

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛН

УДК 551.5; 535.2

С.М. Пригарин¹, А.Г. Боровой², И.А. Гришин², У.Г. Оппель³

Статистическое моделирование переноса излучения в оптически анизотропных кристаллических облаках

¹ИВМ и МГ СО РАН, г. Новосибирск, Россия

²Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск, Россия

³Институт математики Мюнхенского университета, Германия

Поступила в редакцию 8.11.2006 г.

Представлена математическая модель переноса излучения в атмосферной облачности с оптической анизотропией относительно зенитного угла падающего излучения. Разработан алгоритм статистического моделирования переноса солнечной радиации в анизотропной рассеивающей среде с учетом многократного рассеяния. Приводятся результаты вычислительного эксперимента для сред, состоящих из ледяных кристаллов, представляющих собой гексагональные цилиндры с различной ориентацией в пространстве. Локальные оптические характеристики анизотропной среды (индикатрисы и сечения рассеяния) вычислялись на основе геометрического подхода. Проведено сравнение радиационных свойств облачности для кристаллов с изотропной ориентацией в горизонтальной плоскости и в пространстве. Продемонстрировано возможное влияние ориентации кристаллов на альbedo облачного слоя и на форму гало.

Введение

Известно, что оптические свойства кристаллических облаков в атмосфере зависят от направления распространения излучения, т.е. кристаллические облака представляют собой оптически анизотропную рассеивающую среду [1, 2]. Оптическая анизотропия объясняется сложной формой ледяных кристаллов и особенностями их ориентации в пространстве. Ряд оптических явлений, связанных с кристаллическими облаками, например, разнообразные гало и ложные солнца, объясняются с учетом оптической анизотропии (см., в частности, работу [3], где исследуется перенос излучения в оптически анизотропных средах для ИК-диапазона).

К настоящему времени физические и оптические свойства кристаллических облаков и их влияние на радиационный баланс в атмосфере изучены недостаточно полно (о современном состоянии исследований в этой области можно судить, например, по публикациям [2, 4]).

В данной статье описываются математическая модель и алгоритм статистического моделирования переноса излучения в оптически анизотропной облачности с учетом многократного рассеяния, а также приводятся результаты вычислительного эксперимента, который демонстрирует, насколько существенно ориентация частиц в кристаллических облаках может влиять на свойства радиационных полей.

1. Математическое описание переноса излучения в оптически анизотропной среде

Процесс переноса оптического излучения (без учета поляризации) можно описать следующим интегральным уравнением с обобщенным ядром [5–11]:

$$I(r, \omega, t) = \int_{-\infty}^t \int_{\Omega} \int_{R^3} q(r', \omega') \sigma(r', \omega') g(\omega', \omega, r') \frac{e^{-\tau(r', r)}}{|r - r'|^2} \times \\ \times \delta\left(\omega - \frac{r - r'}{|r - r'|}\right) I(r', \omega', t') \delta(S(t - t', r)) dr' d\omega' dt' + I_0(r, \omega, t); \\ \tau(r', r) = \int_{r'}^r \sigma(\rho, \omega) d\rho; r', r \in R^3; \omega', \omega \in \Omega = \{\omega \in R^3 : |\omega| = 1\}.$$

Здесь $I(r, \omega, t)$ – интенсивность излучения в направлении ω в точке r в момент времени t ; $q(r', \omega')$ – вероятность выживания фотона при столкновении (альbedo однократного рассеяния) в точке r' для направления ω' движения фотона до столкновения; $\sigma(r', \omega')$ – коэффициент ослабления в точке r' в направлении ω' ; $g(\omega', \omega, r')$ – индикатриса рассеяния в точке r' (ω' – направление до рассеяния, а ω – после рассеяния); $\int_{\Omega} g(\omega', \omega, r') d\omega = 1$; $\tau(r', r)$ – оптическая длина интервала $[r', r]$; δ – дельта-функция Дирака; $S(t, r)$ – множество точек в трехмерном пространстве, из которых фотон может попасть в точку r по прямой за время t ; $I_0(r, \omega, t)$ – интенсивность излучения источника из точки r в момент времени t .

Далее будем рассматривать стационарное уравнение переноса излучения с постоянным во времени источником

$$I(r, \omega) = \int_{\Omega} \int_{R^3} q(r', \omega') \sigma(r', \omega') g(\omega', \omega, r') \frac{e^{-\tau(r', r)}}{|r - r'|^2} \times \\ \times \delta\left(\omega - \frac{r - r'}{|r - r'|}\right) I(r', \omega') dr' d\omega' + I_0(r, \omega). \quad (1)$$

Перейдем к модели кристаллических облаков и предположим, что рассеивающая среда оптически анизотропна и *оптические свойства среды в облаке зависят только от зенитного (но не от азимутального) угла распространяющегося излучения*. Уравнение (1) при этом можно записать в виде

$$I(r, \omega) = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_{R^3} q_c(r', c') \sigma_c(r', c') g_{c\psi}(c', \psi', c, \psi, r') \frac{e^{-\tau(r', r)}}{|r - r'|^2} \times \\ \times \delta\left(\omega - \frac{r - r'}{|r - r'|}\right) I(r', \omega') dr' dc' d\psi' + I_0(r, \omega). \quad (2)$$

В уравнении (2) использованы обозначения: $\omega' = (a', b', c')$, c' – косинус зенитного угла для направления ω' ; ψ' и ψ – азимутальные углы (например, относительно горизонтальной оси OX) для направлений ω' и ω соответственно. Косинус зенитного угла $c' = \langle \omega', e_z \rangle$ – это скалярное произведение ω' на единичную вертикальную нормаль e_z . Далее, для того чтобы упростить обозначения, будем «игнорировать» зависимость функций σ_c , q_c , $g_{c\psi}$ в (2) от r' .

Коэффициент ослабления в среде (функция σ_c) и вероятность выживания фотона при столкновении (функция q_c) зависят только от косинуса зенитного угла распространяющегося излучения. Индикатриса рассеяния $g_{c\psi}(c', \psi', c, \psi)$ имеет смысл плотности вероятности для рассеяния в направлении c с косинусом зенитного угла c и азимутальным углом ψ при направлении движения фотона до столкновения с косинусом зенитного угла c' и азимутальным углом ψ' . Условие нормировки индикатрисы рассеяния имеет вид

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 g(c', \psi', c, \psi) dc d\psi = 1$$

для всех c' , ψ' .

Так как мы декларируем независимость оптических свойств среды от азимутального угла распространяющегося излучения, то индикатриса рассеяния $g_{c\psi}(c', \psi', c, \psi)$ зависит фактически не от пары азимутальных углов ψ' и ψ , а от их разности $\psi - \psi'$. Более того, естественным является предположение о симметричности индикатрисы относительно изменения азимутального угла:

$$g_{c\psi}(c', \psi', c, \psi) = g_{c\psi}(c', \psi', c, -\psi),$$

которое означает, что индикатриса рассеяния $g_{c\psi}(c', \psi', c, \psi)$ зависит фактически лишь от модуля разности азимутальных углов $\Delta\psi = |\psi - \psi'|$.

Замечание. В случае оптически изотропных сред, когда оптические свойства среды не зависят от направления распространения фотонов, уравнение переноса излучения (1) можно записать в виде

$$I(r, \omega) = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_{R^3} q(r') \sigma(r') g_\mu(\mu, r') \frac{e^{-\tau(r', r)}}{|r - r'|^2} \times \\ \times \delta\left(\omega - \frac{r - r'}{|r - r'|}\right) I(r', \omega') dr' d\mu d\varphi / (2\pi) + I_0(r, \omega).$$

Коэффициент ослабления и альbedo однократного рассеяния в этом случае не зависят от направления излучения, а индикатриса рассеяния g_μ зависит от косинуса угла $\mu = \langle \omega', \omega \rangle$ между направлениями до

и после рассеяния, $\int_{-1}^1 g_\mu(\mu) d\mu = 1$. Приведем соотношения между индикатрисами $g_\mu(\mu)$ и $g_{c\psi}(c', \psi', c, \psi)$:

$$g_\mu(\mu) d\mu d\varphi / (2\pi) = g_{c\psi}(c', \psi', c, \psi) dc d\psi, \\ \mu = cc' + \sqrt{1 - c^2} \sqrt{1 - c'^2} \cos(\psi - \psi'), \quad (3)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{c - c'\mu}{\sqrt{1 - c'^2} \sqrt{1 - \mu^2}}.$$

Любопытно, что якобиан преобразования $(\mu, \varphi) \leftrightarrow (c, \psi)$ оказывается равным единице (мы убедились в этом, воспользовавшись программным пакетом для символьных вычислений Mathematica).

2. Алгоритм статистического моделирования переноса излучения в среде, оптически анизотропной относительно зенитного угла падающего излучения

Методы Монте-Карло широко используются при решении задач переноса излучения в оптически изотропных средах (см., например, [6–11]). Однако для оптически анизотропных сред вычислительные алгоритмы требуют существенных модификаций. Ниже описывается алгоритм статистического моделирования траекторий фотонов в рассеивающей среде, оптически анизотропной относительно зенитного угла распространяющегося излучения, т.е. в рамках математической модели, рассмотренной в предыдущем пункте.

Для простоты изложения предположим, что оптическая среда является однородной (альbedo однократного рассеяния, коэффициент ослабления и индикатриса рассеяния не зависят от пространственной переменной) и функции σ_c , q_c в уравнении (2) зависят только от косинуса зенитного угла направления движения фотона. Алгоритм статистического моделирования траектории фотона состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Моделируем начальные координаты $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и начальное направление $\omega_0 = (a_0, b_0, c_0)$, $|\omega_0| = 1$ фотона в соответствии с распределением источников; полагаем $n = 0$.

Шаг 2. Моделируем длину свободного пробега l по распределению с плотностью

$$p(l) = \sigma_c(c_n) \exp\{-l\sigma_c(c_n)\}, \quad l > 0,$$

где $\sigma_c(c)$ — коэффициент ослабления в среде в направлении с косинусом зенитного угла c .

Шаг 3. Полагаем $n' = n + 1$ и вычисляем координаты следующего столкновения фотона с частицами среды:

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + a_{n-1}l; & y_n &= y_{n-1} + b_{n-1}l; \\ z_n &= z_{n-1} + c_n l; & r_n &= (x_n, y_n, z_n). \end{aligned}$$

Шаг 4. Разыгрываем тип столкновения: рассеяние с вероятностью $q_c(c_n)$ и поглощение с вероятностью $1 - q_c(c_n)$, где $q_c(c)$ — альбеда однократного рассеяния для косинуса зенитного угла c направления движения фотона до столкновения. Если происходит поглощение, то траектория обрывается.

Шаг 5. Если на предыдущем шаге произошло рассеяние, то новое направление фотона ω_n моделируем по индикатрисе рассеяния $g(\omega_{n-1}, \omega_n)$ и далее переходим на шаг 2.

Особенностью алгоритма статистического моделирования для оптически анизотропных сред является то, что вероятность выживания фотона, коэффициент ослабления и индикатриса рассеяния зависят теперь от направления движения фотона. Центральным моментом — это моделирование нового направления на шаге 5. Опишем этот шаг более подробно. Направление движения фотона до рассеяния обозначим через $\omega' = (a', b', c') = \omega_{n-1}$, а направление движения после рассеяния — через $\omega = (a, b, c) = \omega_n$. Здесь (a', b', c') и (a, b, c) — разложения соответствующих векторов направлений на компоненты относительно осей OX , OY и OZ . Сначала моделируется косинус зенитного угла c . Для этого используется распределение $P(c', c)$ по $c \in [-1, 1]$ для фиксированного значения c' . Затем моделируется изменение азимутального угла $\Delta\psi$ (в горизонтальной плоскости OXY). Для этого необходимо знать распределение $Q(c', c, \Delta\psi)$ по $\Delta\psi \in [-\pi, \pi]$, когда значения c', c фиксированы. Компоненты a и b вектора нового направления ω вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} a &= [a' \cos(\Delta\psi) - b' \sin(\Delta\psi)](1 - c^2)^{1/2} [1 - (c')^2]^{-1/2}, \\ b &= [a' \sin(\Delta\psi) + b' \cos(\Delta\psi)](1 - c^2)^{1/2} [1 - (c')^2]^{-1/2}. \end{aligned}$$

Здесь мы предположили, что $|c'| \neq 1$ (если $|c'| = 1$, то (a, b) — изотропный случайный вектор). Таким образом, для моделирования рассеяния в рассматриваемой нами анизотропной среде необходимо знать семейства распределений $P(c', c)$, $Q(c', c, \Delta\psi)$ для параметров $c' \in [0, 1]$, $c \in [-1, 1]$. Это соответствует представлению индикатрисы в виде произведения маргинального распределения по c и условного распределения по $\Delta\psi = |\psi - \psi'|$:

$$g_c(c', \psi', c, \psi) dcd\psi = p_0(c', c) dc q_0(c', c, |\psi - \psi'|) d\psi,$$

где p_0, q_0 — плотности распределений P и Q соответственно.

Замечание. Для оптически изотропной среды вектор нового направления движения фотона после рассеяния можно вычислять по формулам (см., например, [6]):

$$a = a'\mu - [b' \sin(\varphi) + a'c' \cos(\varphi)] \left(\frac{1 - \mu^2}{1 - (c')^2} \right)^{1/2};$$

$$b = b'\mu - [a' \sin(\varphi) - b'c' \cos(\varphi)] \left(\frac{1 - \mu^2}{1 - (c')^2} \right)^{1/2};$$

$$c = c'\mu + \cos(\varphi) \left([1 - \mu^2][1 - (c')^2] \right)^{1/2}$$

(или по формулам Субботина—Ченцова, которые имеют некоторые вычислительные преимущества, см. [12]). Здесь $\mu = a'a + b'b + c'c$ — косинус угла между направлениями до и после рассеяния, а φ — угол между плоскостями (ω', OZ) и (ω', ω) . Значение μ моделируется по индикатрисе рассеяния g_μ для оптически изотропной среды. Как мы уже отмечали, якобиан перехода от переменных (μ, φ) к (c, ψ) [см. формулы (3)] равен единице. Этим фактом мы воспользовались для того, чтобы тестировать алгоритм статистического моделирования переноса излучения, разработанный для оптически анизотропной среды, применяя его для моделирования переноса излучения в оптически изотропной среде.

3. Результаты вычислительного эксперимента

Опишем вычислительный эксперимент, который был проведен для исследования влияния ориентации кристаллов льда на оптические характеристики облачного слоя. Вычисления проводились для плоскопараллельного источника и видимого диапазона длин волн (в районе 550 нм) с коэффициентом преломления льда 1,311. Поглощение излучения в облаке не учитывалось. Для кристаллического облака использовались следующие упрощенные модели.

Предполагалось, что рассеивающая среда состоит из ледяных кристаллов одинаковой формы, представляющих собой гексагональные цилиндры с отношением (высота цилиндра)/(сторона шестиугольника) = 5. Рассматривались три модели «облаков» в зависимости от характера ориентации кристаллов в облаке. Модель I: все кристаллы изотропно ориентированы в пространстве. Модель A1: все кристаллы изотропно ориентированы в горизонтальной плоскости (имеется в виду, что оси цилиндров расположены горизонтально) со случайным изотропным вращением кристалла вокруг оси цилиндра (рис. 1, а).

Модель A2: аналогично модели A1 все кристаллы изотропно ориентированы в горизонтальной плоскости, но при этом две из боковых граней

лежат строго в горизонтальной плоскости (рис. 1, б). Для модели I рассеивающая среда является оптически изотропной, в то время как для моделей A1 и A2 среда оптически анизотропна.

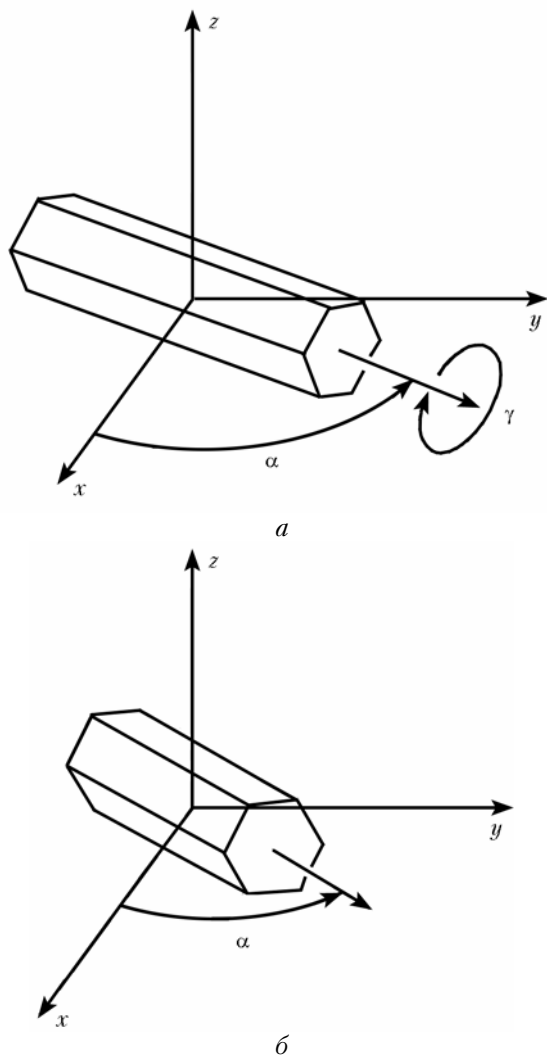


Рис. 1. Расположение кристаллов льда для модели A1 (а) и модели A2 (б). Случайные значения углов α и γ распределены равномерно

Локальные оптические характеристики для трех вышеперечисленных моделей рассеивающей среды были вычислены на основе метода геометрической оптики, см. [13, 14]. Для аппроксимации функции σ_c и распределений P , Q (см. шаг 2 и шаг 5 в описании алгоритма моделирования) использовались массивы размерностей 101, 101×201, 101×201×91 соответственно. Следует отметить, что вычисление распределений P и Q для реальных кристаллических облаков в атмосфере является сложной проблемой, методы решения которой в полной мере еще не разработаны.

В вычислительном эксперименте предполагалось, что кристаллическое облако представляет собой однородный плоский слой с расстоянием между верхней и нижней границами 150 м. Оптическая

толщина облака для изотропной модели I равнялась 3 ($\sigma = 0,02 \text{ м}^{-1}$). Для двух других моделей облака предполагалось, что концентрация частиц в облаке такая же, как и для модели I.

Коэффициент ослабления для оптически анизотропных моделей A1 и A2 зависит от направления распространяющегося излучения: в вертикальном направлении среда является оптически более плотной, чем в горизонтальном направлении. На рис. 2 представлено отношение коэффициента ослабления для оптически анизотропных моделей A1 и A2 к коэффициенту ослабления для оптически изотропной модели I с одинаковой концентрацией частиц в рассеивающей среде.

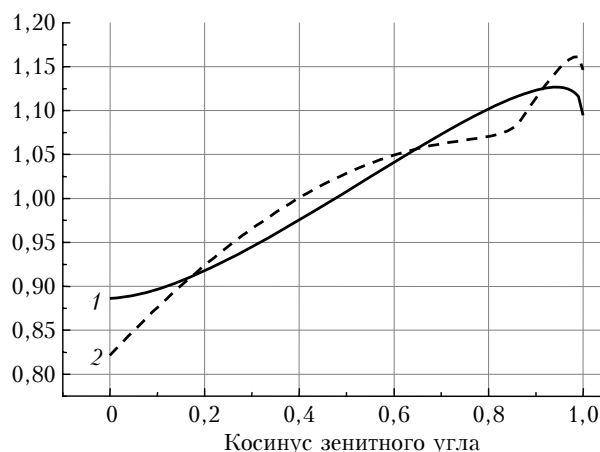


Рис. 2. Зависимость коэффициента ослабления от косинуса зенитного угла направления движения фотона для оптически анизотропных моделей A1 (кривая 1) и A2 (2)

На рис. 3 приведены результаты статистического моделирования гало (с учетом многократного рассеяния) для трех моделей кристаллического облака при различных зенитных углах источника. Круги являются проекциями полусферы небосвода на горизонтальную плоскость и отображают яркость соответствующих участков. Центр круга соответствует зениту, а точки периферии круга – горизонту. Как видим, форма гало существенно зависит от ориентации кристаллов льда в облаке.

На рис. 4 представлены значения альбедо облачного слоя для трех моделей облачной среды в зависимости от зенитного угла источника. Значения альбедо для моделей облачности с ориентацией кристаллов в горизонтальной плоскости (модели A1 и A2) практически совпадают, значительно превышая значения альбедо для оптически изотропной модели I (что обусловлено существенным различием между индикатрисами рассеяния).

Отметим, что зависимость коэффициента ослабления от зенитного угла для оптически анизотропных моделей здесь существенной роли не играет: результаты, представленные на рис. 4, были получены для случая, когда максимальные (!) значения коэффициента ослабления для оптически анизотропных моделей совпадали с коэффициентом ослабления для оптически изотропной модели I.

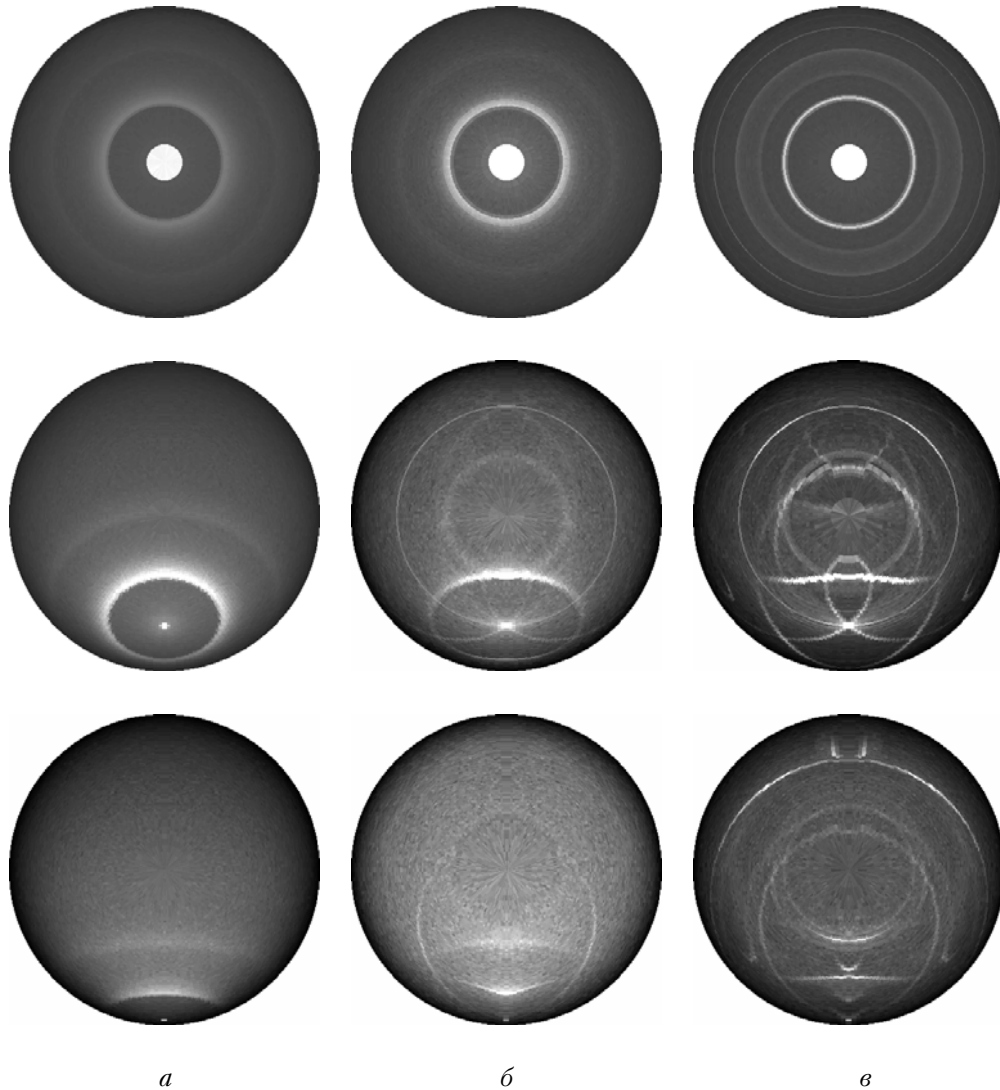


Рис. 3. Результаты моделирования гало для трех моделей кристаллических облаков с различной ориентацией частиц в пространстве (оптически изотропная модель I (а), модель A1 (б), модель A2 (в)) и разных значений зенитного угла источника (0° – верхний ряд, 45° – средний ряд и 75° – нижний ряд)

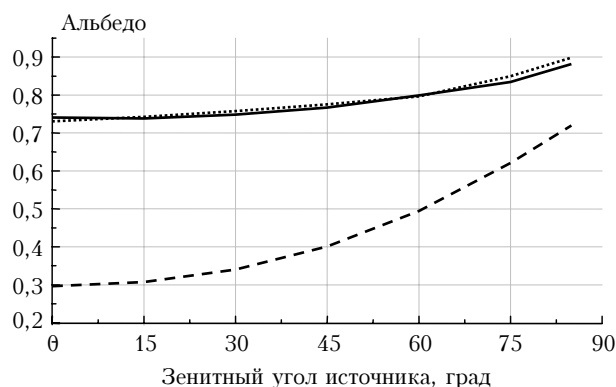


Рис. 4. Альbedo облачного слоя в зависимости от зенитного угла источника для трех моделей облачной среды: модель I – штриховая линия, модель A1 – сплошная, модель A2 – пунктирная

Таким образом, результаты вычислительного эксперимента подтверждают, что ориентация частиц в рассеивающей среде может кардинальным образом влиять на радиационные характеристики облачности.

Разработанное нами программное обеспечение для моделирования переноса излучения в оптически анизотропных средах и модельные расчеты частично представлены в сети Интернет по адресу <http://osmf.ssc.ru/~smp/intas.html> и <http://alpha.emitter.googlepages.com>.

В заключение выражаем признательность Т.Б. Журавлевой за полезные обсуждения и А.С. Пригарину за помощь при создании вспомогательного программного обеспечения, тестировании алгоритмов и проведении символьных вычислений средствами пакета Mathematica.

Работа выполнялась при финансовой поддержке INTAS (грант № 05-1000008-8024), РФФИ

(гранты № 06-05-64484а, 06-05-65141а) и президентской программы «Ведущие научные школы» (НШ-4774.2006.1).

1. Волковицкий О.А., Павлова Л.Н., Петрушин А.Г. Оптические свойства кристаллических облаков. Л.: Гидрометеонздат, 1984. 312 с.
2. *Light Scattering by Nonspherical Particles. Theory, Measurements, and Applications* / Ed. by M.I. Mishchenko, J.W. Hovenier, L.D. Travis. San Diego: Academic Press, 2000. 690 с.
3. Takano Y., Liou K.N. Transfer of Polarized Infrared Radiation in Optically Anisotropic Media: Application to Horizontally Oriented Ice Crystals // *J. Opt. Soc. Amer. A.* 1993. V. 10. N 6. P. 1243–1256.
4. Mishchenko M.I., Lacis A.A., Travis L.D. *Scattering, Absorption, and Emission of Light by Small Particles.* Cambridge University Press, 2002. 445 с.
5. Исмару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.: Мир, 1981. 280 с.
6. Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А., Дарбинян Р.А., Каргин Б.А., Еленов Б.С. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Новосибирск: Наука, 1976. 283 с.
7. Пригарин С.М. Основы статистического моделирования переноса оптического излучения. Новосибирск: Изд-во Новосиб. госун-та, 2001. 86 с. (<http://osmf.sccc.ru/~smp/Radi2ws.pdf>)
8. Каргин Б.А. Статистическое моделирование поля солнечной радиации в атмосфере. Новосибирск: Изд. ВЦ СО АН СССР, 1984. 206 с.
9. Назаралиев М.А. Статистическое моделирование радиационных процессов в атмосфере. Новосибирск: Наука, 1990. 227 с.
10. *3D Radiative Transfer in Cloudy Atmospheres* / Ed. A. Marshak and A. Davis. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 2005. 686 p.
11. Сушкевич Т.А. Математические модели переноса излучения. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. 661 с.
12. Субботин А.Н., Ченцов Н.Н. Моделирование процесса рассеяния частиц в методе Монте-Карло // Вопросы атомной науки и техники. Сер. методики и программы численного решения задач математической физики. Вып. 1 (9). М.: ЦНИИАтоминформ, 1982. С. 3–9.
13. Borovoi A.G., Grishin I.A., Oppel U.G. Mueller matrix for oriented hexagonal ice crystals of cirrus clouds // Eleventh International Workshop on Multiple Scattering LIDAR Experiments (MUSCLE 11). November 1–3, 2000, Williamsburg, Virginia, USA; organized by NASA Langley Research Center, Hampton, Va, USA. P. 81–89.
14. Borovoi A.G., Grishin I.A. Scattering matrices for large ice crystal particles // *J. Opt. Soc. Amer. A.* 2003. V. 20. Is. 11. P. 2071–2080.

S.M. Prigarin, A.G. Borovoi, I.A. Grishin, U.G. Oppel. Statistic simulation of radiation transfer in optically anisotropic crystal clouds.

A mathematical model and a Monte Carlo algorithm were developed to simulate radiation transfer in dispersive media optically anisotropic with respect to zenith angle of the light beam. The algorithm was created with the purpose to study radiation transfer processes in the atmosphere with optically anisotropic clouds (for instance, cirrus clouds) taking into account multiple scattering of light. A numerical experiment was performed for clouds with ice crystals of hexagonal cylinder shape. The local optical characteristics of the clouds (phase functions and extinction coefficients) were computed on the basis of a pure geometric optics approach. We compared results for scattering media with particles stochastically oriented in a horizontal plane and in space. It was shown that orientation of particles could strongly affect the albedo of clouds and the shape of halos.