

В.П. Будак, О.П. Меламед

Модифицированный метод сферических гармоник для определения функции рассеяния точки слоя мутной среды

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию 24.03.2006 г.

Разработан метод решения уравнения переноса излучения для точечного изотропного источника на основе метода сферических гармоник. Улучшение сходимости метода достигнуто за счет вычитания из решения малоугловой составляющей, содержащей все особенности решения. Таким образом, решение проводится для оставшейся гладкой функции, не содержащей особенностей. Для сохранения устойчивости решения при увеличении оптической толщи применяется масштабное преобразование. Проведенные численные расчеты позволили наглядно выявить физическую сущность малоуглового приближения: пренебрежение дисперсией путей рассеянных фотонов и обратным рассеянием.

Введение

Для решения задач восстановления изображения, искаженного мутной средой, например атмосферой или толщей воды, часто достаточно определить функцию рассеяния точки (ФРТ) или оптическую передаточную функцию системы (ОПФ) [1], т.е. решить уравнение переноса излучения (УПИ) для точечного изотропного источника (ТИ-источник). Найденное в результате распределение яркости от ТИ-источника по теореме оптической взаимности [2] соответствует распределению облученности от точечного мононаправленного источника (ТМ-источника), а следовательно, может использоваться в решении задач, связанных с лазерной локацией. Вообще на сегодняшний день следует признать крайнюю задачу УПИ для плоского слоя полностью решенной. Актуальным является развитие аналитических и численных методов решения трехмерных задач теории переноса [3], и расчет светового поля ТИ-источника представляется таким простейшим случаем, позволяющим проанализировать основные проблемы трехмерных задач.

Задачи такого рода можно разделить на две большие группы: световые поля широких пучков в среде, где одно измерение существенно больше двух других, и световые поля, создаваемые пространственно ограниченными источниками. Для первой группы задач существует достаточно эффективное приближение [4], в то время как во второй группе возможна только оценка в малоугловом приближении [5–7] поля, рассеянного вперед в пределах малых оптических толщ. В [8] предложен подход к решению такого рода задач, основанный на вычитании прямой и однократно рассеянной компонент и дальнейшем решении УПИ для Фурье-образа исходной функции, что улучшает сходимость метода, однако не решает всех проблем,

связанных с наличием особенностей решения вблизи источника. При таком подходе мы определяем только ОПФ слоя мутной среды, знание которой недостаточно для восстановления изображения, полученного, например, со спутника, где формирование изображения происходит сканированием объекта по углу визирования.

В случае ТИ-источника яркость светового поля L в точке \mathbf{r} по направлению $\hat{\mathbf{I}}$ сферически симметрична: $L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) = L(r, \mu)$, $\mu = (\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{I}})$, $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$, и УПИ имеет вид

$$\mu \frac{\partial L}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial L}{\partial \mu} = -\varepsilon L(r, \mu) + \frac{\Lambda \varepsilon}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') L(r, \mu') d\hat{\mathbf{I}}' \quad (1)$$

с граничными условиями:

$$\begin{cases} L(r, \mu)|_{r \rightarrow 0, \mu > 0} = \frac{1}{4\pi r^2} \delta(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}}), \\ L(r, \mu)|_{r \rightarrow \infty} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где ε — показатель ослабления; $x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}')$ — индикатриса рассеяния; Λ — альбеда однократного рассеяния. Здесь и далее все единичные векторы обозначаются символом « $\hat{\mathbf{}}$ » над вектором.

1. Метод сферических гармоник

Сущность метода сферических гармоник (СГ) для решения УПИ состоит в представлении всех функций, входящих в уравнение, в виде рядов разложения по полиномам Лежандра [9]:

$$\begin{aligned} L(r, \mu) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} C_k(r) P_k(\mu), \\ x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) x_k P_k(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{I}}'). \end{aligned} \quad (3)$$

Использование полиномов Лежандра позволяет разделить переменные, используя теорему сложения:

$$P_k(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{I}}) = \frac{4\pi}{2k+1} \sum_{m=-k}^{m=k} Y_k^m(\hat{\mathbf{I}}) \overline{Y_k^m(\hat{\mathbf{I}})}, \quad (4)$$

где

$$Y_k^m(\hat{\mathbf{I}}) = \sqrt{\frac{2k+1}{2\pi}} \sqrt{\frac{(k-m)!}{(k+m)!}} P_k^{(m)}(\mu) e^{-im\varphi}$$

– сферические функции; φ – азимутальный угол вектора $\hat{\mathbf{I}}$ в выбранной системе координат.

Подставив (3) в УПИ и проведя преобразования [9–11], с учетом свойств полиномов Лежандра получим следующую систему уравнений:

$$\frac{k+1}{r^{k+2}} \frac{d}{dr} [C_{k+1}(r)r^{k+2}] + kr^{k-1} \frac{d}{dr} \left[\frac{C_{k-1}(r)}{r^{k-1}} \right] + (2k+1)\varepsilon(1-\Lambda x_k)C_k(r) = 0. \quad (5)$$

Решение уравнения (5) можно записать как [9]:

$$C_k(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} A_k(v) K_{k+\frac{1}{2}}(vr), \quad (6)$$

где $K_{k+\frac{1}{2}}(z)$ – модифицированная функция Бесселя от чисто мнимого аргумента второго рода (или функция Мак Дональда).

Используя свойства функции Мак Дональда, получим систему уравнений:

$$A_{k+1}(v) = \frac{1}{(k+1)} \left[(2k+1) \frac{\varepsilon(1-\Lambda x_k)}{v} A_k(v) - k A_{k-1}(v) \right]. \quad (7)$$

Так как решение бесконечной системы уравнений невозможно, то для практического решения ее делают конечной, положив все коэффициенты ($\forall k > N$): $(C_k(r) \equiv 0)$. Количество членов ряда, которые нужно учитывать, зависит от свойств среды, формы индикатрисы рассеяния и других факторов. Таким образом, получаем

$$A_{N+1}(v) = 0. \quad (8)$$

Очевидно, что (8) – уравнение $(N+1)$ степени и, соответственно, имеет $(N+1)$ корней. Можно показать [10], что приближение нечетных N лучше, что приводит к $(N+1)/2$ одинаковым по модулю и противоположным по знаку корням. В соответствии с граничным условием на бесконечности (2) отрицательными корни быть не могут, что оставляет только $(N+1)/2$ положительных корней. Для использования рекуррентного уравнения (7) необходимо знать A_0 , которое можно положить равным единице, поскольку любое значение приводит к умножению остальных A_k на A_0 . Разные корни (8) определяют линейно независимые решения. Поэтому общее решение можно записать в виде

$$L(r, \mu) = \sum_{k=0}^N \frac{2k+1}{4\pi\sqrt{r}} \sum_{q=1}^{(N+1)/2} a_q A_k(v_q) K_{k+\frac{1}{2}}(v_q r) P_k(\mu). \quad (9)$$

Постоянные коэффициенты a_q определяются из граничных условий. Однако приближенное решение не может удовлетворять точным граничным условиям, поэтому нужно использовать приближенные. Граничные условия в форме Маршака являются наилучшими:

$$\int_0^1 L(0, \mu) P_{2j-1}(\mu) d\mu = \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^1 \delta(\mu-1) P_{2j-1}(\mu) d\mu, \quad (10)$$

$$j \in 1, \frac{N+1}{2}.$$

Подставляя (10) в (9), получаем

$$\forall j \in 1, \frac{N+1}{2}: \sum_{k=0}^N (2k+1) r^2 \sum_{q=1}^{3(N+1)/2} a_q A_k(v_q) K_{k+\frac{1}{2}}(v_q r) \times \int_0^1 P_{2j-1}(\mu) P_k(\mu) d\mu = 1, \quad (11)$$

что представляет собой систему $(N+1)/2$ линейных уравнений с $(N+1)/2$ неизвестными a_q .

Однако решение для ГИ-источника имеет особенности не только по углу, но и по радиусу, что требует учета бесконечного числа членов ряда как по угловой, так и по пространственной переменным, что делает задачу (11) математически некорректной для любого конечного N . Рассмотрим случай нерассеивающей среды: $\Lambda = 0$, $\varepsilon = \kappa$. В этом случае уравнение (7) может быть записано в виде

$$A_{k+1}(v) = \frac{1}{(k+1)} \left[(2k+1) \frac{\kappa}{v} A_k(v) - k A_{k-1}(v) \right], \quad (12)$$

откуда $A_{k+1}(v) \equiv P_k(\kappa/v)$ – полиномы Лежандра. Решение для этого случая известно:

$$L(r, \mu) = \frac{e^{-\kappa r}}{4\pi r^2} \delta(1-\mu); \quad C_k(r) = \frac{e^{-\kappa r}}{r^2}, \quad (13)$$

что позволяет утверждать следующее:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r} \sum_{q=1}^{(N+1)/2} a_q \frac{A_k(v_q)}{\sqrt{v_q}} e^{-v_q r} \sum_{n=0}^k \frac{c_n}{(v_q r)^n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r} \sum_{n=0}^k \frac{c_n}{r^n} \sum_{q=1}^{(N+1)/2} a_q \frac{A_k(v_q)}{v_q^{n+1/2}} e^{-v_q r}, \quad (14)$$

где использовано разложение функций Мак Дональда полуполого порядка в ряд [12]:

$$K_{k+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \sum_{n=0}^k \frac{c_n}{z^n} e^{-z}.$$

Это требует равенства нулю всех сумм по q для всех $n \neq 1$ при $N \rightarrow \infty$. Парадоксальность подобного утверждения связана с некорректностью перехода к пределу $N \rightarrow \infty$ для описания локальной пространственной особенности. Можно утверждать, что подобный случай требует нетривиального предельного перехода, аналогичного известному из литературы квазиклассическому приближению [12].

2. Модификация метода сферических гармоник

Введем новую функцию

$$C_k(r) = Y_k(r)/r^2. \quad (15)$$

В этом случае УПИ можно переписать в виде

$$\frac{1}{2k+1} \frac{d}{dr} [(k+1)Y_{k+1}(r) + kY_{k-1}(r)] + \frac{k(k+1)}{(2k+1)r} [Y_{k+1}(r) - Y_{k-1}(r)] + b_k Y_k(r) = 0. \quad (16)$$

При решении последнего уравнения в малоугловой модификации метода сферических гармоник (МСГ) [7] проводится замена

$$\frac{k(k+1)}{(2k+1)r} [Y_{k+1}(r) - Y_{k-1}(r)] \approx \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial x} Y(x, r), \quad x = \sqrt{k(k+1)}, \quad (17)$$

и решение имеет вид [7]:

$$Y_k(r) = \exp \left[-\varepsilon r \left(1 - \frac{\Lambda}{\ln g} \frac{g^{\sqrt{k(k+1)} - 1}}{\sqrt{k(k+1)}} \right) \right], \quad (18)$$

где индикатриса взята в представлении Хеньи–Гринштейна $x_k = g^k$ или $b_k = \varepsilon(1 - \Lambda g^k)$.

В выражении (17) в МСГ учтено, что при наличии особенностей по углу в решении $L(r, \mu)$ ее угловой спектр $Y_k(r)$ медленно убывает от индекса k , что позволяет [7] ввести непрерывную функцию $Y(k, r)$, которая в целочисленных точках совпадает с $Y_k(r)$. Функция $Y(k, r)$ является медленной монотонно убывающей функцией k , что и позволяет допустить приближение (17).

Воспользуемся представлением (17) для преобразования второго члена в уравнении (16) и запишем

$$\frac{k(k+1)}{(2k+1)r} [Y_{k+1}(r) - Y_{k-1}(r)] \approx \varepsilon \Lambda \left(g^x - \frac{g^x - 1}{x \ln g} \right) Y_k(r). \quad (19)$$

Теперь (16) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2k+1} \frac{d}{dr} [(k+1)Y_{k+1}(r) + kY_{k-1}(r)] + \varepsilon \left(1 - \frac{\Lambda}{\ln g} \frac{g^{\sqrt{k(k+1)} - 1}}{\sqrt{k(k+1)}} \right) Y_k(r) = 0, \quad (20)$$

что равносильно УПИ для ПМ-источника при нормальном падении на слой, но с существенно более острой индикатрисой рассеяния

$$x'_k = \frac{g^{\sqrt{k(k+1)} - 1}}{\sqrt{k(k+1)} \ln g}.$$

С учетом того что при переходе от уравнения в сферической геометрии к уравнению в плоской индикатриса среды стала значительно более острой функцией угла (рис. 1), что физически эквивалентно учету особенностей решения по углу, количество членов ряда для описания решения возрастает с сотен до тысяч. Матрица такой системы становится плохо обусловленной, делая уравнение практически не решаемым.

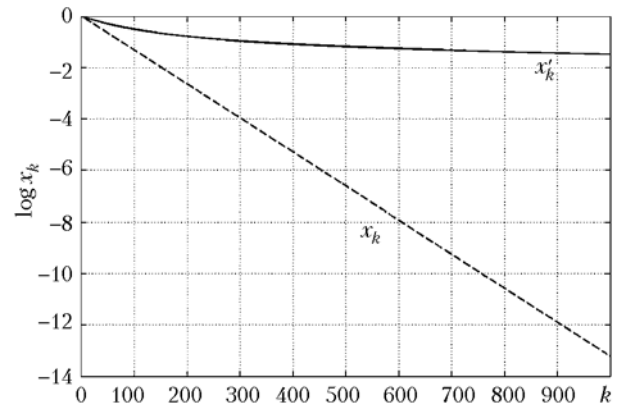


Рис. 1. Зависимость коэффициентов разложения индикатрисы рассеяния от номера

С другой стороны, такое преобразование в наибольшей степени искажает зависимость гармоник от расстояния для малых оптических толщ, где угловому распределению яркости кратностей рассеяния низших порядков присущи особенности [11]: в нулевой кратности рассеяния имеется особенность вида $\frac{1}{r^2} \delta(\hat{\mathbf{1}} - \hat{\mathbf{r}})$, в первой кратности — $\frac{1}{r\sqrt{1-\mu^2}} + \ln[r^2(1-\mu^2)]$, во второй кратности — $\ln[r(1-\mu) + \ln r]$, третья и более высокие кратности рассеяния особенностей не имеют. Представление (20) сглаживает особенности тела яркости в первой и второй кратностях рассеяния.

Для устранения этого эффекта представим решение в виде суммы:

$$L(r, \mu) = \tilde{L}(r, \mu) + L_{\text{МСГ}}(r, \mu), \quad (21)$$

где решение в малоугловой модификации метода сферических гармоник (МСГ) [6] имеет вид

$$L_{\text{МСГ}}(r, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi r^2} \exp \left[-\varepsilon r \left(1 - \frac{\Lambda}{\ln g} \frac{g^{\sqrt{k(k+1)} - 1}}{\sqrt{k(k+1)}} \right) \right] P_k(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi r^2} Z_k(r) P_k(\mu).$$

Так как малоугловая часть решения в (21) содержит все особенности точного решения [6, 7], то $\tilde{L}(r, \mu)$ — гладкая функция.

Для дальнейшего анализа перейдем к матричной форме УПИ (20), аналогичной описанной в [13]:

$$\bar{A} \frac{d}{d\tau} \mathbf{Y}(\tau) + \bar{D} \mathbf{Y}(\tau) = \mathbf{0}, \quad (22)$$

где $\tau = \varepsilon r$ — оптическое расстояние; знаком « \leftrightarrow » над буквой обозначены матрицы;

$$(\bar{A})_{i,i+1} = \frac{i}{2i-1}, (\bar{A})_{i,i-1} = \frac{i-1}{2i-1}, \mathbf{Y}' = \{\tilde{Y}_{i+1}(r)\},$$

$$\bar{D} = \text{Diag} \left\{ \varepsilon \left(1 - \frac{\Lambda}{\ln g} \frac{g^p - 1}{p} \right) \right\}, p = \sqrt{(i+1)(i+2)},$$

i — бегущий индекс элементов матрицы и столбцов системы (22).

Представление (21) приводит [14] к появлению в правой части уравнения (22) членов невязки

$$\Delta = -\frac{1}{2k+1} [(k+1)b'_{k+1}Z_{k+1}(r) + kb'_{k-1}Z_{k-1}(r)] + \frac{k(k+1)}{(2k+1)r} [Z_{k+1}(r) - Z_{k-1}(r)] + b_k Z_k(r) \quad (23)$$

или, в матричной форме:

$$\bar{\Delta} = (\bar{A} - \bar{I}) \bar{D} \mathbf{Z}(\tau) + a_{N+1} \mathbf{Z}_{N+1}(r), \quad (24)$$

а система уравнений по методу СГ (22) приобретает вид

$$\bar{A} \frac{d}{d\tau} \mathbf{Y}(\tau) + \bar{D} \mathbf{Y}(\tau) = (\bar{A} - \bar{I}) \bar{D} \mathbf{Z} + a_{N+1} \mathbf{Z}_{N+1}(r), \quad (25)$$

где появление членов

$$a_{N+1} = \frac{N+1}{2N+1} b'_{N+1}, \quad \mathbf{Z}_{N+1} = \left\{ \underset{N}{0 \dots 0}, Z_{N+1}(r) \right\}$$

связано с использованием $N+1$ члена малоуглового приближения.

Граничные условия также можно записать в матричной форме [14]:

$$[\bar{I} \quad \bar{G}] \bar{P} \mathbf{C}(0) = \mathbf{0}, \quad [\bar{I} \quad -\bar{G}] \bar{P} \mathbf{C}(\tau_0) = -\mathbf{X}(\tau_0), \quad (26)$$

где $X_j(\tau) = Z_{2j-1}(\tau) - \sum_{i=0}^N G_{ji} Z_{2i-2}(\tau)$; \bar{P} — матрица сортировки четных и нечетных элементов вида

$$\bar{P} \mathbf{C} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{odd} \\ \mathbf{C}_{even} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Матрица системы, состоящей из нескольких сотен уравнений, является плохо обусловленной, что приводит к увеличению погрешности вычислений с ростом оптической толщи. Для устранения этого эффекта используют масштабное преобразо-

вание [13], которое позволяет решению сохранять устойчивость с ростом оптической толщи. В результате система в матричной форме имеет вид [14]:

$$-\bar{S} \bar{U}^{-1} \mathbf{C}(0) + \bar{H} \bar{U}^{-1} \mathbf{C}(\tau_0) = \mathbf{S} \mathbf{J}(\tau_0), \quad (28)$$

где

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{I} \\ e^{\bar{\Gamma} \tau_0} & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{H} = \begin{bmatrix} 0 & e^{-\bar{\Gamma} \tau_0} \\ \bar{I} & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_- & 0 \\ 0 & \bar{\Gamma}_+ \end{bmatrix}$$

— матрица собственных значений матрицы $\bar{B} = \bar{A}^{-1} \bar{D}$, отсортированных по возрастанию; \bar{U} — матрица соответствующих собственных векторов; $\bar{T} = \bar{U}^{-1} (\bar{I} - \bar{A}^{-1}) \bar{D}$;

$$\mathbf{J} = \left\{ \sum_{j=1}^{N+1} (T_{ij}) \frac{[1 - \exp[-\Gamma_{ii} \tau_0 - (1 - \Lambda b'_k) \tau_0]]}{\Gamma_{ii} + (1 - \Lambda b'_k)} \right\} + a_{N+1} (\bar{\Gamma} + b_{N+1} \bar{I})^{-1} \{ \bar{I} - \exp[-(\bar{\Gamma} + b_{N+1} \bar{I}) \tau_0] \} \bar{U}^{-1} A_{N+1}^{-1}.$$

Решение данной задачи было реализовано в среде TheMathWorks® Matlab. Для оценки точности полученного решения было проведено сравнение со случаем однократного рассеяния. На рис. 2 сплошной линией нанесены результаты расчетов обратного рассеяния по предложенному алгоритму, а пунктирной — в приближении однократного рассеяния для параметров среды: $g = 0,8$, $\Lambda = 0,8$, $\tau = 0,1$. Для достижения приемлемой точности расчетов количество полиномов Лежандра в разложении равно 1501.

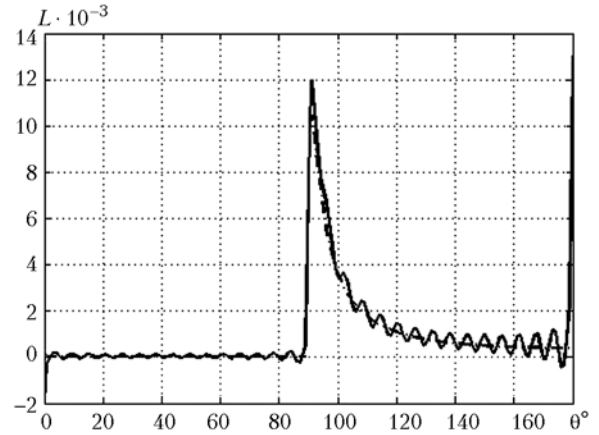


Рис. 2. Сравнение расчетов яркости обратного рассеяния по предложенному методу с однократным рассеянием для малых оптических толщ $\tau = 0,1$

На рис. 3 сплошной линией нанесены результаты расчетов по предложенному алгоритму, а пунктирной — в малоугловой модификации метода сферических гармоник для поля, рассеянного вперед, параметры среды: $g = 0,8$, $\Lambda = 0,8$, $\tau = 10$ (на графиках нанесены логарифмы соответствующих функций). Из рис. 3 видно, что решение для излучения, рассеянного вперед, сходится быстрее, поэтому можно использовать намного меньше ($N = 301$) гармоник в разложении.

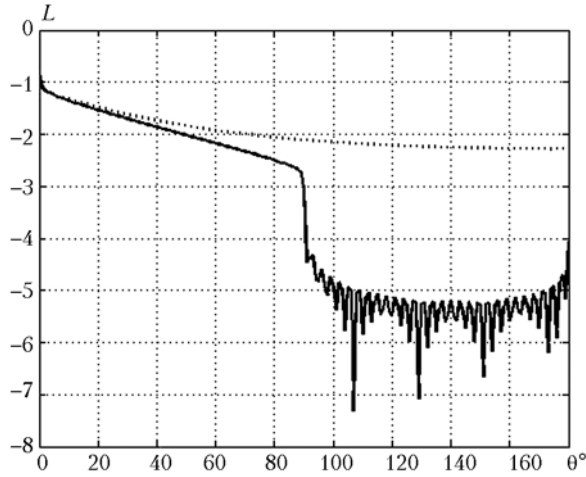


Рис. 3. Сравнение расчетов яркости светового поля в передней полусфере направлений по предложенному алгоритму с малоугловой модификацией метода сферических гармоник для $\tau = 10$

3. Оптическая передаточная функция слоя среды

ОПФ идеальной оптической системы при наблюдении через толщу мутной среды есть преобразование Фурье от распределения освещенности $E(\rho)$ в плоскости изображения светящейся точки, расположенной на оси оптической системы:

$$T(\mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\rho) e^{-i\mathbf{p}\rho} d^2\rho = \frac{\pi O^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} L(r, \mu) e^{-i\mathbf{p}\rho} d^2\rho, \quad (29)$$

где O — относительное отверстие системы; $\mu = \cos\theta = \sqrt{1 - (\rho/s)^2}$, s — расстояние от выходного зрачка до плоскости анализа изображения; ρ — расстояния до точки изображения в плоскости анализа от оптической оси.

Для введения ОПФ системы видения необходимо выполнение условия инвариантности (изопланарности) изображения к сдвигу объекта в плоскости предметов, что в общем случае несправедливо при регистрации углового распределения яркости в одной фиксированной точке пространства [15]. Поскольку для определения ОПФ в качестве объекта берется светящаяся на оптической оси точка, то $L(r, \mu)$ есть распределение яркости от ТИ-источника, определяемое из краевой задачи (1). Смещение точки в плоскости предметов приводит к изменению r , что нарушает условие изопланарности. Однако для решения практических задач требуется выполнение условия изопланарности с некоторой точностью, поэтому можно ввести понятия зон изопланарности [15], в рамках которых проводится последующий анализ ОПФ.

Подставляя решение в виде (3) в выражение для ОПФ (29), получим

$$\begin{aligned} T(\mathbf{p}) &= \frac{\pi O^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} C_k(r) P_k(\mu) e^{-i\mathbf{p}\rho} d^2\rho = \\ &= \frac{\pi O^2}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} C_k(r) \int_{-\infty}^{\infty} P_k(\mu) e^{-i\mathbf{p}\rho} d^2\rho. \end{aligned} \quad (30)$$

Поле зрения системы обычно существенно превышает размеры объекта, и в пределах малых углов полиномы Лежандра можно заменить на функцию Бесселя $P_k(\cos\theta) \approx J_0(k\theta)$, что в предположении осевой симметрии системы позволяет сделать преобразования интеграла в (30):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} P_k(\cos\theta) e^{-i\mathbf{p}\rho} d^2\rho &= 2\pi s^2 \int_0^{\infty} P_k(\cos\theta) J_0\left(\frac{\rho s}{s}\right) \frac{\rho}{s} d\left(\frac{\rho}{s}\right) \approx \\ &\approx 2\pi s'^2 \int_0^{\infty} J_0(k\theta) J_0(ps'\theta) \theta d\theta = s^2 \frac{2\pi}{k} \delta(k-ps) \Big|_{k \gg 1} \approx \\ &\approx s^2 \frac{4\pi}{2k+1} \delta(k-ps'), \end{aligned} \quad (31)$$

где в приближении малых углов использовано обычное для параксиальной оптики допущение $\theta \approx \sin\theta \approx \tan\theta = \rho/s$ и учтено, что малым углам соответствуют члены ряда (3) с большими номерами.

Последнее соотношение приводит к выражению для ОПФ системы видения

$$T(p) = \frac{\pi O^2}{4} C_{k=ps}(r). \quad (32)$$

На рис. 4 приведено сравнение расчетов нормированной ОПФ системы видения в описанном в данной статье решении с малоугловым приближением: сплошной линией нанесены значения ОПФ по предлагаемому методу, пунктирной — в малоугловом приближении. При расчетах принято $s = 1$. Верхние графики соответствуют оптической толще $\tau = 1$, нижние — $\tau = 4$.

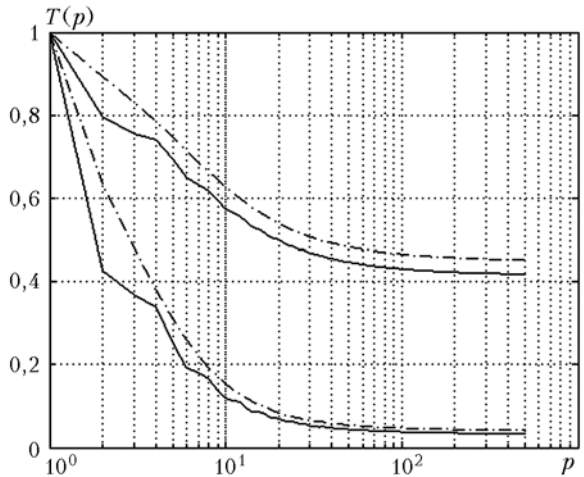


Рис. 4. Нормированная ОПФ слоя мутной среды

Видно, что учет дисперсии путей рассеянных фотонов снижает значения ОПФ в зоне низких пространственных частот.

Выводы

1. Предложенный метод решения УПИ позволяет определить поле яркости ТИ-источника с учетом многократных переотражений в пределах полного телесного угла. Выделение малоугловой составляющей позволяет достаточно просто решить задачу численными методами, так как оставшаяся функция является гладкой и не содержит особенностей.

2. Проведенный анализ показал существенное значение учета пространственных и угловых особенностей решения в задачах теории переноса с произвольной трехмерной геометрией.

3. Выявлено (см. рис. 3), что расчеты яркости светового поля в малоугловом приближении несколько превышают расчеты поля рассеянного вперед излучения в зоне «больших» (более 30°) углов, что объясняется пренебрежением в малоугловом приближении дисперсией путей рассеянных фотонов.

4. Влияние дисперсии путей рассеянных фотонов на ОПФ (см. рис. 4) сказывается на малых частотах, уменьшая ее значения.

1. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2005. 1072 с.
2. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М.: Мир, 1973. 362 с.
3. Marshak A., Davis A. 3D radiative transfer in cloudy atmospheres. Springer, 2005. 686 p.
4. Evans K.F. The spherical harmonics discrete ordinates method for three-dimensional atmospheric radiative transfer // J. Atmos. Sci. 1998. V. 55. N 3. P. 429–446.

5. Зега Э.П., Иванов А.П., Кацев И.Л. Перенос изображения в рассеивающих средах. Минск: Наука и техника, 1985. 240 с.
6. Будак В.П., Козельский А.В. О точности и границах применимости малоуглового приближения // Оптика атмосф. и океана, 2005. Т. 18. № 1. С. 38–44.
7. Будак В.П., Сармин С.Э. Решение уравнения переноса излучения методом сферических гармоник в малоугловой модификации // Оптика атмосф. 1990. Т. 3. № 9. С. 981–987.
8. Lyapustin A.I., Muldashev T.Z. Solution for atmospheric optical transfer function using spherical harmonics method // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer. 2001. V. 68. N 1. P. 43–56.
9. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1961. 520 с.
10. Марчук Г.И. Методы расчета ядерных реакторов. М.: Госатомиздат, 1961. 667 с.
11. Петров Э.Е., Усачев Л.Н. Пространственное и угловое распределение нейтронов от точечного изотропного источника с учетом анизотропии рассеяния // Теория и методы расчета ядерных реакторов. М.: Госатомиздат, 1962. С. 58–71.
12. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. М.: Едиториал УРСС, 2002. 516 с.
13. Karp A.H., Greenstadt J., Fillmore J.A., Radiative transfer through an arbitrary thick scattering atmosphere // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer. 1980. V. 24. N 5. P. 391–406.
14. Будак В.П., Козельский А.В., Савицкий Е.Н. Улучшение сходимости метода сферических гармоник при сильно анизотропном рассеянии // Оптика атмосф. и океана. 2004. Т. 17. № 1. С. 36–41.
15. Белов В.В., Афонин С.В. От физических основ, теории и моделирования к тематической обработке спутниковых изображений. Томск: ИОА СО РАН, 2005. 266 с.

V.P. Budak, O.P. Melamed. Improved method of spherical harmonics for determination of the scattering function for a point of a turbid medium layer.

The solution method of the radiative transfer equation (RTE) for a point unidirectional source (PU-source) is developed on the basis of the spherical harmonics method. The convergence acceleration of the method is achieved by the subtraction from the solution of a small angle component containing all the solution singularities, thus the rest of the solution is a smooth function. The scale transformation is applied to maintenance of the solution stability at increasing optical thickness. The numerical calculations have allowed obviously discovering the physics of the small angle approximation: the neglect of a variance of the trajectory length of a scattered photons and backscattering.