

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В АТМОСФЕРЕ И ОКЕАНЕ

УДК 523.54

М.Н. Штоколова, В.А. Якутенок

Численное моделирование колебаний невязкой капли под действием поверхностного натяжения

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 18.12.2006 г.

Рассматривается процесс колебаний капли идеальной жидкости под действием поверхностного натяжения в плоской математической постановке. Численно исследуются колебания капли в широком диапазоне изменения начальной деформации. Достоверность результатов подтверждается сравнением с решением Рэлея, а также выполнением закона сохранения массы. Приведено сравнение результатов расчетов, полученных гранично-элементным методом с конечно-разностной реализацией.

Введение

В настоящее время известно множество работ, посвященных анализу поведения жидкостей в капельном состоянии. Однако до сих пор исследователям не удалось смоделировать распад капли под действием поверхностного натяжения (т.е. собственной деформации), ни даже определить, какие значения деформаций являются критическими для капель и приводят к их распаду. В большинстве работ (например, [1–3]) авторы ограничиваются рассмотрением малых колебаний капель в плоском [2], осесимметричном [1, 3] и трехмерном случаях [3]. Это связано с явлением численной неустойчивости применяемых схем.

Как отмечается практически всеми исследователями в данной области, получение точных результатов возможно лишь при малой деформации поверхности. Поэтому в каждой из указанных работ авторам приходится прибегать к различного рода ухищрениям с целью улучшения стабильности алгоритма, таким как перераспределение узлов вдоль свободной поверхности на каждом шаге по времени [2, 3], «сглаживание» функции потенциала вдоль свободной поверхности через определенное число шагов по времени с помощью сплайн-интерполяции [2] или с использованием полиномов Лежандра [3], наложение дополнительных условий на значения потенциала в точках свободной поверхности [2] и др.

Естественно, возникает вопрос, каким образом подобные вмешательства в численную схему искажают физическую сущность процесса? Наиболее распространенной «корректировкой» алгоритма является внесение поправки в значение потенциала на свободной границе [1] или в динамическое граничное условие (интеграл Бернулли). Это эквивалентно добавлению некоторого коэффициента вязкости в последнее уравнение, что, несомненно, стабилизирует схему, приводя, однако, к некоторому затуханию колебаний. В [2] было показано, что

внесение поправки в динамическое граничное условие может рассматриваться как учет вязкости исследуемой жидкости, тем самым снимается вопрос о физическом соответствии и правомерности указанных действий. Кроме того, значительное влияние как на устойчивость расчетов, так и на их результаты оказывает и выбранный исследователем алгоритм эволюции поверхности во времени. Этот вопрос впервые был детально рассмотрен в [4], где было показано, в частности, что использование метода Рунге–Кутты третьего и четвертого порядков, являющегося условно устойчивым по своим свойствам, приводит к слабой диссипации схемы, вследствие чего колебания идеальной капли, смоделированные с их использованием, окажутся слабо затухающими.

В данной статье численно исследуются колебания капли идеальной жидкости в широком диапазоне изменения начальной деформации. Проводится сравнение с известной аналитической работой Рэлея [5]. Полученные значения периодов колебаний при различных значениях начальной деформации капель подтверждают вывод работы [6] о росте периода колебаний с увеличением начальной деформации.

Постановка задачи

Рассматривается процесс нелинейных колебаний капли идеальной несжимаемой жидкости под действием сил поверхностного натяжения в отсутствие силы тяжести. В плоском приближении моделируется процесс колебаний бесконечного цилиндра идеальной жидкости, который в начальный момент времени покоится и имеет в поперечном сечении форму эллипса с полуосями a , b (рис. 1).

Движение капли невязкой несжимаемой жидкости в вакууме или газе незначительной плотности можно описать математически с помощью уравнения Лапласа для потенциала ϕ скорости \mathbf{v} :

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad \mathbf{v} = \nabla \varphi. \quad (1)$$

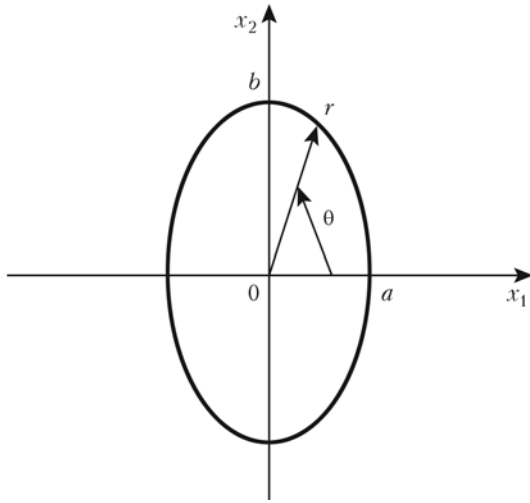


Рис. 1. Колебания бесконечного объема идеальной жидкости в вакууме. Область решения

Граничное условие на свободной поверхности

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{\alpha \kappa}{\rho}, \quad (2)$$

где κ — кривизна свободной поверхности; ρ — плотность; α — коэффициент поверхностного натяжения жидкости. Свободная граница изменяется в соответствии с кинематическим условием, которое записывается в эйлеровой форме:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \text{grad} f = 0, \quad (3)$$

где $f(t, \theta)$ — функция, описывающая границу капли. В начальный момент времени капля покоится и имеет форму вытянутого эллипса с полуосями a , b . В качестве характеристики начальной деформации капли далее используется соотношение большей и меньшей полуосей — $k = b/a$, $k > 1$. Начальное значение потенциала

$$\varphi = 0. \quad (4)$$

В качестве характерных масштабов взяты величины

$$R; v^* = \left(\frac{\alpha}{\rho R} \right)^{1/2}; \varphi^* = \left(\frac{\alpha R}{\rho} \right)^{1/2}; T^* = \left(\frac{\rho R^3}{\alpha} \right)^{1/2}, \quad (5)$$

где R — эффективный радиус круга площади, равной площади эллипса, представляющего собой начальное положение свободной границы. Таким образом, в данной задаче в качестве параметра, определяющего характер течения и характеристики колебательного движения свободной поверхности, выступает лишь ее начальное положение.

Уравнение (2) в безразмерном виде примет вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{u^2 + v^2}{2} + \kappa. \quad (6)$$

Метод решения

Для решения поставленной задачи методом граничных элементов (МГЭ) осуществляется переход от дифференциальной постановки, изложенной выше, к гранично-интегральной согласно подходу, приведенному в [7]. С целью непосредственного получения и дальнейшего решения сингулярного гранично-интегрального уравнения используется непрямой вариант метода граничных элементов.

В результате рассчитываются значения потенциала и компонент вектора скорости на свободной границе. Для нахождения ее нового положения используется конечно-разностная дискретизация кинематического условия (3), в которой применяется разностная схема с разностями против потока [8]:

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} = v_{r_i}^n - v_{\theta_i}^n \frac{\Delta f_i^n}{f_i^n \Delta \theta}, \quad (7)$$

$$\Delta f_i^n = \begin{cases} f_i^n - f_{i-1}^n, & v_{\theta_i}^n > 0, \\ f_{i+1}^n - f_i^n, & v_{\theta_i}^n < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Значение потенциала на новом положении свободной границы определялось путем дискретизации по времени и пространству интеграла Коши–Лагранжа (6):

$$\frac{\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n}{\Delta t} = \frac{(v_i^n)^2}{2} + \kappa^{n+1}. \quad (9)$$

Шаг по времени Δt ограничен сверху условием Куранта

$$\Delta t \leq \Delta S_{\min} / V_{\max}, \quad (10)$$

где ΔS_{\min} — длина наименьшего элемента; V_{\max} — наибольшая скорость, достигаемая на каком-либо элементе. Как показало исследование, при малых начальных деформациях, а также на первоначальном этапе расчета вполне приемлемым является выбор $\Delta t = 0,001$. При расчетах больших начальных деформаций, начиная с $k = 1,5$, выбор шага по времени осуществляется автоматически по (10).

Для решения поставленной задачи (1), (3), (4), (6) конечно-разностным методом (МКР) проводится преобразование координат, которое переводит границу области в круг единичного радиуса

$$\theta = \theta, \quad \xi = \frac{r}{f(\theta, t)}. \quad (11)$$

Уравнения (1), (6) используются в новых координатах. Для расчета потенциала из уравнения Лапласа применяется схема Гаусса–Зейделя, а для расчета скоростей на свободной поверхности — следующие выражения:

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{f} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \quad v_\theta = \frac{1}{f} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\xi}{f} f' \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right). \quad (12)$$

Для нахождения нового положения свободной поверхности используется конечно-разностная дис-

кретизация кинематического условия (3) в виде (7), в которой применяется разностная схема с разностями против потока (8). Значение потенциала на новом положении свободной границы определялось согласно (9).

Результаты расчетов

Расчеты конечно-разностным методом были проведены на сетках $N_r = 6, 12, 18, 24, 36, 48$ одинаковых разбиений вдоль r и $N_\theta = 12, 18, 24, 48$ одинаковых элементов в направлении θ . При расчете потенциала из уравнения Лапласа были апробированы две схемы:

- 1) схема Гаусса–Зейделя;
- 2) схема продольно-поперечной прогонки [9].

Обе схемы протестированы на задаче о распределении потенциала в бесконечно проводящем шаре единичного радиуса, имеющей аналитическое решение.

В табл. 1 приведены результаты тестовых расчетов, в ходе которых оценивалась скорость сходимости итерационного процесса (количество итераций N) на различных сетках при варьировании итерационного параметра τ для метода продольно-поперечной прогонки (ППП), а также скорость сходимости метода Гаусса–Зейделя на тех же сетках. Сходимость оценивалась с точностью до $\varepsilon = 10^{-6}$.

Таблица 1

Параметр τ	Продольно-поперечная прогонка, количество итераций N , сетка $N_r \times N_\theta$						
	6×6	12×6	6×12	12×12	12×24	24×24	24×36
0,0001	5450	5380	5450	5390	5390	10040	10040
0,0005	1260	1250	1260	1250	1250	2350	2350
0,0010	670	670	660	670	670	1250	1250
0,0050	160	160	160	160	160	300	300
0,0100	90	90	90	90	90	160	160
0,0500	50	150	50	150	150	50	50
0,1000	90	280	90	—	—	40	40
Схема Гаусса–Зейделя	120	270	260	440	1140	1680	2950

Из представленных результатов видно, что специальным подбором параметра τ можно добиться высокой скорости сходимости итерационного процесса в методе ППП, однако существуют сетки, на которых итерационный процесс не сходится в связи с отсутствием диагонального преобладания в матрице, например сетка $N_r = 6, N_\theta = 12$ при $\tau = 0,5$. Расчеты на более мелких сетках (до $N_r = 64, N_\theta = 64$) показали зависимость $N(\tau)$, практически аналогичную $N_r = 24, N_\theta = 36$.

Исходная задача решалась с использованием как схемы Гаусса–Зейделя, так и алгоритма продольно-поперечной прогонки. Величины периодов колебаний и последовательности форм свободной поверхности, полученные с применением различных схем, совпадают в диапазоне начальных деформаций $1,005 \leq k \leq 2,0$. Следует отметить, что время расчета одного периода колебаний с исполь-

зованием различных схем практически одинаковое, несмотря на результаты, представленные в табл. 1. Это объясняется тем, что при использовании метода Гаусса–Зейделя для расчета потенциала из уравнения Лапласа количество итераций на каждом последующем шаге по времени уменьшается гораздо быстрее, чем при использовании метода продольно-поперечной прогонки (рис. 2).

При реализации численного алгоритма немаловажным является вопрос о выборе оптимального шага по времени Δt . Критерием для выбора Δt служит условие Куранта (10). В основных расчетах принималось $\Delta t = 0,001$ для первого шага по времени, в дальнейшем значение Δt автоматически выбиралось согласно условию (10).

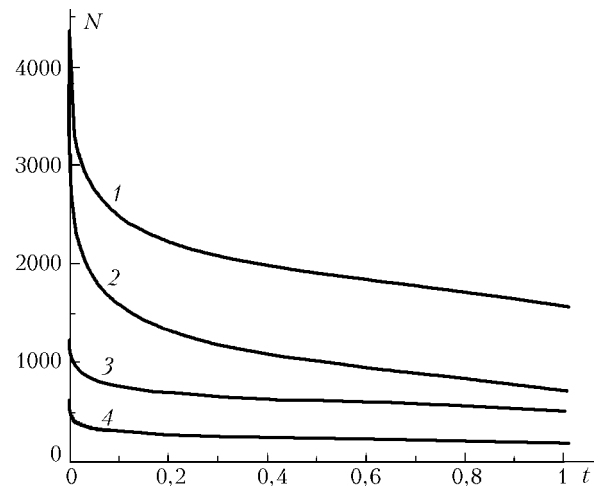


Рис. 2. Кривые зависимости числа итераций от времени расчета: кривые 1, 2 соответствуют схеме Гаусса–Зейделя, кривые 3, 4 — схеме ППП. В расчетах 1, 3 шаг по времени $\Delta t = 10^{-3}$, в расчетах 2, 4 — $\Delta t = 10^{-4}$; $\varepsilon = 10^{-6}$

Первоначально при расчете нового значения потенциала на свободной поверхности из формулы (9) кривизна κ^{n+1} рассчитывалась на новом положении свободной границы. При этом расчет колебаний с начальной деформацией $k > 1,5$ оказывался невозможным в связи с появлением зигзагообразной неустойчивости на свободной границе. Данного эффекта удастся избежать при использовании в (9) полусуммы кривизн: $(\kappa^n + \kappa^{n+1})/2$, где κ^{n+1} — кривизна, рассчитываемая на новом положении свободной границы, а κ^n — кривизна, взятая с предыдущего «слоя по времени». Следует отметить, что при указанной модификации схемы ни значения периодов колебаний, ни наблюдаемые формы свободной поверхности не изменяются.

С использованием метода граничных элементов, алгоритм которого описан в [7], был проведен цикл расчетов с различными значениями начального отношения осей k в диапазоне $1,002 \leq k \leq 2,0$. При этом граница разбивалась на $N = 96$ постоянных элементов. В расчетах, проведенных с $N > 96$, отличий ни в величине периода, ни в наблюдаемых формах свободной поверхности не отмечалось. Эволюция свободной поверхности в процессе колебаний иллюстрируется рис. 3.

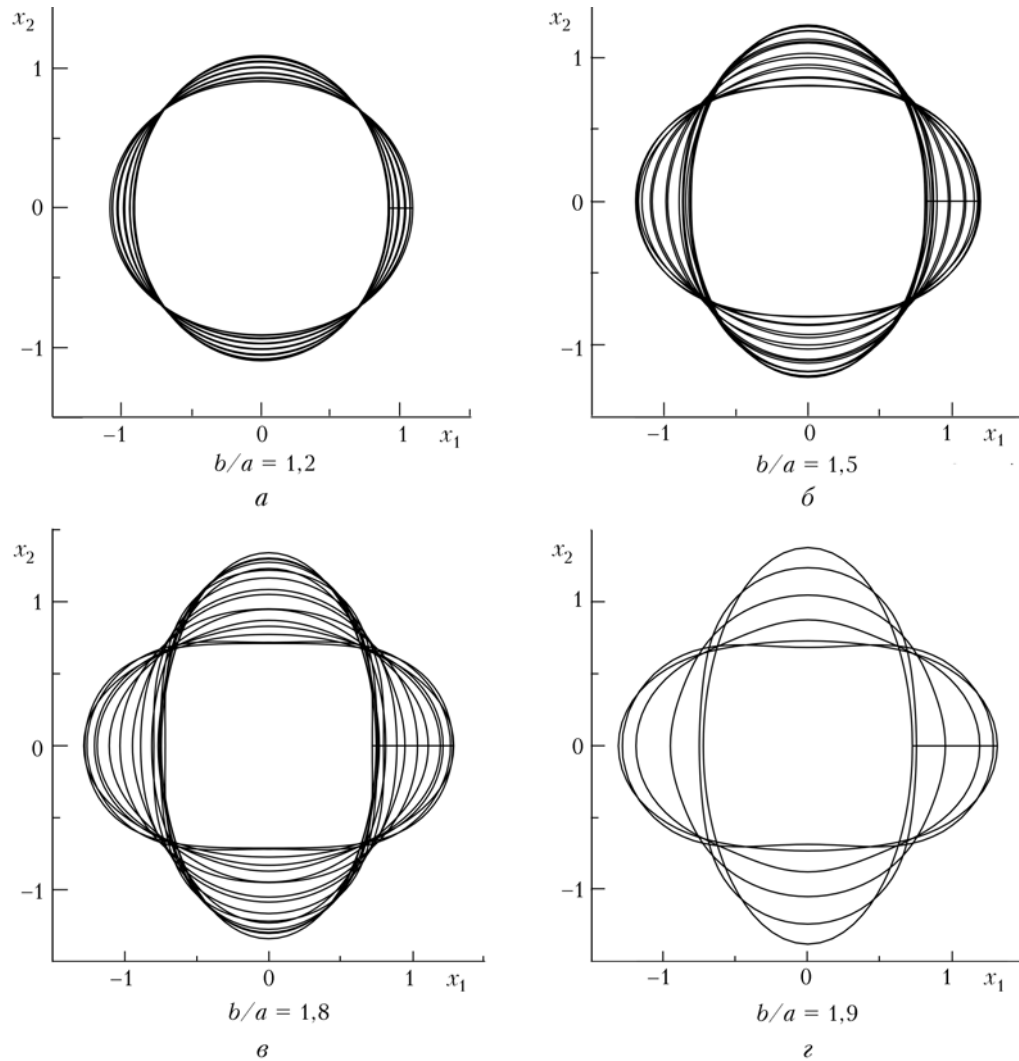


Рис. 3. Формы свободной поверхности, плоский случай. Величина начальной деформации $k = 1,2$ (а), $1,5$ (б), $1,8$ (в), $1,9$ (г)

В данной работе при моделировании колебаний капли как МКР, так и МГЭ не использовались дополнительные «сглаживающие» процедуры для функции потенциала на свободной границе и для функции, описывающей границу (как, например, в [1–3]), так как наложение подобных искусственных условий может исказить результаты моделирования. При этом процесс колебаний невязкой капли удалось смоделировать в достаточно широком диапазоне начальной деформации капле (до $k = 1,5$ МКР и до $k = 2,0$ МГЭ).

Согласно классическому результату Рэлея [5], для малых колебаний невязкой жидкости в осесимметричной постановке имеет место формула

$$T = 2\pi[n(n-1)(n+2)]^{-1/2}. \quad (13)$$

Так, для $n = 2$ период $T = 2,2214$. Из рис. 3 видно, что при $t = T/2$, т.е. в момент времени, равный полупериоду колебаний, деформация свободной границы соответствует ее начальному положению. Различие в начальной форме и в форме, достигае-

мой при $t = T/2$, наблюдается при $k = 1,8$. Из представленных в табл. 2 результатов расчетов видно, что с ростом величины начальной деформации k значение периода T возрастает. При малых начальных деформациях ($1,002 \leq k \leq 1,01$) период колебаний рассмотренного плоского приближения отличается от периода, вычисленного по формуле (13) на 14,8%. Площадь рассматриваемого поперечного сечения сохранялась в течение процесса колебаний с точностью до 0,002%.

Таблица 2

Результаты расчетов гранично-элементным и конечно-разностным методами

Соотношение полюсов k	Значение периода T	
	МГЭ	МКР
1,01	2,55	2,47
1,10	2,57	2,48
1,20	2,61	2,50
1,50	2,72	2,56
1,70	2,79	2,60
1,80	2,82	2,62

Как показало исследование, начиная с $k = 1,9$ в процессе колебаний наблюдаются гантелеобразные формы свободной поверхности (см. рис. 3).

В результате расчетов МКР также получены значения периодов колебаний в широком диапазоне изменения начальной деформации, приведенные в табл. 2. Формы свободной поверхности, полученные с использованием конечно-разностного алгоритма, не указаны ввиду их полной аналогии полученным ранее гранично-элементным методом (см. рис. 3). Полученные значения периодов колебаний при расчетах обоими методами (см. табл. 2) подтверждают вывод работы [6], где в числе прочего показано: период колебаний невязкой капли возрастает с увеличением амплитуды колебаний, что в рассматриваемом случае вызвано начальной деформацией капли.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 06-08-00107-а).

1. *Lundgren T.S., Mansour N.N.* Oscillations of drops in zero gravity with weak viscous effects // *J. Fluid Mech.* 1988. N 194. P. 479–510.
2. *Rush B.M., Nadim A.* The shape oscillation of a two-dimensional drop including viscous effects // *Eng. Anal. Bound. Elements.* 2000. N 24. Iss. 1. P. 43–51.
3. *Pozrikidis C.* Three-dimensional oscillations of inviscid drops induced by surface tension // *Computers & fluids.* 2001. V. 30. Iss. 4. P. 417–444.
4. *Colicchio G., Landrini M.* On the use of boundary-integral methods for unsteady free-surface flows // *J. of Eng. Math.* 2003. V. 46. N 2. P. 127–146.
5. *Рэлей Д.* Теория звука. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1944. 476 с.
6. *Tsatopoulos J.A., Brown R.A.* Nonlinear oscillations of inviscid drops and bubbles // *J. Fluid Mech.* 1983. V. 127. P. 519–537.
7. *Бреббиа К., Вроубел Л., Телес Ж.* Методы граничных элементов: Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 524 с.
8. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
9. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 197 с.

M.N. Shtokolova, V.Ya. Yakutenok. Numerical simulation of nonviscous drop oscillations under acting of the surface tension.

The oscillation process of the nonviscous liquid drop under surface tension is considered in the two-dimensional formulation. At this paper drop oscillations are investigated numerically in wide range of their initial deformation. The comparisons with the linearized Rayleigh's solution and conservation law of mass carrying out confirm the reliability of the results obtained. The comparison of the results for the boundary elements method and for the mesh method is presented.