«Оптика атмосферы», **2**, № 2 (1989) УДК 535.317.25

В.А. Удод

О РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ

Предложено корректное определение разрешающей способности по Фуко, используемое в дальнейшем для оптимальной коррекции изображений наблюдаемых объектов в оптической системе, работающей в турбулентной атмосфере в условиях случайной рефракции.

Введение

Оценка качества оптических систем, работающих в турбулентной атмосфере в условиях случайной рефракции, является одной из важных задач в общей теории оптики атмосферы [6]. Общеизвестно, что одним из наиболее распространенных критериев оценки качества изображающих систем (ИС) различного типа, в том числе и оптических, является разрешающая способность (РС) по Фуко, которая определяется [1—5] из уравнения

$$G(\nu) = K(\nu), \tag{1}$$

где G — суммарная частотно-контрастная характеристика (ЧКХ) ИС; K — пороговый контраст приемника изображения; ν — пространственная частота.

Здесь уместно упомянуть о существующих частных определениях РС: объективная РС — соответствует случаю, когда [5]

$$K = M_{\text{пор}}\delta;$$

предельная РС, если [1]

$$K = 0;$$

визуальная РС, если [1]

$$K = K_{\text{зр}},$$

где $M_{\text{пор}}$ — пороговое отношение сигнал—шум (ОСШ); δ — относительное среднеквадратическое значение шума на выходе ИС; $K_{\text{зр}}$ — пороговый контраст зрительного анализатора (по Сельвину [4] $K_{\text{зр}} = 0{,}02$). В общем случае [11]

$$K = \sqrt{K_{\text{ш}}^2 + K_{\text{зр}}^2},$$

где $K_{\text{ш}} = M_{\text{пор}}\delta$ — составляющая порогового контраста, обусловленная наличием шума на выходе ИС. С учетом контрастирования $K_{\text{ш}} = \gamma M_{\text{пор}}\delta$, где γ — коэффициент контрастности [11].

Совершенно очевидно, что определение РС на основе уравнения (1) некорректно, т. к. данное уравнение может иметь не единственное решение и, следовательно, РС может быть определено неоднозначно. Практически такая ситуация вполне возможна. Соответствующий пример, относящийся к фотографической системе, содержащей объектив с центрально-экранированным зрачком, можно найти в работе [2]. Кроме того, данная ситуация наиболее типична для аэросъемных систем из-за эффекта сдвига фотографируемого объекта во время экспозиции [2, 4]. В этих случаях, следуя Фивенскому, за РС принимают первый корень уравнения (1) в области низких частот, считая остальную полосу частот областью «ложного разрешения» [4], то есть

$$R = \min\{\nu \geqslant 0 \mid G(\nu) = K(\nu)\}. \tag{2}$$

Однако и такое определение РС имеет недостатки._Так, например, из (2) следует, что если $G = K$ в полосе частот $[0, \bar{\nu}]$, $\bar{\nu} > 0$, то РС будет равна нулю. С этим нельзя согласиться, поскольку выполнение равенства $G(\nu) = K(\nu)$ для какой-либо частоты ν означает, что данная частота еще (!) разрешается [2, 16] и поэтому в рассматриваемом случае РС будет не меньше $\bar{\nu}$, то есть не нулевой. Кроме того, уравнение (1) может вообще не иметь решений, а значит РС может быть просто не определена, что противоречит требованиям, предъявляемым к критериям качества, ибо он (критерий качества) всегда должен выражаться числом либо функцией [9].

Корректная формулировка критерия разрешающей способности по Фуко

Согласно [2, 16] для разрешаемой частоты ν в общем случае выполняется соотношение

$$\kappa_0 G(\nu) \geq K(\nu),$$

где $\kappa_0 G$ — контраст миры синусоидального профиля на выходе ИС; κ_0 — исходный контраст (контраст изображения миры, сформированного идеальной ИС), введенный для полноты рассмотрения.

Наряду с разрешаемой введем в рассмотрение непрерывно разрешаемую частоту, которую определим так: если $\kappa_0 G(\nu) \geq K(\nu)$, то $\kappa_0 G(\nu') \geq K(\nu')$для любой $0 \leq \nu' \leq \nu$.

Представляется естественным, исходя из этого, определять РС как максимальную непрерывно разрешаемую частоту, что вполне согласуется с содержанием понятия РС и ее определением экспериментальным методом [17]. Сказанное может быть формализовано следующим образом [7]:

$$R = \sup \{\bar{\nu} \geqslant 0 \mid \kappa_0 G(\nu) \geqslant K(\nu),\ 0 \leqslant \nu \leqslant \bar{\nu}\}. \tag{3}$$

Однако (как это выяснилось в дальнейшем) и такому определению РС присущи недостатки. Во-первых, из (3) следует, что предельная РС (соответствует случаю, когда $K = 0$ [1]) любой ИС будет бесконечной, хотя последняя, согласно (2), всегда ограничена первым корнем уравнения $G(\nu) = 0$. Во-вторых, множество в правой части (3) может быть пусто из-за низкого исходного контраста либо из-за высокого порогового контраста. А поскольку понятие «точная верхняя граница» к пустому множеству не применимо [8], то РС может оказаться не определенной.

На наш взгляд, обобщением выражения (3), свободным от указанных недостатков, может служить выражение вида

$$R = \mu \{\bar{\nu} \geqslant 0 \mid \kappa_0 G(\nu) \geqslant K(\nu),\ G(\nu) > 0,\ 0 \leqslant \nu \leqslant \bar{\nu}\}, \tag{4}$$

где μ — мера Лебега.

Такое определение РС корректно, то есть значение РС, вычисляемое по формуле (4), всегда будет существовать и единственно для любой ИС. Это следует из того, что множество A в правой части (4) является выпуклым (следует из определения непрерывно разрешаемой частоты), а значит, согласно [18], может быть только одним из множеств вида

$$A = [0,\ a] \ \text{либо}\ A = [0,\ a),\ a \geqslant 0, \tag{5}$$

которые измеримы по Лебегу [8]. Если $A \neq \varnothing$ (непусто), то в силу (5) символ μ в (4) может быть заменен на «sup». Если, кроме того, $\kappa_0 G + K > 0$ всюду на неотрицательной оси пространственных частот, то (3) и (4) становятся эквивалентными.

Здесь необходимо отметить следующее. Поскольку изобразительные свойства систем (ЧКХ, пороговый контраст) в общем случае анизотропны (зависят от направления), то выражение (4), строго говоря, следует рассматривать как РС системы по некоторому направлению Θ (РС по направлению) и обозначить ее через R_Θ

$$R_\theta = \mu \{\nu \geqslant 0 \mid \kappa_0 C_\theta(\nu) \geqslant K_\theta(\nu),\ G_\theta(\nu) > 0,\ 0 \leqslant \nu \leqslant \bar{\nu}\}, \tag{6}$$

а за РС, руководствуясь [10], принимать величину

$$\bar{R} = \mu \{\bar{\nu} \geqslant 0 \mid \kappa_0 G_\theta(\nu) \geqslant K_\theta(\nu),\ G_\theta(\nu) > 0,\ 0 \leqslant \nu \leqslant \bar{\nu},\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}, \tag{7}$$

где $G_\Theta(\nu) = T(\nu\cos\Theta, \nu\sin\Theta)$; $T(\nu_x, \nu_y)$ — суммарная двумерная ЧКХ ИС; Θ — угол ориентации синусоидальной миры [1].

Если изобразительные свойства системы изотропны, то (5) и (7) совпадают между собой и с (4).

Решение оптимизационных задач

РС любой ИС всегда реализуется с некоторой вероятностью [2]. Указанную вероятность, являющуюся функцией ПК [3], назовем вероятностью разрешения (ВР). Из двух различных ИС с одинаковой РС лучшего качества, очевидно, будет та, у которой ВР выше. Поэтому можно рассматривать задачу оптимальной коррекции изображений по критерию максимума ВР (либо максимума порогового ОСШ [12]) при данной величине РС системы.

Эта задача, на наш взгляд, представляет самостоятельный интерес. Поэтому ее рассмотрение будем проводить для изображающих систем достаточно «общего» типа — в числе которых оптическая система, работающая в турбулентной атмосфере в условиях случайной рефракции.

Одномерный вариант

Итак, пусть нам задана объективная РС

$$R_0 = \mu\{\bar{\nu} \geqslant 0 \mid \kappa_0 G(\nu) \geqslant M_{\text{пор}}\delta,\ G(\nu) > 0,\ 0 \leqslant \nu \leqslant \bar{\nu}\}.$$

Для случая $M_{\text{пор}}\delta > 0$, представляющего наибольший практический интерес

$$R_0 = \mu\{\bar{\nu} \geqslant 0 \mid \kappa_0 G(\nu) \geqslant M_{\text{пор}}\delta,\ 0 \leqslant \nu \leqslant \bar{\nu}\}. \tag{8}$$

Для одномерной модели функционирования ИС и модели шума как пространственного стационарного случайного процесса с нулевым средним значением

$$G = |\tilde{h}\tilde{\varphi}|;\ \delta = \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\nu)\,|\tilde{\varphi}(\nu)|^2 d\nu / B}, \tag{9}$$

где $\tilde{h}\tilde{\varphi}$ — оптическая передаточная функция (ОПФ) искажающего и корректирующего фильтра соответственно; S — спектральная плотность шума (неотрицательная, четная, функция своего аргумента [15]); B — величина фона изображения миры.

Для оптико-атмосферных систем при достаточно большом временном осреднении можно принять [6]

$$\tilde{h} = \tilde{h}_a \tilde{h}_0,$$

где $\tilde{h}_a$ — ОПФ турбулентной атмосферы, влияние которой на проходящий оптический пучок, несущий изображение наблюдаемого объекта, моделируется линейным (изопланатичным) фильтром низких частот; $\tilde{h}_0$ — ОПФ приемной апертуры оптической системы; S — спектральная плотность флуктуации показателя преломления среды (воздуха) — количественная модель случайной рефракции.

Используя (5), (8), (9), вышеуказанную оптимизационную задачу можно представить как нахождение максимума функционала

$$I(\Phi) = \inf_{0 \leqslant \nu < R_0} \frac{H(\nu)\,\Phi(\nu)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\nu)\Phi(\nu)\,d\nu} \tag{10}$$

при следующих условиях:

1) $R_0 > 0$;
2) H, Φ, S — неотрицательные четные функции на всей оси частот;
3) H, $\Phi > 0$ на $[0, R_0)$; (11)
4) $0 < \int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\nu)\Phi(\nu)d\nu < \infty$.

Здесь $H = \left|\tilde{h}\right|^2$; $\Phi = |\tilde{\varphi}|^2$. При этом величина $\kappa_0 B\sqrt{J}$ представляетm по своему физическому смыслу минимальное ОСШ в полосе непрерывно разрешаемых частот и является максимально возможным пороговым ОСШ, с которым реализуется данное значение R_0 объективной РС системы с фиксированными характеристиками H, Φ.

Используя цепочку простых неравенств

$$\int\limits_0^{\infty} S(\nu)\,\Phi(\nu)\,d\nu \geqslant \int\limits_0^{R_0} S(\nu)\,\Phi(\nu)\,d\nu \geqslant \inf_{0 \leqslant \nu < R_0} H(\nu)\,\Phi(\nu) \int\limits_0^{R_0} \frac{S(\nu)}{H(\nu)}\,d\nu,$$

получаем, что максимум функционала (10) при ограничении (11) равен

$$I_{\max} = \left(2\int\limits_0^{R_0} \frac{S(\nu)}{H(\nu)}\,d\nu\right)^{-1}$$

и достигается при

$$\Phi_{\text{opt}}(\nu) = \begin{cases} 1/H(\nu), & |\nu| < R_0 \\ 0, & |\nu| \geqslant R_0 \end{cases}. \tag{12}$$

Таким образом, максимальное пороговое ОСШ, с которым может реализоваться данное значение объективной РС, равно $\kappa_0 B\sqrt{I_{\max}}$. При этом согласно (12) ОПФ оптимального корректирующего фильтра будет обратной к ОПФ искажающего фильтра в диапазоне частот $(-R_0, R_0)$ и равной нулю вне его.

Двумерный вариант

В этом случае оптимизационная задача сводится к нахождению максимума функционала при условии:

$$J(\Phi) = \inf_{\substack{0 \leqslant \nu < \bar{R}_0 \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi}} \frac{H(\nu\cos\theta, \nu\sin\theta)\Phi(\nu\cos\theta, \nu\sin\theta)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\nu_x, \nu_y)\,\Phi(\nu_x, \nu_y)\,d\nu_x d\nu_y} \tag{13}$$

1) $\bar{R}_0 > 0$;
2) H, Φ, S — неотрицательные четные функции на всей плоскости частот;
3) $H(\nu_x, \nu_y)\,\Phi(\nu_x, \nu_y) > 0, \ \nu_x^2 + \nu_y^2 < \bar{R}_0^2$; (14)
4) $0 < \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\nu_x, \nu_y)\,\Phi(\nu_x, \nu_y)\,d\nu_x d\nu_y < \infty.$

Величины $\bar{R}_0, H$, Φ, S, $\kappa_0 B\sqrt{J}$ имеют аналогичный смысл, что и в одномерном варианте.

Используя условие (14), получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\nu_x, \nu_y)\,\Phi(\nu_x, \nu_y)\,d\nu_x d\nu_y = \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{2\pi} S(\nu\cos\theta, \nu\sin\theta)\,\Phi(\nu\cos\theta, \nu\sin\theta)\,\nu d\nu d\theta \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{0}^{\bar{R}_0}\int\limits_{0}^{2\pi} S(\nu\cos\theta, \nu\sin\theta)\,\Phi(\nu\cos\theta, \nu\sin\theta)\,\nu d\nu d\theta \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{\substack{0 \leqslant V < \bar{R}_0 \\ 0 \leqslant \theta < 2\pi}} H(\nu\cos\theta, \nu\sin\theta)\Phi(\nu\cos\theta, \nu\sin\theta) \int\limits_{0}^{\bar{R}_0}\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{S(\nu\cos\theta, \nu\sin\theta)}{H(\nu\cos\theta, \nu\sin\theta)}\,\nu d\nu d\theta =$$

$$= \inf_{\substack{0 \leqslant \nu < \bar{R}_0 \\ 0 \leqslant \theta < 2\pi}} H(\nu\cos\theta, \nu\sin\theta)\,\Phi(\nu\cos\theta, \nu\sin\theta) \iint\limits_{\nu_x^2+\nu_y^2<\bar{R}_0^2} \frac{S(\nu_x, \nu_y)}{H(\nu_x, \nu_y)}\,d\nu_x d\nu_x.$$

Отсюда следует, что максимум функционала (13) при условии (14) равен

$$J_{\max} = \left(\iint\limits_{\nu_x^2+\nu_y^2<\bar{R}_0^2} \frac{S(\nu_x, \nu_y)}{H(\nu_x, \nu_y)}\,d\nu_x d\nu_y\right)^{-1}$$

и достигается для

$$\Phi_{\text{opt}}(\nu_x, \nu_y) = \begin{cases} 1/H(\nu_x, \nu_y), & \nu_x^2 + \nu_y^2 < \bar{R}_0^2 \\ 0, & \nu_x^2 + \nu_y^2 \geqslant \bar{R}_0^2 \end{cases} \tag{15}$$

Таким образом, максимальное пороговое ОСШ, с которым может реализоваться данное значение $\bar{R}_0$ объективной РС равно $\kappa_0 B\sqrt{J_{\max}}$. При этом ОПФ оптимального корректирующего фильтра, согласно (15), будет обратной к ОПФ искажающего фильтра в пределах области частот, ограниченных кругом радиуса $\bar{R}_0$ с центром в начале координат и равной нулю вне его.

Пример неотрицательной ограниченной, финитной функции, преобразование Фурье которой не имеет нулей

Иногда бывает целесообразным получать изображения различных участков объекта с неодинаковой РС ([13]. При этом для сохранения возможности оптимальной фильтрации необходимо, чтобы ОПФ искажающего фильтра не имела нулей в соответствующем диапазоне частот (формулы (12), (15)). Совершенно очевидно, что для произвольно взятого искажающего фильтра (приемной апертуры оптической системы) это условие может нарушаться при изменении значений объективной РС в достаточно широких пределах. А поскольку функции рассеяния формирующего звена (искажающего фильтра) многих ИС, например, использующих проникающую радиацию [14], являются неотрицательными, финитными и ограниченными, то представляет интерес задача отыскания функции, обладающей перечисленными свойствами и такой, что ее преобразование Фурье нигде не имеет нулей.

Примером такой функции может служить функция вида

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{a^2}x, & 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где a — параметр.

Другим примером может служить функция $\varphi(x) = f(x) * f(-x)$ (символ «*» означает свертку), которая в отличие от первой обладает свойством четности. Преобразования Фурье этих функций соответственно равны

$$\tilde{f}(z) = 2\frac{(1+iz)\,e^{-iz} - 1}{z^2};$$

$$\tilde{\varphi}(z) = \frac{4}{z^4}\left[z^2 + 2(1-\cos z) - 2z\sin z\right],$$

где $z = 2\pi\nu a$.

Для двумерного случая можно принять произведение данных одномерных функций. Приведенные функции могут быть использованы при аподизации (неравномерном частичном экранировании) приемных апертур оптико-атмосферных систем. Это, в свою очередь, позволит осуществить оптимальную коррекцию изображений наблюдаемых объектов с переменной разрешающей способностью.

1. Вычислительная оптика /Русинов М.М., Грамматин А.П., Иванов П.Д. и др. Под общ. ред. М.М. Русинова. Л.: Машиностроение. Ленингр. отделение. 1984. 423 с.
2. Проектирование оптических систем: Пер. с англ. /Под ред. Р. Шеннона, Дж. Вайанта. М.: Мир. 1983. 432 с.
3. Смирнов А.Я., Меньшиков Г.Г. Сканирующие приборы. Л.: Машиностроение. Ленингр. отделение. 1986. 145 с.
4. Фивенский Ю.И. Методы повышения качества аэрокосмических фотоснимков. М.: Изд-во МГУ. 1977. 158 с.
5. Фризер Х. Фотографическая регистрация информации. Пер. с нем. М.: Мир. 1978. 670 с.
6. Зуев В.Е., Кабанов М.В. Перенос оптических сигналов в земной атмосфере (в условиях помех). М.: Сов. радио. 1977. 368 с.
7. Солодушкин В.И., Удод В.А.//В кн.: Обработка изображений и дистанционные исследования. (Тезисы докл.). Новосибирск. 1987, 10—12 ноября, с. 173—174.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука. 1977. 832 с.
9. Бутслов М.М., Степанов Б.М., Фанченко С.Д. Электронно-оптические преобразователи и их применение в научных исследованиях /Под ред. Е.К. Завойского. М.: Наука. 1978. 432 с.
10. Преобразователи электронно-оптические. Термины, определения и буквенные обозначения. ГОСТ 19803-86.
11. Гурвич А.М. Изв. АН СССР. Сер. физич. 1982. Т. 46. № 5. С. 964—969.
12. Гурвич А.М. и др. //Дефектоскопия. 1987. № 4. С. 28—32.
13. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. М.: Мир. 1982. Т. 2. 480 с.
14. Федоров Г.А. Радиационная интроскопия: Кодирование информации и оптимизация эксперимента. М.: Энергоатомиздат. 1982. 112 с.
15. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1979. 288 с.
16. Креопалова Г.В., Пуряев Д.Т. Исследование и контроль оптических систем. М.: Машиностроение. 1978. 224 с.
17. Материалы фотографические. Метод определения разрешающей способности. ГОСТ 2819-84. М., 1984.
18. Рудин У. Основы математического анализа.Пер. с англ. В.П. Хавина. М.: Мир. 1966. 320 с.

НИИ интроскопии при Томском политехническом институте

Поступила в редакцию 21 сентября 1988 г.

V.A. Udod. **On Resolution**.
Correct definition of the resolution according to Fuko is proposed, used later on for optimal correction of images of observed objects in an optical system, functioning through the turbulent atmosphere under the conditions of random refraction.