

АПРОКСИМАЦИЯ СТРУКТУРНОЙ ФУНКЦИИ ФАЗЫ ВОЛНОВОГО ФРОНТА

В работе получены аппроксимации структурной функции действительной фазы световой волны, искаженной в турбулентной атмосфере в классе полиномов относительно квадрата аргумента с учетом и без учета внешнего масштаба турбулентности. С ее использованием рассчитаны ошибки коррекции волнового фронта мембранными зеркалами, а также вклад в ошибки коррекции с учетом внешнего масштаба турбулентности полиномов Цернике и собственных функций корреляционной матрицы для выбранной аппроксимации структурной функции.

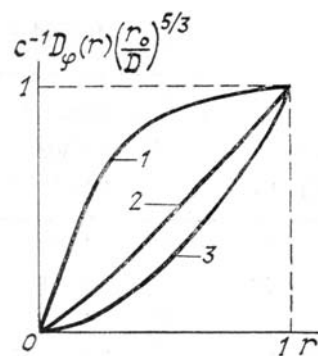
Статистические характеристики фазы световой волны, прошедшей через изотропную и локально однородную турбулентную атмосферу, выражаются через структурную функцию действительной фазы $D_\varphi(\rho)$ [1]. Вид структурной функции влияет на сложность численной схемы при решении ряда задач вычислительной атмосферной оптики. Для упрощения решения таких задач часто используют различного рода аппроксимации D_φ [2, 3]. При описании чисто фазовых флуктуаций большого масштаба аппроксимации должны предусматривать возможность оценки влияния внешнего масштаба турбулентности на получаемые результаты.

Целью настоящей работы является получение приближений $D_\varphi(\rho)$ в классе полиномов относительно ρ^2 с учетом и без учета внешнего масштаба турбулентности, а также их использование при решении ряда модельных примеров.

Выражению для структурной функции флуктуаций действительной фазы с учетом внешнего масштаба турбулентности L_0 можно придать следующий вид [1]:

$$D_\varphi(r) = 6,16 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{5/3} \int_0^\infty (1 - J_0(x)) (x^2 + \alpha^2 r^2)^{-11/6} x dx, \tag{1}$$

где $r_0 = 1,68(c_n^2 z k^2)^{-3/5}$ — радиус корреляции Фрида [4]; c_n — структурная постоянная показателя преломления; z — длина трассы; k — волновое число; J_0 — функция Бесселя нулевого порядка; $\alpha = 2\pi D/L_0$; D — диаметр круглой апертуры; $r = \rho/D$, $r \in (0,1)$.



Структурная функция: 1 — $\alpha = 6,28$; $C = 0,18$; 2 — $\alpha = 1$; $C = 1,70$; 3 — $\alpha = 0$; $C = 6,88$

Исследование функции (1) проведено в работах [1,5]. При $\alpha = 0$ она имеет вид [4] $D_{\varphi 0}(r) = 6,88 \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3} r^{5/3}$. Зависимость D_φ от α показана на рисунке. Оценим погрешность, возникающую при замене (1) функцией $D_{\varphi 0}$ для $\alpha \neq 0$. Введем аппроксимацию $D'_\varphi = CD_{\varphi 0}$, где коэффициент C определим из минимизации нормированной среднеквадратической ошибки аппроксимации функции $D_\varphi(1)$ функцией D'_φ на единичной круглой апертуре. Такая ошибка имеет вид

$$\delta = \int_0^1 (D_\varphi - D'_\varphi)^2 r dr / \int_0^1 D_\varphi^2 r dr. \quad (2)$$

В результате вычислений получили, значения $\alpha = 0,01; 0,1; 0,5$, соответствующие значениям $C = 0,923, 0,713, 0,443$ и $\delta = 3,5 \cdot 10^{-4}; 4,4 \cdot 10^{-3}; 0,18$. Отсюда можно предположить, что уже при $\alpha > 0,1$ внешний масштаб турбулентности будет оказывать влияние на решение ряда задач атмосферной оптики, рассматривающих чисто фазовые флуктуации большого масштаба (особенно на приземных трассах).

Выбор того или иного приближения структурной функции определяется его преимуществами при решении определенного класса задач. В задачах, связанных с разложением фазовых флуктуации по выбранной системе функций $f_i(r)$ (например, в адаптивной оптике [6]), часто приходится вычислять четырехкратные интегралы вида $\iint D_\varphi(r_1 - r_2) f_i(r_1) f_j(r_2) d^2 r_1 d^2 r_2$. Перейти от них к двукратным интегралам позволяет следующая аппроксимация:

$$D'_\varphi(r) = \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3} \sum_{i=1}^M a_i r^{2i}, \quad (3)$$

где M — количество членов разложения; a_i — коэффициенты разложения, определяемые из минимизации ошибки (2). Результаты расчетов при $M \leq 5$ приведены в табл. 1, в которой ϵ_0 обозначает усредненную по ансамблю реализаций среднеквадратическую ошибку волнового фронта, вычисленную по формулам работы [4] $D_\varphi(r)$ (1).

Таблица 1

α		0	0,1	1	6,28
	$\langle \epsilon_0 \rangle (r_0/D)^{5/3}$	1,0299	0,7807	0,3598	0,0704
$M=2$	a_1	8,868	6,918	3,356	0,641
	a_2	-2,112	-2,317	-1,770	-0,508
	δ	$3,2 \cdot 10^{-4}$	$7,5 \cdot 10^{-4}$	$3,3 \cdot 10^{-3}$	$4,4 \cdot 10^{-2}$
$M=3$	a_1	9,942	8,010	4,350	1,094
	a_2	-5,683	-6,245	-5,058	-2,019
	a_3	2,676	2,946	2,455	1,133
	δ	$6,4 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$8,0 \cdot 10^{-4}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$
$M=4$	a_1	10,788	9,024	5,159	1,576
	a_2	-10,795	-11,811	-9,911	-4,907
	a_3	11,620	12,687	10,948	6,187
	a_4	-4,768	-5,200	-4,530	-2,700
	δ	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$4,7 \cdot 10^{-5}$	$2,7 \cdot 10^{-4}$	$6,5 \cdot 10^{-3}$
$M=5$	a_1	11,496	9,839	5,872	2,042
	a_2	-17,406	-19,421	-16,563	-9,262
	a_3	31,483	35,518	30,905	19,254
	a_4	-28,614	-32,593	-28,479	-18,376
	a_5	9,935	11,416	9,979	6,534
	δ	$6,7 \cdot 10^{-6}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$2,9 \cdot 10^{-3}$

Рассмотрим ряд модельных примеров, решение которых значительно упрощается при использовании аппроксимации (3). В задаче определения дисперсий коэффициентов разложения $\langle b_i^2 \rangle$ волнового фронта по полиномам Цернике Z_i на круглой апертуре приведенные в работе [4] выражения интегрируются в элементарных функциях. Результаты вычислений при $\alpha = 0$ приведены в табл. 2. Случай $M = \infty$ взят из работ [4, 7]. Изменения коэффициентов $\langle b_i^2 \rangle (r_0/D)^{5/3}$ в зависимости от α для аппроксимации (3) с $M = 5$ приведены в табл. 3. Рассмотрим, как изменяются в зависимости от α аналогичные коэффициенты при функциях Карунена—Лоева G_i , вычисленных для (3) с $M = 4$

по формулам работы [7]. Введем для них нумерацию, аналогичную нумерации полиномов Цернике Z_i . Численные расчеты показали, что аппроксимация (3) позволяет получать на круглой апертуре функции G_i в виде круговых полиномов со слабокоррелирующими коэффициентами \tilde{b}_i . При $\alpha = 0$ по формулам работы [7] для структурной функции (1) было получено $\langle \tilde{b}_i^2 \rangle \approx \langle b_i^2 \rangle$, $i = 2, \dots, 10$; $\langle \tilde{b}_2 \tilde{b}_8 \rangle = \langle \tilde{b}_3 \tilde{b}_7 \rangle = 0,33 \langle \tilde{b}_8^2 \rangle = 0,33$; $\langle \tilde{b}_7^2 \rangle = -0,15 \langle b_2 b_8 \rangle = -0,15 \langle b_3 b_7 \rangle$. Изменения $\langle b_i^2 \rangle (r_0/D)^{5/3}$ в зависимости от α при использовании в расчетах структурной функции (3) показаны в табл. 3.

Таблица 2

M	2	3	4	5	∞
$\langle \varepsilon_0 \rangle (r_0/D)^{5/3}$	0,9985	1,0197	1,0263	1,0286	1,0299
$i=2,3$	0,466	0,458	0,453	0,451	0,449
$\langle b_i^2 \rangle \odot i=4-6$	0,022	0,028	0,026	0,025	0,023
$\odot \left(\frac{r_0}{P}\right)^5 i=7-10$	0	0,0052	0,0078	0,0076	0,0062
$i=11-15$	0	0	0,0019	0,0031	0,0024
$i=16-21$	0	0	0	0,0008	0,0012

Таблица 3

α	i	2,3	4-6	7,8	9, 10
Z_i	0,1	0,319	0,0276	0,0084	0,0084
	1,0	0,122	0,0214	0,0071	0,0071
	6,28	0,0114	0,00617	0,00358	0,00358
G_i	0,1	0,322	0,0305	0,0078	0,0088
	1,0	0,126	0,0239	0,0059	0,0075
	6,28	0,0141	0,0080	0,00236	0,00380

Рассмотрим вычисление ошибок коррекции фазы световой волны мембранным зеркалом при $M = 2$, $\alpha = 0$ [6]. Рассчитаем два зеркала с 3 и 4 круглыми приводами соответственно радиусом $0,51R_a$ и $0,42R_a$, центры которых расположены равномерно на окружности радиусом $0,6R_a$, где $R_a = D/2$. Радиус зеркала в 1,5 раза превышал R_a . Функция отклика зеркала на привод находилась через известную функцию Грина [8]. Сведение четырехкратных интегралов к двукратным сократило время численного счета примерно в 70 раз при использовании 600 точек численного интегрирования. Ошибки коррекции соответственно составили $0,22(D/r_0)^{5/3}$ и $0,14(D/r_0)^{5/3}$.

В заключение отметим, что в работе рассматривались приложения аппроксимации структурной функции действительной фазы. В силу того, что структурная функция комплексной фазы имеет похожее выражение [1], аппроксимация (3) может оказаться полезной и в этом случае.

1. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере/Под ред. В.И. Татарского. М.: Наука. 1976. 277 с.
2. Миронов В.Л., Носов В.В., Чен Б.Н. //Изв. вузов СССР. Радиофизика. 1980. Т. 23. № 4. С. 461-469.
3. Бакут П.А., Логинов В.А. //Квантовая электроника. 1982. Т. 9. № 6. С. 1167-1172.
4. Fried D.L. //JOSA. 1965. V. 55. № 11. P. 1426-1433.
5. Lutomirski R.F., Yura H.T. //JOSA. 1971. V. 61. № 4. P. 482-487.
6. Адаптивная оптика/Пер. с англ. под ред Э.А. Витриченко. М.: Мир. 1980.
7. Wang J., Markey J. //JOSA. 1978. V. 68. № 1. P. 78-87.
8. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1966. 444 с.

Московский госуниверситет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
19 сентября 1988 г.

K. V. Shishakov, V. I. Shmalgauzen. **Wavefront Phase Structure Function Approximations.**

Wavefront phase structure function approximations are derived for a light wave distorted in a turbulent atmosphere. The influence of external turbulent scale is considered. The wavefront correction errors are calculated for membrane adaptive mirrors. Contributions of Zernike polynomials and eigenfunctions of correlation matrix for the structure function approximation are investigated.