

А.В. Прокопов, Е.В. Ремаев, А.В. Бражниченко

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ОПТИЧЕСКОЙ РЕФРАКЦИИ В ТРЕХМЕРНО-НЕОДНОРОДНОЙ АТМОСФЕРЕ И ИХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Получены аналитические соотношения, устанавливающие связь между интегральными характеристиками геометрооптических лучей и параметрами трехмерно-неоднородной земной атмосферы, с помощью которых обоснованы модифицированные законы преломления света и новые методы определения атмосферных поправок к дальности.

При вычислении атмосферных поправок к результатам оптических измерений дальности или угловых величин в настоящее время широко используется приближение геометрической оптики. В рамках этого приближения атмосферные поправки определяются интегралами по траекториям геометрооптических лучей, для отыскания которых необходимо решить лучевые уравнения [1].

В литературе [1–3] обсуждаются методы расчета атмосферных поправок, которые требуют знания истинного пространственного распределения показателя преломления воздуха (что не всегда осуществимо на практике), либо предполагают замену этого распределения некоторым приближенным модельным профилем (что снижает точность определения атмосферных поправок). В работах [4, 5] предлагается новый подход к рассматриваемой проблеме, который позволяет обосновать методы определения атмосферных поправок, не нуждающиеся в использовании истинного либо модельного атмосферного профиля и не требующие отыскания явного вида траекторий лучей. Суть данного подхода состоит в том, что вместо обычных [1] дифференциальных лучевых уравнений рассматриваются эквивалентные им интегральные соотношения для некоторых усредненных вдоль лучей величин [4, 5]. Причем эти величины подбираются такими, чтобы их можно было непосредственно представить через экспериментально определяемые величины.

Рассмотрим в рамках подхода [5] новые формулировки законов преломления геометрооптических лучей в трехмерно-неоднородной атмосфере и новые методы определения атмосферных поправок к дальности.

В качестве исходных соотношений в соответствии с [5] выберем первый интеграл лучевого уравнения геометрической оптики

$$n_L \mathbf{l}_L - n_0 \mathbf{l}_0 = \int_0^{\sigma_L} \nabla n(\mathbf{r}(\sigma)) d\sigma, \quad (1)$$

а также усредненный вдоль траектории геометрооптического луча показатель преломления воздуха

$$\bar{n} = S^{-1} \int_0^{\sigma_L} n(\mathbf{r}(\sigma)) d\sigma, \quad (2)$$

и радиус-вектор \mathbf{r}_L , соединяющий начальную точку ($\mathbf{r} = 0$) траектории луча с конечной ($\mathbf{r} = \mathbf{r}_L$),

$$\mathbf{r}_L = \int_0^{\sigma_L} \mathbf{l}(\sigma) d\sigma. \quad (3)$$

Здесь $n(\mathbf{r})$ — трехмерно-неоднородный профиль показателя преломления воздуха; σ — лучевая координата, отсчитываемая вдоль траектории луча ($\sigma = 0$ при $\mathbf{r} = 0$); $\mathbf{l} = \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma}$ — единичный вектор касательной к лучу;

$S = \int_0^{\sigma_L} d\sigma$ — длина траектории луча; $L = |\mathbf{r}_L|$ — расстояние между концевыми точками траектории луча по прямой; индексами «0» и «L» снабжены величины, определяемые соответственно в начальной и конечной точках траектории.

Представляя интегралы (1)–(3) в виде разложения Эйлера — Маклорена [6], получим

$$n_L \mathbf{l}_L - n_0 \mathbf{l}_0 = \frac{\nabla n_L + \nabla n_0}{2}, \quad (4)$$

$$\bar{n} = \frac{n_0 + n_L}{2} - S/12 (n'_L - n'_0), \quad (5)$$

$$\mathbf{r}_L = \frac{\mathbf{l}_0 + \mathbf{l}_L}{2} S - S^2/12 (\mathbf{l}'_L - \mathbf{l}'_0), \quad (6)$$

где

$$\nabla n = n' \mathbf{l} + n \mathbf{l}', \quad (7)$$

введены обозначения $n' \equiv \frac{dn}{d\sigma}$, $\mathbf{l}' = \frac{d\mathbf{l}}{d\sigma}$ и отброшены слагаемые, пропорциональные $\frac{d^3 n}{d\sigma^3}$, $\frac{d^3 \mathbf{l}}{d\sigma^3}$ и производным более высокого порядка [5].

Рассмотрим несколько конкретных примеров применения уравнений геометрической оптики для усредненных вдоль лучей величин (4)–(7).

1. Получим закон преломления Снеллиуса плоскослоистой среды. Пусть свойства среды изменяются в направлении \mathbf{h} . Тогда $\nabla n_L + \nabla n_0 = g\mathbf{h}$ и формула (4) может быть представлена в виде

$$n_L \mathbf{l}_L - n_0 \mathbf{l}_0 = \frac{gS}{2} \mathbf{h}. \quad (8)$$

Умножая (8) поочередно на \mathbf{h} и на \mathbf{l}_L , а затем исключая $gS/2$ из получившихся уравнений, приходим к соотношению

$$n_L - n_0 \cos(\alpha_0 + \alpha_L) = [n_L \cos z_{bL} - n_0 \cos z_{b0}] \cdot \cos z_{bL},$$

где $\cos(\alpha_0 + \alpha_L) = (\mathbf{l}_0 \mathbf{l}_L)$; $\cos z_{b0} = (\mathbf{h} \mathbf{l}_0)$; $\cos z_{bL} = (\mathbf{h} \mathbf{l}_L)$; α_0, α_L — углы рефракции; z_{b0}, z_{bL} — видимые зенитные углы, искаженные рефракцией.

Учитывая, что $\alpha_0 + \alpha_L = z_{bL} - z_{b0}$, получаем

$$n_0 \sin z_{b0} = n_L \sin z_{bL} \quad (9)$$

известный закон преломления плоскослоистой среды. Анализ показывает, что с помощью уравнений (4)–(7) нетрудно обобщить закон преломления на случай трехмерно-неоднородной среды (одна из математических формулировок такого обобщенного закона будет приведена ниже, при рассмотрении рефракционной поправки к дальности).

2. Модифицируем теорему Лапласа–Ориани [2] для случая трехмерно-неоднородной среды. В условиях, при которых справедлива эта теорема $\left(\mathbf{l}_L = \frac{\mathbf{r}_L}{L}, n_L = 1, \nabla n_L = 0\right)$, формула (4) принимает вид

$$\frac{\mathbf{r}_L}{L} - n_0 \mathbf{l}_0 = \frac{\nabla n_0}{2} S. \quad (10)$$

Умножая (10) поочередно на $\mathbf{l}_0, \mathbf{h}_0$ (\mathbf{h}_0 — направление в зенит в начальной точке траектории), получим

$$\cos \alpha_0 - n_0 = \frac{g_{b0} \cos z_{b0} + g_{r0} \sin z_{b0}}{2} \cdot S, \quad (11)$$

$$\cos z_{\text{и}} - n_0 \cos z_{b0} = \frac{g_{b0} S}{2}, \quad (12)$$

где $z_{\text{и}}$ — истинный зенитный угол в точке наблюдения; g_{b0} — проекция ∇n_0 на \mathbf{h}_0 ; g_{r0} — горизонтальная проекция ∇n_0 (проекция на ось, перпендикулярную \mathbf{h}_0 и лежащую в плоскости, проходящей через векторы $\mathbf{h}_0, \mathbf{l}_0$).

Опуская далее индекс «0» и учитывая, что

$$\cos \alpha_{\text{бок}} = \frac{\cos \alpha - \cos z_{\text{в}} \cdot \cos z_{\text{и}}}{\sin z_{\text{и}} \sin z_{\text{в}}},$$

где $\alpha_{\text{бок}}$ — угол боковой рефракции, из (11), (12) получаем

$$\left[\frac{\cos \alpha \cos z_B - \cos \alpha_{\text{бок}} \cdot \sin z_B \cdot \sin \alpha \cdot \sqrt{1 - \sin^2 z_B \frac{\sin^2 \alpha_{\text{бок}}}{\sin^2 \alpha}}}{\cos^2 \alpha_{\text{бок}} \cdot \sin^2 z_B + \cos^2 z_B} - n_0 \cos z_B \right] \cdot \left[\cos z_B + \frac{g_r}{g_B} \sin z_B \right] = \cos \alpha - n_0. \quad (13)$$

Уравнение (13) связывает угол рефракции α с видимым зенитным углом z_B , углом боковой рефракции $\alpha_{\text{бок}}$, показателем преломления n_0 , его вертикальным и горизонтальными градиентами в точке наблюдения, и обобщает теорему Лапласа–Ориани на случай трехмерно-неоднородной среды. В пренебрежении боковой рефракцией $\alpha_{\text{бок}} = 0$ из (13) получаем

$$\alpha = (n_0 - 1) \frac{\sin z_B - \frac{g_r}{g_B} \cos z_B}{\cos z_B + \frac{g_r}{g_B} \sin z_B}, \quad (14)$$

откуда, если выполняется условие $g_r \ll g_B$, следует

$$\alpha = (n_0 - 1) \operatorname{tg} z_B - (n_0 - 1) [1 + \operatorname{tg}^2 z_B] \frac{g_r}{g_B}. \quad (15)$$

Первое слагаемое в (15) дает известное [2] соотношение теоремы Лапласа–Ориани плоскостлой среды, а второе описывает изменение рефракции за счет горизонтальной неоднородности [7].

3. Связь между величинами L и S в трехмерно-неоднородной среде и соотношение для атмосферной поправки $\delta L = S - L$, учитывающей рефракционное искривление луча, могут быть получены с помощью уравнений (4)–(7) [5]:

$$(\mathbf{r}_L \mathbf{l}_L) n_0 + (\mathbf{r}_L \mathbf{l}_0) n_L = \frac{S}{6} (n_L + n_0) + \frac{5S}{6} (n_L + n_0) (\mathbf{l}_L \mathbf{l}_0) + \bar{n} S [1 - (\mathbf{l}_L \mathbf{l}_0)], \quad (16)$$

$$\delta L = S \left\{ 1 - \frac{(n_0 + n_L) [1 + 5 (\mathbf{l}_0 \mathbf{l}_L)] + 6\bar{n} [1 - (\mathbf{l}_0 \mathbf{l}_L)]}{6 [n_0 \cos \alpha_L + n_L \cos \alpha_0]} \right\}, \quad (17)$$

где \bar{n} определяется формулой (5).

Отметим, что формула (17) является следствием соотношения (16), которое описывает изменение направления луча при его распространении между точками $\mathbf{r} = 0$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_L$ и имеет смысл закона преломления трехмерно-неоднородной среды.

Для определения поправки δL с помощью (17) не нужно знать профиль показателя преломления на трассе измерений и использовать какие-либо априорные атмосферные модели. Все величины, входящие в (17), могут быть определены путем измерений в конечных точках трассы.

4. Рассмотрим соотношение для усредненного вдоль траектории луча показателя преломления воздуха (5). Величина n учитывает отличие скорости распространения оптического сигнала в атмосфере от скорости света в вакууме и является основной поправкой, учитывающей влияние земной атмосферы на точность дальномерных измерений [3]. Обобщая формулу (5) на случай, в котором в разложении Эйлера–Маклорена используются значения показателя преломления не только конечных (n_0, n_L), но и ряда промежуточных точек трассы ($n_i, i = 1, 2, \dots$), получим [6, 8]:

$$\bar{n} = n_T - \frac{S}{12N^2} [(\mathbf{l}_L \nabla n_L) - (\mathbf{l}_0 \nabla n_0)], \quad (18)$$

где

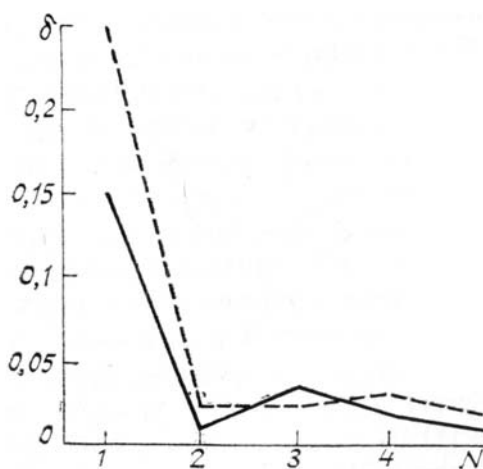
$$n_T = \frac{1}{N} \left[\frac{n_0 + n_L}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} n_i \right], \quad (19)$$

$$(\mathbf{l} \nabla n) = g_B \cos z_B + g_r \sin z_B, \quad (20)$$

где n_t — результат точечной аппроксимации среднеинтегрального показателя преломления по методу трапеций; $N-1$ — число промежуточных точек трассы, в которых проводятся измерения n , g_v , g_r — вертикальная и горизонтальная составляющие ∇n ; z_v — видимый зенитный угол.

При $N = 1$ формула (18) сводится к случаю, когда все величины определяются лишь в конечных точках трассы. При этом полученные соотношения, справедливые для произвольной трехмерно-неоднородной атмосферы, обобщают результат работ [9, 10], основанных на использовании упрощенных атмосферных моделей.

Для исследования точностных возможностей рассматриваемого метода определения \bar{n} был проведен численный эксперимент, в процессе которого использовались реальные профили $n(\mathbf{r})$, полученные в натуральных условиях для трассы длиной 1 км [11]. При проведении численного эксперимента по имеющимся профилям $n(\mathbf{r})$ вычислялось на ЭВМ точное значение величины \bar{n} по формуле (2), для этих же профилей величина \bar{n} определялась и по формуле (18). Разница между этими двумя величинами характеризует ошибку определения показателя преломления $\Delta\bar{n}$ по формуле (18). На рисунке показана абсолютная величина этой разности (сплошная линия) в зависимости от числа точек трассы, в которых проводятся локальные измерения показателя преломления. Здесь же показана величина погрешности определения n традиционным методом трапеций (штриховая линия). Видно, что рассматриваемый метод позволяет уменьшить в данных условиях погрешность определения усредненного вдоль трассы показателя преломления воздуха до $1,5 \cdot 10^{-7}$ при $N = 1$ и сделать ее много меньше 10^{-7} при $N \geq 2$.



Погрешность определения показателя преломления воздуха по формулам (18) (сплошная линия) и (19) (штриховая) $|\Delta\bar{n}| = \delta \cdot 10^{-6}$ в зависимости от числа интервалов разбиения области интегрирования

Основные результаты работы докладывались на Всесоюзном симпозиуме по распространению лазерного излучения в атмосфере (Якутск, 1989).

1. Кравцов Ю. А., Фейзулин З. И., Виноградов А. Г. Прохождение радиоволн через атмосферу Земли. М.: Радио и связь, 1983. 224 с.
2. Алексеев А. В., Кабанов М. В., Куштин И. Ф., Нелюбин Н. Ф. Оптическая рефракция в земной атмосфере (наклонные трассы). Новосибирск: Наука, 1983. 230 с.
3. Андрусенко А. М., Данильченко В. П., Прокопов А. В. и др. Методы и средства лазерной прецизионной дальнометрии. М.: Изд-во стандартов, 1987. 224 с.
4. Прокопов А. В. // Письма в ЖТФ. 1985. Т. 11. Вып. 24. С. 1526.
5. Прокопов А. В. // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. Вып. 2. С. 107.
6. Березин И. С., Жидков М. П. Методы вычислений. Часть I. М.: Наука, 1966. 632 с.
7. Юношев Л. С. // Исследования в области измерений времени и частоты. М.: ВНИИФТРИ, 1986. С. 87.
8. Прокопов А. В., Ремаев Е. В. // Тезисы докл. III Всесоюз. научно-технической конф. «Метрология в дальнометрии». Харьков: НПО «Метрология», 1988. С. 188.
9. Островский А. Л. // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1970. Вып. 12. С. 63.
10. Злотин В. В. // Геодезия и картография. 1973. № 12. С. 7.
11. Андрусенко А. М., Мищенко И. А., Пушкарев Г. П. и др. // Материалы VIII Всесоюз. симпозиума по распространению лазерного излучения в атмосфере. Ч. 3. Томск: ИОА СО АН СССР, 1986. С. 237.

Научно-производственное объединение «Метрология»,
Харьков

Поступила в редакцию
12 июля 1989 г.

A. V. Prokopov, E. V. Remaev, A. V. Brazhnicenko. **The Optical Refraction Integral Theorems for Three-Dimensional Inhomogeneous Atmosphere and its Geodetic Applications.**

The analytical relationships between the geometric-optical rays integral characteristics and the parameters of three-dimensional atmosphere are derived. The modified laws of the refraction and the new formulas for atmospheric range measurement corrections are obtained.