4} ; 2 – $5 \cdot 10^{-4}$; 3 – 10^{-3} ; 4 – 10^{-2} ; 5 – $5 \cdot 10^{-1}$

Как видно из (18), χ следует рассматривать как функцию большего диаметра h при априорно заданном параметре ϵ . Поскольку h изменяется в широком интервале, то ясно, что распределение по углу θ не может быть представлено одной функцией вида (17) для всего ансамбля частиц. Для построения модели распределения по углам ориентации, которая была бы пригодна для моделирования элементов матрицы рассеяния, поступим следующим образом.

Выделим подансамбль частиц в интервале размеров $[h_{i-1}, h_i]$, в пределах которого можно воспользоваться средним размером $h_i = \bar{h}_i$. Статистический вес такого подансамбля и концентрация частиц равны соответственно

$$g_i = \int_{h_{i-1}}^{h_i} f(h)dh, \quad n_i = g_i N, \quad \bar{h}_i = \int_{h_{i-1}}^{h_i} hf(h)dh, \quad (19)$$

где N – общая концентрация частиц. Константа нормировки найдется из условия

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} n_i(\theta)d\theta = g_i N;$$

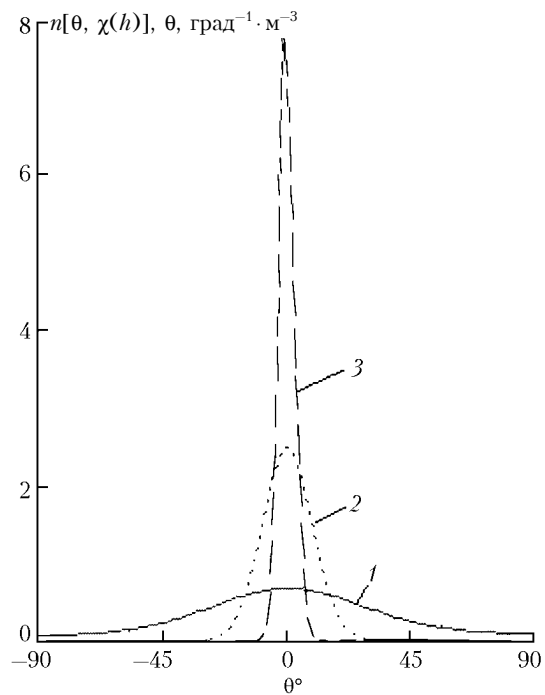


Рис. 4. Вид функции распределения по углу отклонения θ больших диаметров частиц от горизонтального положения при значениях показателя распределения $\chi(h, \epsilon)$: 1 – $\chi = 1$; 2 – 10; 3 – 100

$$C_i = g_i N \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\exp(\chi_i(\bar{h}_i, \epsilon) \cos 2\theta)] d\theta \right\}^{-1} = g_i N / \pi I_0(\chi_i), \quad (20)$$

где $I_0(\chi)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Модель распределения по углу θ для всего ансамбля представляется набором функций вида

$$n_i(\theta) = C_i [\exp(\chi(\bar{h}_i, \epsilon) \cos 2\theta)]. \quad (21)$$

Отметим, что в определениях (19) в качестве функции $f(h)$ может быть взята любая функция распределения по размерам, для которой выполняется условие $Re = A^* h^{\beta} v \leq 40$.

Из вышеизложенного следует, что взаимодействие падающих кристаллических частиц с коллективным движением молекул в ячейках диссипации является определяющим фактором в распределении по углам ориентации. Если допустить, что дезориентация происходит только за счет теплового движения молекул, то наши оценки показали следующее. Частицы мельче 5 мкм оказываются полностью дезориентированными. Но для более крупных частиц ориентация быстро нарастает, так что для частиц размером 10 мкм среднеквадратический разброс равен примерно 7° , а частицы размером 20 мкм оказываются практически строго ориентированы. Но это противоречит экспериментальным данным, полученным в Институте экспериментальной метеорологии [18].

Наблюдения за ориентацией ледяных столбиков с помощью телекамеры показали, что ориентация столбиков $d = 36$ мкм и $h = 54$ мкм в горизонтальное положение лишь на порядок превышала вертикальную ориентацию. Это скорее соответствует нижней цифре (2,71) в пятом столбце первой строки табл. 1.

Далее сделаем некоторые замечания относительно выводов о влиянии турбулентности на ориентацию частиц в кучевом облаке, приведенных в работе [3]. Качественный анализ, основанный на сравнении линейных масштабов дистанции ориентации (произведение скорости падения частицы на время, за которое происходит ее ориентация), линейного масштаба ячейки диссипации (10) и микромасштаба Тейлора, привел авторов к несколько, на наш взгляд, категоричному выводу о незначительном влиянии турбулентности на ориентацию частиц. Нижняя строка табл. 1 вычислена для параметров турбулентности, которые использовали авторы цитируемой работы. Размер частиц они брали равным 500 мкм. Как видно из табл. 1, для частиц такого размера еще сохраняется заметная ориентация, но она далека от той, которая имела бы место в отсутствие турбулентности.

Представляется некорректной оценка авторами [3] вероятности столкновения частицы с ячейкой диссипации, основанная на сравнении объемов ячеек масштаба (10) и ячеек Тейлора. При этом ими, очевидно, проигнорировано то обстоятельство, что между указанными двумя масштабами существует непрерывный энергетический спектр, а процесс диссипации энергии наиболее интенсивен в области $0,1 < kl < 1$, где k – волновое число [16], что соответствует интервалу линейных размеров ячеек $6l \div 60l$. Учет только этого обстоятельства повышает оценку вероятности, проведенную по методике авторов, на два порядка. На самом деле вероятность того, что за время переориентации частица испытает воздействие со стороны диссипативной ячейки того или иного размера, достаточно высока.

B. V. Kaul, I. V. Samokhvalov. Orientation of particles of Ci crystalline clouds. Part 1. Orientation at gravitational sedimentation.

A model of distribution over angles of deviation of crystalline cloud large-size particles from the horizontal position in the process of their gravitational sedimentation is proposed. A single-parametric distribution over orientation angles is obtained. The distribution parameter is shown to depend on the particle size and the rate of energy dissipation in the turbulence cells.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований – грант № 04-05-64495 и Федерального агентства науки и инноваций Министерства образования и науки Российской Федерации – Гос. контракт № РИ 26/071.

1. Фукс Н.А. Механика аэрозолей. М.: Изд. АН СССР, 1955. 450 с.
2. Копытин Ю.Д., Чурсин А.А., Чурсина Г.А., Шишигин С.А. Восстановление параметров микроструктуры асферических частиц аэрозоля из нелинейно-оптических измерений // Оптика атмосф. 1990. Т. 3. № 3. С. 1096–1101.
3. Cho H.-R., Iribarne J.V., Richards W.G. On the orientation of ice crystals in a cumulo-nimbus cloud // J. Atmos. Sci. 1981. V. 38. N 5. P. 1111–1114.
4. Матвиенко Г.Г., Задде Г.О., Фердинандов Э.С., Колес И.Н., Аврамова Р.П. Корреляционные методы лазерно-локационных измерений скорости ветра. Новосибирск: Наука, 1985. 221 с.
5. Langgenhager K. Zur Erklärung farbiger senkrechter und schräger Nebensonnen – Säulen // Zeitschrift für Meteorol. 1977. Bd 27. N 3. S. 179–183.
6. Кауль Б.В., Волков С.Н., Самохвалов И.В. Результаты исследований кристаллических облаков посредством лидарных измерений матриц обратного рассеяния света // Оптика атмосф. и океана. 2003. Т. 16. № 4. С. 354–361.
7. Кауль Б.В. Симметрия матриц обратного рассеяния света в связи с ориентацией несферических аэрозольных частиц // Оптика атмосф. и океана. 2000. Т. 13. № 10. С. 895–900.
8. Magono G., Lee C.W. Meteorological classification of natural snow crystals // J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. 7 (Geophys.). 1966. N. 2. P. 321–335.
9. Heymsfield A.J. Cirrus incinus generating cells and the evolution of cirriform clouds. Part 1. Aircraft observation of the growth of the ice phase // J. Atmos. Sci. 1975. V. 32. N 4. P. 799–808.
10. Милл-Томпсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 497 с.
11. Zikmunda J., Vali G. Observations of fall patterns for natural ice crystals. College of Engineering. Univ. Wyoming. Rep. N AR103. 1972. 49 p.
12. Волковицкий О.А., Павлова Л.Н., Петрушин А.Г. Оптические свойства кристаллических облаков. Л.: Гидрометеоздат, 1984. 198 с.
13. Arnott W.P., Hallet J. New insight for in situ quantification of cirrus // Cirrus: OSA Technical Digest. Washington DS. 1998. P. 86–88.
14. Lawson R.P. A comparison of ice crystal observation using a new cloud particle imaging probe in Arctic cirrus and a decaying anvil in Texas // Cirrus: OSA Technical Digest. Washington DS. 1998. P. 113–115.
15. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1968. 716 с.
16. Рейнольдс А.Дж. Турбулентные течения в инженерных приложениях. М.: Энергия, 1979. 405 с.
17. Справочник «Атмосфера». Л.: Гидрометеоздат, 1991. 509 с.
18. Кузнецов В.В., Никифорова Н.К., Павлова Л.Н. и др. Об измерении микроструктуры кристаллических туманов телевизионным спектрометром аэрозолей «Аспект-10» // Тр. ИЭМ. 1983. Вып. 7. (112) С. 101–106.