

И.В. Измайлов, Б.Н. Пойзнер, И.В. Романов

## Хаос и порядок в модели нелинейного оптоволоконного интерферометра: вейвлет-анализ и другие методы изучения

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 14.10.2005 г.

Предложена математическая модель процессов в нелинейном оптико-волоконном интерферометре. Построены фазовые портреты, рассчитаны спектры Фурье и вейвлет-спектры. Обнаружен режим перемежаемости. Осуществлена попытка автоматической идентификации его фаз.

Поведение световых волн в нелинейных кольцевых системах характеризуется многократной интерференцией их с некоторым переменным, зависящим от интенсивности света, сдвигом по фазе. Результат такой интерференции в общем случае не удовлетворяет принципу суперпозиции и не поддается аналитическому решению. Отчасти с этим связано недостаточное теоретическое исследование нелинейных явлений в оптических кольцевых системах (хотя еще в 1979 г. К. Икеда обнаружил неустойчивость в кольцевом интерферометре с нелинейным оптическим элементом). С 1990-х гг. наметился рост научных исследований по данной тематике. В экспериментах с нелинейным кольцевым интерферометром С.А. Ахмапов, М.А. Воронцов с коллегами продемонстрировали, что в этом устройстве возможна генерация как оптических структур, так и хаоса (так называемая «сухая турбулентность»). Новой разновидностью подобного устройства является нелинейный оптико-волоконный интерферометр (НОВИ), схема которого изображена на рис. 1.

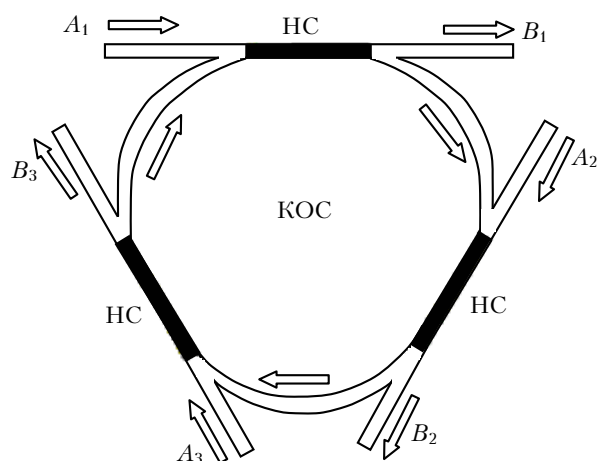


Рис. 1. Схема НОВИ

Моделирование процессов в НОВИ показало возможность сложного поведения, известного как перемежаемость.

### Перемежаемость — пример сложного процесса

В контексте теории динамических систем это явление впервые открыто в 1955 г. А.С. Алексеевым [1, с. 25], а с 1980 г., после публикации работы П. Манвила и И. Помо, оно получило название «перемежаемость», или «интермиттанс» (от англ. *intermittency*). Перемежаемость есть режим чередования во времени почти регулярных колебаний (так называемая ламинарная фаза длительностью  $t_L$ ) и хаотических колебаний (так называемая турбулентная фаза длительностью  $t_T$ ), наблюдающийся сразу за порогом возникновения детерминированного хаоса [2, с. 149]. Явление перемежаемости объясняет, например, непредсказуемость относительно редких, но весьма сильных по своей разрушительности землетрясений.

### Схема НОВИ и модель динамики световых полей в нем

Оптическая схема НОВИ изображена на рис. 1, где  $A_i$  — световое поле на входе в интерферометр;  $B_i$  — поле на выходе из него; НС — нелинейная среда (оптическое одномодовое волокно, легированное полупроводником, благодаря чему имеет место эффект Керра). Одномодовое волокно, не обладающее нелинейными свойствами (кварцевое стекло), образует контур обратной связи (КОС).

Модель динамики световых полей в НОВИ построена в ряде приближений:

- волокно является одномодовым, слабо направляющим, т.е. разница между показателями преломления сердцевинки и оболочки мала;
- поперечный профиль показателя преломления является ступенчатым;
- сердцевина и оболочка волокна, образующего контур обратной связи, изготовлены из материалов с одинаковой дисперсией, которая не зависит от интенсивности проходящего сигнала;
- нелинейная среда представляет собой оптическое волокно, у которого показатель преломления

сердцевины и оболочки зависит (линейно) от интенсивности проходящего излучения;

– спектр хаотического сигнала (в режиме детерминированного хаоса) попадает в «окно прозрачности» волокна;

– потери на стыках не зависят ни от частоты, ни от амплитуды света в волокне, а отражением света на стыках пренебрегаем;

– поляризационная дисперсия в волокне пренебрежимо мала;

– рассеянием света в волокне, его собственными шумами, диффузией поляризованных молекул в оптическом стекле пренебрегается.

Модель описывает взаимосвязанное изменение амплитуд и фаз волн в сердцевине и оболочке волокна в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial u_{1,nel}(t,i)}{\partial t} + u_{1,nel}(t,i) &= u_{10,nel}(i) + \rho_1(t,i-1)K_{0,core}(t,i) + \\ &+ \rho_1(t,i-1)\gamma K_{0,core}(t-t_k,i-1) + \\ &+ 2\rho_1(t,i-1)[\gamma K_{0,core}(t,i)K_{core}(t-t_k,i-1)] \times \\ &\times 0,5 \cos[\varphi_{nel}(t-t_k,i-1) + \varphi_{lin}(i-1) + \\ &+ \varphi(t-t_k,i-1) + \varphi_0(t,i)], \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial u_{2,nel}(t,i)}{\partial t} + u_{2,nel}(t,i) &= u_{20,nel}(i) + \\ &+ [1 - \rho_1(t,i-1)]K_{0,fac}(t,i) + \\ &+ [1 - \rho_1(t,i-1)]\gamma K_{0,fac}(t-t_k,i-1) + \\ &+ 2[1 - \rho_1(t,i-1)][\gamma K_{0,fac}(t,i)K_{fac}(t-t_k,i-1)] \times \\ &\times 0,5 \cos[\varphi_{nel}(t-t_k,i-1) + \varphi_{lin}(i-1) + \\ &+ \varphi(t-t_k,i-1) + \varphi_0(t,i)]; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\varphi_{nel}(t) = u_{2,nel}(t) + [u_{1,nel}(t) - u_{2,nel}(t)] \frac{\partial(V_{nel}B_{nel})}{\partial V_{nel}}, \quad (3)$$

$$\varphi_{lin}(t) = u_{2,lin}(t) + [u_{1,lin}(t) - u_{2,lin}(t)] \frac{\partial(V_{lin}B_{lin})}{\partial V_{lin}}, \quad (4)$$

$$\varphi(t,i) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{A_{Re}}{A_{Im}}\right), & A_{Im} < 0 \\ \frac{3\pi}{2} - \arctg\left(\frac{A_{Re}}{A_{Im}}\right), & A_{Im} > 0 \\ 0, & A_{Im} = 0, A_{Re} \geq 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & A_{Im} = 0, A_{Re} < 0 \end{cases}; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} A_{Re} &= A_0(t,i) \cos[\varphi_0(t,i)] + \gamma A(t-t_k,i-1) \times \\ &\times \cos[\varphi_{nel}(t-t_k,i-1) + \varphi_{lin}(i-1) + \varphi(t-t_k,i-1)], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} A_{Im} &= A_0(t,i) \sin[\varphi_0(t,i)] + \gamma A(t-t_k,i-1) \times \\ &\times \sin[\varphi_{nel}(t-t_k,i-1) + \varphi_{lin}(i-1) + \varphi(t-t_k,i-1)], \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$i = 1, 2, 3; K_{0,core}(t) = kl_{nel}n_{12,nel}I_0(t),$$

$$K_{0,fac}(t) = kl_{nel}n_{22,nel}I_0(t),$$

$$K_{core}(t-t_k) = kl_{nel}n_{12,nel}I(t-t_k),$$

$$K_{fac}(t-t_k) = kl_{nel}n_{22,nel}I(t-t_k);$$

$$I_0(t) = |A_0(t)|^2, I(t-t_k) = |A_0(t-t_k)|^2;$$

$\tau$  – время релаксации нелинейной среды;  $t_k$  – время прохождения полем контура обратной связи;  $\gamma$  – общий коэффициент потерь;  $k$  – волновое число;  $l_{nel}$ ,  $l_{lin}$  – длина (не)линейного волокна;  $I_0(t)$  и  $I(t-t_k)$  – входная и прошедшая КОС интенсивность света;  $\varphi_0$  – фаза поля на входе в интерферометр;  $\varphi(t-t_k)$  – фаза поля, возникшего в результате сложения полей перед нелинейной средой;  $\varphi_{nel}$  и  $\varphi_{lin}$  – изменение фазы за счет прохода (не)линейной среды;  $u_{1,nel}(t)$ ,  $u_{2,nel}(t)$  и  $u_{1,lin}(t)$ ,  $u_{2,lin}(t)$  – фазовый набег в сердцевине и оболочке (не)линейного волокна;  $n_{1,nel}$  и  $n_{1,lin}$  – показатель преломления сердцевины и оболочки нелинейного волокна;  $V$ ,  $B$  – частотный и фазовый параметры оптического волокна;  $K_{core}(t)$ ,  $K_{fac}(t)$  – коэффициент нелинейности в сердцевине и оболочке волокна.

## Изучение сложного поведения в модели НОВИ

Результаты численного моделирования процессов в нелинейном оптоволоконном интерферометре показали возможность многообразных типов динамики, включая хаотическую. Для их идентификации и анализа строились временные реализации, спектры Фурье и фазовые портреты амплитуды поля.

При некоторых параметрах модели (1)–(7) реализуется режим перемежаемости («ползучего» хаоса). Перемежаемость в модели НОВИ проявляется в многократном переходе от квазипериодического режима (ламинарная фаза) к хаотическому (турбулентная фаза) и обратно. Такой процесс наблюдается в модели на протяжении времени, соответствующего сотням тысяч обходов светового поля через контур обратной связи. На рис. 2, *а* показан портрет набег фаз  $U$  в НОВИ, функционирующем в режиме перемежаемости. На портрете можно различить приметы квазипериодического и хаотического режимов. Рис. 2, *б* изображает Фурье-спектр амплитуды поля, соответствующий портрету набег фаз на рис. 2, *а*.

Как известно, классическое преобразование Фурье эффективно при анализе стационарных временных реализаций. Но оно значительно менее эффективно, когда необходимо исследовать переходные процессы и выяснить, каковы характерные частоты на разных его этапах. В отличие от указанного метода вейвлет-анализа обеспечивает приемлемую локализацию спектра процесса во времени и его разрешение. Это позволяет идентифицировать смену динамического режима и выявить характерные особенности спектральных характеристик процесса.

На рис. 2, *в* построена зависимость амплитуд вейвлет-спектра (для режима перемежаемости) от времени и частоты (ей отвечает значение ординаты, приведенной к обратному масштабу базисной функции: морлет-вейвлет с  $\omega_0 = 6$  [3, с. 40]). Максимальной величине амплитуды спектра соответствует черный цвет, минимальной – белый.

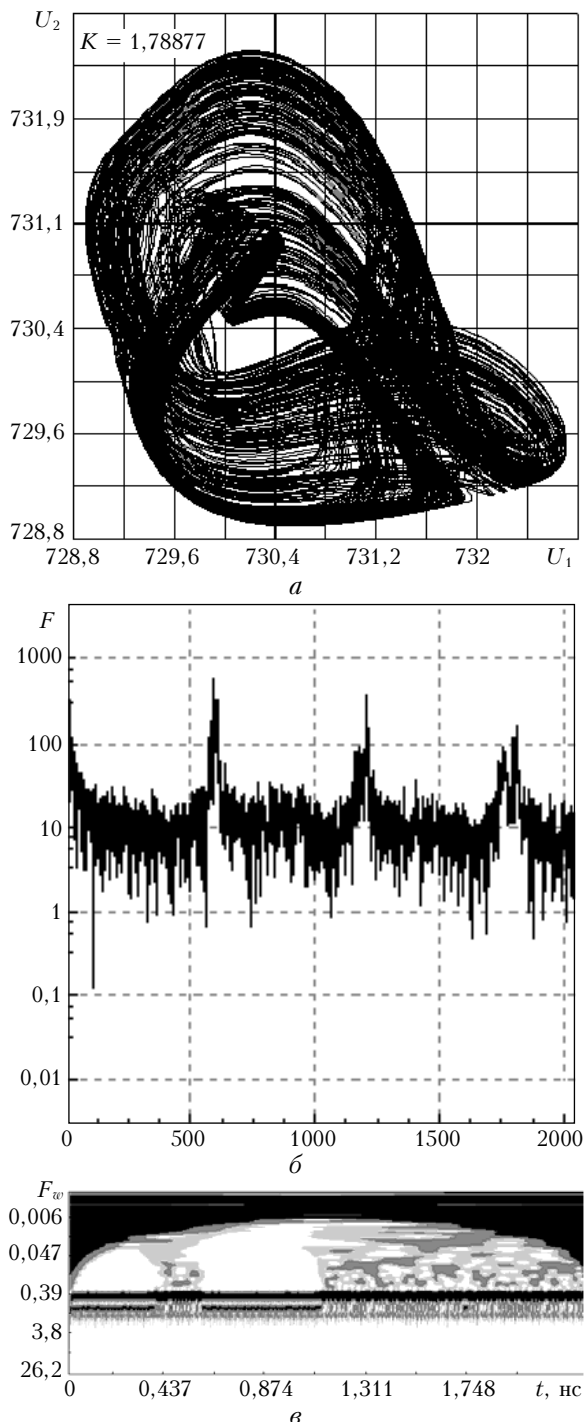


Рис. 2. Фазовый портрет (*а*), Фурье-спектр  $F$  (*б*) и вейвлет-спектр  $F_w$  (*в*) амплитуды поля в НОВИ

Можно предположить, что при стремлении к бесконечности времени выборки отношение времен  $t_L/t_T$

нахождения динамической системы в каждой из фаз перемежаемости стремится к константе. Поэтому возникает задача определить соотношение длительностей ламинарной и хаотической фазы режима на большом промежутке времени наблюдения. Для ее решения предпринята попытка автоматизировать процедуру идентификации смены фаз процесса перемежаемости (рис. 3).

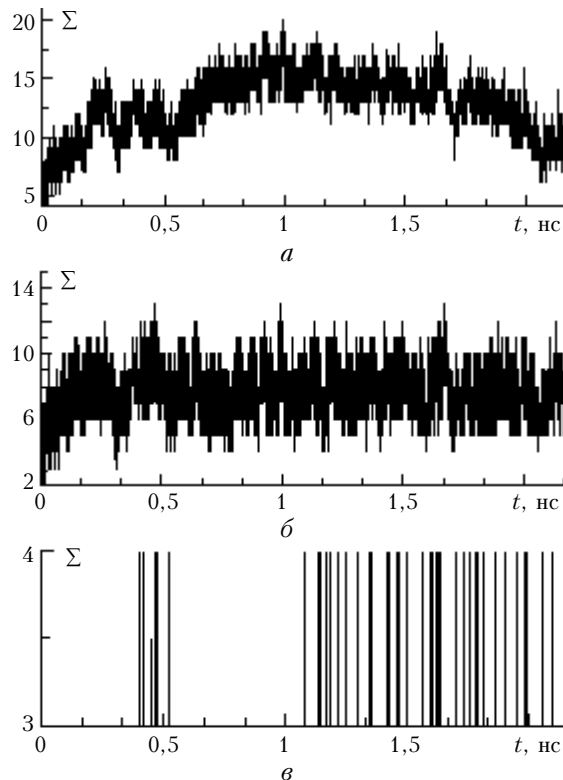


Рис. 3. Изменение со временем числа максимумов  $\Sigma A$  в вейвлет-спектре: с учетом всех частот спектра (*а*), средней и высокой части спектра (*б*) и лишь средних частот (*в*)

Авторы исходили из того, что с увеличением сложности и нестационарности процесса, т.е. с наступлением турбулентной фазы перемежаемости, в спектре сигнала увеличивается число спектральных компонентов. Поэтому следует ожидать, что учет и суммирование числа максимумов в спектре позволят отличить между собой фазы процесса.

Однако оказалось, что такой критерий малоэффективен (рис. 3, *а*). Дело в том, что смена фазы сказывается не столько на числе максимумов в вейвлет-спектре, сколько на их абсолютной величине и положении (вдоль ординаты на рис. 3, *в*).

Поэтому средством оптимизации распознавания смены фаз перемежаемости предложена фильтрация вейвлет-спектра (рис. 3, *б, в*). Фильтрация состояла в исключении из рассмотрения той или иной области вейвлет-спектра. Результат, представленный на рис. 3, *в*, согласуется со структурой вейвлет-спектра на рис. 2, *в* и свидетельствует о пользе этого приема для изучения закономерностей смены фаз перемежаемости. Приблизительный подсчет времени нахождения интерферометра показывает, что с течением

времени отношение  $t_L/t_T$  длительности ламинарной фазы к турбулентной, действительно, в каждой из фаз приближается к некоторой постоянной.

### Заклучение

Итак, в предложенной модели НОВИ авторы обнаружили режим, напоминающий перемежаемость. Согласно существующим представлениям перемежаемость есть универсальный феномен.

Построены фазовые портреты, рассчитаны спектры Фурье и вейвлет-спектры. Они показывают, что в модели НОВИ (в зависимости от набора физических параметров) возможны и периодические, и хаотические режимы. При этом вейвлет-спектры имеют структуру, которая характерна для перемежаемости: области хаотических колебаний чередуются с обла-

стями квазипериодических колебаний. Осуществлена попытка автоматической идентификации фаз процесса перемежаемости.

Работа поддержана грантом ФАО Минобрнауки (Программа «Развитие научного потенциала высшей школы». Раздел 3.3), регистрационный № 60321, и грантом Президента РФ МК-4701.2006.9.

1. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
2. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003. 544 с.
3. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Непрерывный вейвлетный анализ. Саратов: ГосУНЦ «Колледж», 2002. 216 с.

*I.V. Izmailov, B.N. Poizner, I.V. Romanov.* **Chaos and order in the model of nonlinear fiber interferometer: wavelet analysis and other investigation methods.**

A mathematical model of processes in nonlinear optical fiber interferometer (NOFI) is suggested. Phase portraits are constructed, Fourier spectra and wavelet-spectra are calculated. The regime of intermittency is found out. The attempt of automatic identification of intermittency phases is carried out.