

А.Д. Булыгин, Ю.Э. Гейнц, А.А. Землянов

## Эволюция эффективного радиуса лазерного пучка фемтосекундной длительности после его глобальной самофокусировки в воздухе

Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск

Поступила в редакцию 19.07.2007 г.

Получено уравнение для эффективного радиуса лазерного пучка фемтосекундной длительности при нестационарном самовоздействии. Для режима одиночной филаментации осуществлен качественный анализ эволюции пучка, построена модель прохождения им глобального нелинейного фокуса. Модель базируется на основе результатов численных исследований, проведенных авторами. Используется представление о филаментации лазерного пучка фемтосекундной длительности как о процессе формирования множества локальных фокусов вдоль дистанции распространения. Установлена зависимость коэффициента распространения (усредненное значение эффективной расходимости пучка, нормированное на свою начальную величину) лазерного пучка от его начальных параметров и поглощенной в среде световой энергии.

### Введение

Распространение мощного лазерного фемтосекундного излучения в воздухе сопровождается его нестационарным самовоздействием, обусловленным эффектом Керра и многофотонной ионизацией. В идеальном унимодальном лазерном пучке при начальной мощности, превышающей критическое значение  $P_{cr} \approx 3,2$  ГВт, образуется филамент. Он представляет собой устойчивую энергетическую структуру диаметром около 100 мкм и пиковой интенсивностью до  $5 \cdot 10^{17}$  Вт/м<sup>2</sup>, локализованную вблизи оси пучка, и может содержать более 10% энергии импульса. Для реальных лазерных пучков существуют возмущения в начальном профиле интенсивности — в условиях, когда начальная мощность пучка превышает критическую мощность самофокусировки в несколько раз и является причиной образования множества филаментов, распределенных в поперечном сечении пучка [1].

Основным физическим механизмом, ограничивающим рост интенсивности оптического поля в области филамента в газообразных средах, как правило, является нелинейное поглощение при фотоионизации среды, хотя в этой роли может выступать и модуляционная неустойчивость поперечного профиля пучка [3]. При этом каждый филамент существует за счет периодического притока энергии от окружающих его нефиламентированных областей пучка, называемых энергетическим резервуаром, восполняя таким образом свои потери на нелинейное поглощение. Средняя протяженность области филаментации на горизонтальной атмосферной трассе, как правило, составляет десятки метров [4].

К настоящему времени предложено несколько физических моделей филаментации ультракороткого лазерного излучения: модель движущихся фокусов (*moving focus model*) [5], самонаведенный пространственный оптический солитон [6], динамические дви-

жущиеся фокусы (*dynamical moving focus*) [4], динамическое восполнение из энергетического резервуара [7]. Каждая из этих моделей наиболее полно описывает те или иные стороны данного процесса.

Наиболее универсальным подходом к изучению явления одиночной и множественной филаментации является численное исследование задачи на основе нелинейного уравнения Шредингера. Однако численный расчет пока не может дать предсказания поведения характеристик лазерного пучка при широком варьировании начальных и граничных условий задачи, поэтому важно развивать приближенные и качественные методы анализа задачи самовоздействия, основанные на решении исходного уравнения распространения волн в рамках физически обоснованных допущений.

В данной статье рассмотрены следующие задачи нестационарного самовоздействия фемтосекундного лазерного излучения: получение уравнения для эффективного радиуса лазерного пучка; установление закономерностей в его эволюции после глобальной самофокусировки на основе результатов численных исследований и использования моделей нестационарной самофокусировки.

### 1. Нелинейное уравнение Шредингера

Будем считать, что с нелинейной средой взаимодействует лазерный фемтосекундный импульс, напряженность электрического поля которого имеет вид:

$$(\xi, \mathbf{R}, t) = U(\xi, \mathbf{R}, t) e^{i(\omega_0 t - k_0 \xi)}$$

Здесь  $U$  — зависящая от поперечных координат  $\mathbf{R} = (x, y)$  медленно меняющаяся амплитуда во времени  $t$  и в направлении распространения импульса  $\xi$ ;  $\omega_0$  — центральная частота излучения;  $k_0 = n_0 \omega_0 / c$  — волновое число на центральной частоте излучения;

$n_0$  — показатель преломления воздуха. Для исследуемой задачи нестационарного самовоздействия будем использовать нелинейное уравнение Шредингера (НУШ). В «сопутствующей» системе координат  $z = \xi - v_g t$ , где  $v_g = \partial\omega/\partial k$  — групповая скорость импульса;  $\omega$  — частота излучения;  $k$  — волновое число с учетом дисперсии групповой скорости. Нелинейное уравнение Шредингера имеет вид

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{2n_0 k_0} \nabla_{\perp}^2 + i \frac{k_0'' \partial^2}{2\partial t^2} \right\} U(\mathbf{R}, t, z) - i k_0 \tilde{\epsilon}(I) U(\mathbf{R}, t, z) + \frac{\alpha}{2} (I) U(\mathbf{R}, t, z) = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\nabla_{\perp}^2 = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$  — поперечный лапласиан;  $k_0'' = \partial^2 k/\partial \omega^2|_{\omega=\omega_0}$  — коэффициент в разложении волнового числа  $k \approx k_0 + v_g^{-1}(\omega - \omega_0) + k_0''(\omega - \omega_0)^2/2$  вблизи  $\omega_0$ ;  $\alpha$  — коэффициент нелинейного поглощения среды;  $\tilde{\epsilon}(I)$  — коэффициент нелинейной рефракции. В качестве начального условия выберем гауссов пучок в пространстве и времени вида

$$U(\mathbf{R}, t, z)|_{z=0} = U_0 \exp \left\{ -\frac{R^2}{R_0^2} \left( 1 + \frac{i k_0}{F} \right) - \frac{t^2}{t_p^2} \right\}, \quad (2)$$

где  $R_0$  и  $F$  — начальный радиус пучка и кривизна его волнового фронта;  $t_p$  — длительность импульса. Используем модель [8], где учитываются мгновенный и инерционный эффект Керра, многофотонная и каскадная ионизация, плазменная нелинейность. Это позволяет записать уравнение (1) в виде

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{2n_0 k_0} \nabla_{\perp}^2 + i \frac{k_0'' \partial^2}{2\partial t^2} \right\} U(\mathbf{R}, t, z) - i k_0 n_2 \left\{ (1 - f_R) |U|^2 + f_R \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mu(t - t') |U(t')|^2 \right\} U(\mathbf{R}, t, z) + \frac{\eta_{cas}^{(m)}}{2} (i\omega_0 \tau_c) \rho_e(t) U(\mathbf{R}, t, z) = -\frac{\eta_{MPA}^{(m)}}{2} |U|^{2m-1} U(\mathbf{R}, t, z) - \frac{\eta_{cas}}{2} \rho_e(t) U(\mathbf{R}, t, z). \quad (3)$$

Здесь  $n_2$  — коэффициент при нелинейной добавке к показателю преломления газа  $n_0$ ;  $f_R$  — удельная доля инерционного эффекта Керра с функцией отклика  $\mu(t - t')$  в суммарном изменении показателя преломления;  $\tau_c$  — характерное время столкновения электронов;  $\eta_{MPA}^{(m)}$ ,  $\eta_{cas}$  — скорость  $m$ -фотонной и каскадной ионизации газа соответственно. В качестве  $\mu(t - t')$  было использовано выражение, следующее из модели затухающего осциллятора:  $\mu(t) = \sin \Omega t \exp(-t/\tau_d)$ , где  $\Omega \approx 20$  ТГц — частота колебаний;  $\tau_d \approx 70$  нс — характерное время затухания.

Для концентрации свободных электронов используем следующее эволюционное уравнение:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = \frac{\eta_{MPA}^{(m)}}{m \hbar \omega_0} |U|^{2m} + \frac{\eta_{cas}}{\Delta E_i} \rho_e |U|^2, \quad (4)$$

где  $\Delta E_i$  — эффективный потенциал ионизации молекулы воздуха.

## 2. Эффективные параметры лазерного пучка и уравнения их эволюции при нестационарном самовоздействии

Коэффициент передачи энергии (функция пропускания) после прохождения дистанции  $z$  определяется соотношением

$$T_e(z) = E(z)/E(0), \quad (5)$$

где  $E(z) = \int_{-\infty}^{\infty} I(\mathbf{R}, z, t) d\mathbf{R} dt$  — полная энергия светового импульса;  $I(\mathbf{R}, z, t) = \frac{cn_0}{8\pi} |U|^2$  — интенсивность световой волны.

Эффективный радиус пучка имеет следующий вид:

$$R_e(z) = \left( \tilde{R}^2(z) T_e^{-1} \right)^{1/2} / R_e(0), \quad (6)$$

где  $\tilde{R}^2(z)$  — нормированный на начальную энергию «момент инерции пучка»:

$$\tilde{R}^2(z) = \frac{1}{E(0)} \int_{-\infty}^{\infty} I(\mathbf{R}, z, t) \mathbf{R}^2 d\mathbf{R} dt. \quad (7)$$

Здесь и в дальнейшем используется следующее обозначение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{R}, t) d\mathbf{R} dt = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, t) dt.$$

С помощью уравнения (1) и эффективных параметров (5) и (7) получаем уравнения для  $T_e$  и  $\tilde{R}_e^2$ . Для коэффициента передачи энергии излучения уравнения имеют следующий вид:

$$\frac{dT_e(z)}{dz} = -\frac{1}{E(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(I) I d\mathbf{R} dt. \quad (8)$$

Для параметра  $\tilde{R}^2(z)$  формулируется уравнение

$$E(0) \frac{d^2}{dz^2} \tilde{R}_e^2 = E(0) \partial_e^2 + \left( \frac{1}{4n_0} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla_{\perp}^2 \tilde{\epsilon} I d\mathbf{R} dt - \frac{k_0'' k_0}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\epsilon} I t + 2 \left| \frac{\partial}{\partial t} U \right|^2 d\mathbf{R} dt \right) + \omega_0 \tau_c \eta_{cas} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_e(t) I d\mathbf{R} dt + 2 \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{\infty} I \alpha(I) \mathbf{R}^2 d\mathbf{R} dt + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(I) (S_{\perp} \mathbf{R}) d\mathbf{R} dt + \left\{ E(0) \frac{1}{k_0'' n_0 k_0} \frac{d^2}{dz^2} \tilde{t}_{pe}^2 - 2 \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(I) I t^2 d\mathbf{R} dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(I) (S_t t) d\mathbf{R} dt \right\}. \quad (9)$$

Здесь

$$S_t = \left( U^* \frac{\partial}{\partial t} U - U \frac{\partial}{\partial t} U^* \right) / 2,$$

$$S_{\perp} = (U \nabla_{\perp} U^* - U^* \nabla_{\perp} U) / 2i$$

— поперечная составляющая вектора Умова—Пойнтинга излучения;

$$\tilde{\theta}_e^2 = \theta_e^2 T_e = \frac{1}{2n_0 k_0} \int_{-\infty}^{\infty} (|\nabla U|^2) d\mathbf{R} dt / E(0),$$

$\theta_e$  — эффективная угловая расходимость пучка;

$$\tilde{t}_{pe}^2(z) = 1/E(0) \int_{-\infty}^{\infty} t^2 Id\mathbf{R} dt, \quad t_{pe} = \sqrt{T_e^{-1} \tilde{t}_{pe}^2(z)}$$

— эффективная длительность импульса [2].

Далее будем рассматривать ситуацию, связанную с режимом одиночной филаментации, когда отношение  $P_0/P_{cr}$  не очень велико ( $P_0$  — начальная мощность в фемтосекундном импульсе).

На основе численного моделирования задачи нестационарного самовоздействия в работе [9] было установлено, что эффективный радиус пучка при своей эволюции в режиме одиночной филаментации проходит три пространственные области (зоны), каждая из которых характеризует специфическую стадию нестационарной самофокусировки излучения.

В первой зоне энергия пучка практически не меняется —  $T_e \approx 1$ . Происходит поперечное сжатие пучка и рост его интенсивности за счет керровской нелинейности. Эта ситуация соответствует тому, что правая часть уравнения (9) в этой области равна постоянной величине  $d^2 \tilde{R}^2 / dz^2 = \text{const}$  и, как следствие, квадрат эффективного радиуса изменяется по параболическому закону [1]. В [9] была получена аппроксимационная формула для эффективного радиуса в первой зоне:

$$R_e^2(z) = R_0^2 \left[ \left( 1 - \frac{\eta}{b} \right) \left( \frac{z}{2L_R} \right)^2 + \left( 1 - \frac{z}{F} \right)^2 \right],$$

$$b = 1,62, \quad \eta = \frac{P_0}{P_{cr}}, \quad z \in [0; z_f], \quad (10)$$

где  $L_R = k_0 R_0^2 / 2$  — рэлеевская длина пучка. Соотношение (10) справедливо до начала филаментации. Координата начала филаментации  $z_f$  (локальный нелинейный фокус) определяется формулой [1]:

$$z_f = \frac{2L_R}{2,725 \sqrt{[(\eta/b)^{1/2} - 0,852]^2 - 0,022}}.$$

Вторая зона начинается с окрестности глобального нелинейного фокуса пучка  $z_w$ , в которой  $dR_e^2/dz|_{z=z_w} = 0$ , и характеризуется распространением наиболее интенсивной части лазерного импульса в форме светового филемента длиной  $l_f$ , оканчивающегося в точке  $z_{NL}$ . Присутствие филемента уменьшает энергию пучка. Механизмом, ограничи-

вающим энергию, является многофотонная ионизация среды. Она прекращает рост интенсивности пучка, останавливая ее на некотором максимальном значении  $I_{cr} \approx 5 \cdot 10^{17}$  Вт/м<sup>2</sup>, что находится вблизи порога пробоя воздуха при многофотонном механизме ионизации.

И наконец, третья зона — это зона линейного распространения излучения, прошедшего область нелинейного взаимодействия. После прохождения зоны филаментации в результате самомодуляции световое поле приобретает сложный пространственно-временной профиль. Дисперсия совместно с керровской нелинейностью по-прежнему оказывают существенное влияние на эволюцию эффективного радиуса пучка. В результате возникает загиб (резкое уменьшение скорости роста эффективного радиуса) во второй зоне после окончания филаментации. Действительно, возможность этого эффекта следует из уравнения для эффективного радиуса (9), которое в отсутствие поглощения принимает вид

$$\frac{d^2}{dz^2} R_e^2 - \frac{1}{k_0^* n_0 k_0} \frac{d^2}{dz^2} t_{pe}^2 =$$

$$= \left( \theta_e^2 + \frac{1}{4n_0} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla_{\perp} \varepsilon I R d\mathbf{R} dt - \frac{k_0^* k_0}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon I t d\mathbf{R} dt \right) = \text{const}.$$

Из этого выражения следует, что при наличии дисперсии и керровской нелинейности инвариантом задачи в этом случае является вторая производная от квадрата эффективного интервала импульса  $L^2 = R_e^2 - (t_{pe}^2 / k_0^* n_0 k_0)$ . При дальнейшем распространении (третья зона) расширяющегося пучка керровская нелинейность становится пренебрежимо малой величиной, в результате инвариант, связанный с эффективным интервалом, распадается на два независимых инварианта:  $d^2 R_e^2 / dz^2$  и  $d^2 t_{pe}^2 / dz^2$ .

### 3. Дифракционная модель эволюции эффективного радиуса лазерного пучка фемтосекундной длительности в режиме филаментации

Выясним роль нелинейных эффектов, связанных с многофотонной ионизацией, поглощением и рефракцией излучения в плазме, образующейся в результате ионизации воздуха. Для упрощения анализа будем пренебрегать влиянием дисперсии на формирование эффективного радиуса пучка сразу после его глобальной фокусировки.

В качестве модели филаментации примем многофокусную модель нестационарного самовоздействия [5]. Согласно этой модели филемента представляет собой последовательность локальных фокусов, образующихся в результате последовательных фокусировок временных «срезов» светового импульса, имеющих мощность больше  $P_{cr}$ . Пренебрежем поперечными размерами локальных фокусов по сравнению с эффективным радиусом пучка. Также будем считать, что размеры фокусов значительно меньше расстояний между ними. В этом случае можно заменить

зависимость коэффициента поглощения от координат дельта-функциями, локализованными на оси пучка в точках  $z_i$ , где  $i$  — номер локального фокуса. В областях между этими точками поглощения нет. Введем в рассмотрение следующую функцию:

$$H(z) = \tilde{\theta}^2 - \tilde{\theta}_{NL}^2, \quad (11)$$

$$\tilde{\theta}^2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} (|\nabla_{\perp} U|^2) d\mathbf{R} dt / E(0) 2n_0 k_0 \right),$$

$$\tilde{\theta}_{NL}^2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\epsilon} I d\mathbf{R} dt / E(0) 4n_0 k_0 \right).$$

Известно, что в отсутствие поглощения для нелинейной среды керровского типа  $H = \text{const}$  [1]. При прохождении  $i$ -го локального фокуса функция  $H$  меняет свое значение скачкообразно с  $H_i$  до  $H_{i+1}$ , оставаясь между фокусами постоянной величиной. В этом приближении соотношения для эффективных параметров пучка (8), (9) примут следующий вид:

$$T_e(z) = 1 - \sum_{i=1}^{N(z)} \Delta T_{ei}, \quad (12)$$

где  $\Delta T_{ei} = T_{ei+1} - T_{ei}$ ;

$$\frac{d^2}{dz^2} \tilde{R}_e^2 = 2H = 2 \left( H_0 + \sum_{i=1}^{N(z)} \Delta H_i \right), \quad (13)$$

где  $\Delta H_i = H_{i+1} - H_i$ .

Уравнение (13) с учетом соотношения (12) можно переписать в другом виде (смысл такой записи станет ясен позже):

$$\frac{d^2}{dz^2} \tilde{R}_e^2 = 2H = 2 \left( H_0 + \sum_{i=1}^{N(z)} \gamma_i \Delta T_i \right), \quad \gamma_i = \tilde{\gamma}_i (1 - \mu_i),$$

$$\tilde{\gamma}_i = \frac{\Delta \tilde{\theta}_i^2}{\Delta T_{ei}}, \quad \mu_i = \frac{|\Delta \tilde{\theta}_{NLi}^2|}{\Delta \tilde{\theta}_i^2 \Delta T_{ei}}, \quad (13a)$$

$$\Delta \tilde{\theta}_i^2 = \tilde{\theta}_{i+1}^2 - \tilde{\theta}_i^2.$$

Здесь  $N(z)$  — число локальных фокусов после прохождения расстояния  $z$ ;  $H_0 = H(0)$ .

Прохождение лазерного пучка через каждый фокус можно рассматривать как рассеяние световой волны на неоднородности, имеющей комплексную диэлектрическую проницаемость, мнимая часть которой определяется коэффициентом поглощения  $\alpha(I)$ , а реальная часть связана с плазменной диэлектрической неоднородностью.

В рамках многофокусной модели задачу о распространении фемтосекундного лазерного импульса через нелинейную рефракционную поглощающую среду можно разбить на две задачи. Первая из них сводится к исследованию распространения излучения через нелинейную среду керровского типа, вторая — к изучению рассеяния света на локализованных неоднородностях. Для того чтобы формализовать эти рассуждения, введем оператор эволюции  $\hat{S}$ , определенный следующим образом:

$$U(z, \mathbf{R}, t) = \hat{S}(z, \mathbf{R}, t) U_0(\mathbf{R}, t),$$

$$U(z, \mathbf{R}, t) \Big|_{z=0} = U_0(\mathbf{R}, t).$$

С учетом этого в рамках многофокусной модели оператор  $\hat{S}$  можно представить в виде

$$\hat{S}(z, \mathbf{R}, t) U_0 = \prod_{i=1}^{N(z)} \hat{S}_{\alpha}^i \hat{S}_{\text{ker}} U_0, \quad \hat{S}_{\alpha}^i = \hat{S}_{\text{ker}} \hat{S}_{\alpha}(z_i).$$

Здесь  $\hat{S}_{\text{ker}}$  — оператор эволюции в среде с безынерционной керровской нелинейностью, а  $\hat{S}_{\alpha}(z_i)$  — оператор рассеяния на диэлектрической неоднородности в  $i$ -м локальном фокусе, определенный как

$$\hat{S}_{\alpha}(z_i) U(z_i - 0, \mathbf{R}, t) = U(z_i + 0, \mathbf{R}, t).$$

Тогда величина  $\tilde{\gamma}_i$ , определенная в соотношениях (13), представима в виде

$$\tilde{\gamma}_i = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla_{\perp} [\hat{S}(z_i + 0) U_0]|^2 d\mathbf{R} dt - \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla_{\perp} [\hat{S}(z_i - 0) U_0]|^2 d\mathbf{R} dt \right\} / \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{S}(z_i + 0) U_0|^2 d\mathbf{R} dt - \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{S}(z_i - 0) U_0|^2 d\mathbf{R} dt \right\}.$$

Поскольку рассеяние световой волны происходит на локализованной в пространстве неоднородности, имеющей комплексную диэлектрическую проницаемость, то физическими механизмами рассеяния будут являться как рефракция, так и дифракция. Для понимания физического смысла параметра  $\tilde{\gamma}_i$ , определяемого как отношение приращения квадрата эффективной расходимости пучка к поглощенной энергии в каждом локальном фокусе, рассмотрим физический пример. Будем считать, что на частично поглощающий (серый) круглый экран радиуса  $a_i$  падает плоская волна с амплитудой  $A_{0i}$  и фазой  $\varphi_{0i}$ :  $U_i = A_{0i} \exp(i\varphi_{0i})$ . Непосредственно после прохождения экрана под номером  $i$  поле приобретет вид

$$U_i^{\text{out}}(\mathbf{R}) = A_{0i} \left[ 1 - \beta_i^l \vartheta(a_i - |\mathbf{R}|) \right] \times \exp \left[ i(\varphi_{0i} + \beta_i^o \vartheta(a_i - |\mathbf{R}|)) \right],$$

где  $\vartheta$  — единичная функция Хевисайда, а коэффициенты  $\beta_i^l$ ,  $\beta_i^o$  определяют изменение амплитуды и фазы поля при прохождении  $i$ -го локального фокуса соответственно. В этом случае для коэффициента  $\tilde{\gamma}_i$  получим следующие выражение:

$$\tilde{\gamma}_i \approx \frac{1}{2n_0 k_0} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla_{\perp} U_i^{\text{out}}|^2 d\mathbf{R} dt}{A_{0i}^2 \int_{-\infty}^{\infty} [1 - (1 - \beta_i^l \vartheta(a_i - |\mathbf{R}|))^2] d\mathbf{R} dt} = \frac{1}{2k_0 n_0 a_i} \frac{2\beta_i^l + \beta_i^o}{2 - \beta_i^l}. \quad (14)$$

Из (14) видно, что  $\tilde{\gamma}_i$  определяются лишь параметрами индуцированного рассеивателя. Для надкритических мощностей ( $P_0 > P_{cr}$ ) интенсивность светового поля вблизи фокуса практически не зависит от характеристик исходного лазерного пучка [1, с. 152], поэтому будем полагать, что вид локализованного рассеивателя не зависит от номера фокуса, т.е.  $\tilde{\gamma}_i = \tilde{\gamma}$ . Таким образом, значение  $\tilde{\gamma}$  для надкритических пучков определяется лишь параметрами среды  $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\eta_{MFA}^{(m)}, n_2, f_R, \eta_{cas})$ . Величина  $\mu$  (см. [1]) так же, как  $\tilde{\gamma}$ , зависит лишь от свойств среды. Тогда из (12) и (13а) следует, что

$$\frac{d^2}{dz^2} \tilde{R}_e^2 \approx 2 \left( H_0 + \gamma \sum_{i=1}^{N(z)} \Delta T_i \right) = 2 [H_0(\eta, F) + \gamma D_a], \quad (15)$$

$$H_0 = \left( 1 - \frac{\eta}{2b} \right) / (k_0 R_0)^2 + \frac{1}{F^2}, \quad \gamma = \tilde{\gamma}(1 - \mu),$$

где  $D_a = [1 - T_e(z, \eta, F)]$  – функция поглощения световой энергии в среде.

Исходя из определения (6) и с учетом уравнения (15), для пространственной области филаментации  $z \in (z_f, z_{NL})$ , где  $z_{NL}$  – точка окончания филаментации, получим

$$R_e^2(z) \approx \tilde{R}_e^2 \Big|_{z=z_f} T_e^{-1}(z) + (z - z_f) \frac{d}{dz} \tilde{R}_e^2 \Big|_{z=z_f} T_e^{-1}(z) + (z - z_f)^2 H_0 T_e^{-1}(z) + 2\gamma \left( \int_0^\infty G(z - z') D_a(z') dz' \right) T_e^{-1}(z). \quad (16)$$

Здесь  $G(\xi) = \xi \mathcal{G}(-\xi)$  – функция Грина уравнения (15) с функцией Хевисайда  $\mathcal{G}$ .

В случае если имеется точка глобального фокуса пучка, определяемая условием

$$dR_e^2 / dz \Big|_{z=z_w} = 0, \quad (17)$$

то после прохождения ее световым импульсом выражение (16) можно записать в виде

$$R_e^2(z) \approx R_{ew}^2 + (z - z_w)^2 H_0 T_e^{-1}(z) + 2\gamma \left( \int_0^\infty G(z - z') D_a(z', \eta, F) dz' \right) T_e^{-1}(z), \quad (18)$$

где  $R_{ew}$  – значение эффективного радиуса пучка в его перетяжке, определяемое по формуле (16) с учетом условия (17).

Соотношение (18) обеспечивает простую взаимосвязь между эффективными параметрами пучка  $R_e^2$  и  $T_e$ . При этом, однако, параметр  $\gamma$  остается неопределенным.

Для нахождения параметра  $\gamma$  используем результаты численного решения задачи (2)–(4). Для лазерных импульсов с начальным гауссовым пространственно-временным профилем и следующими

параметрами: длина волны  $\lambda_0 = 810$  нм, длительность  $t_p = 80$  фс, радиус  $R_0 = 1$  мм, пиковая мощность  $P_0/P_{cr} = 5, 10, 15$ , начальный радиус кривизны фазового фронта  $F = 2L_R$ , найдено, что  $\gamma \approx 1,3 \cdot 10^{-5}$  и не зависит от  $P_0$ .

На рис. 1 и 3 изображены функции  $T_e(z)$ , полученные в численном эксперименте при различном выборе параметров модели и начальных условий. Для этих зависимостей построены соответствующие аппроксимационные функции, по которым в соответствии с формулой (16) получены функции  $R_e^2(z)$  (рис. 2 и 4). Сравнение этих функций с результатом численного решения НУШ (см. рис. 2 и 4) свидетельствует о справедливости соотношения (16).

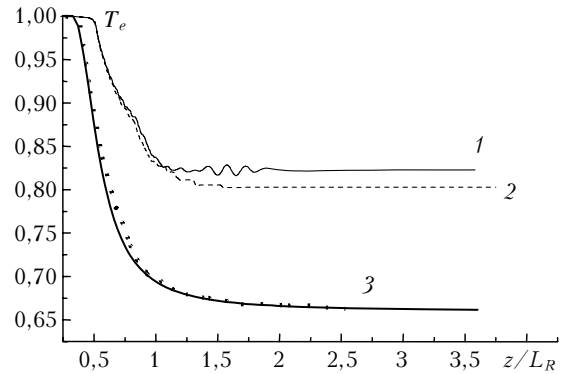


Рис. 1. Коэффициент передачи энергии в зависимости от дистанции распространения: полная модель с  $f_R = 0,5$  (1); без учета дисперсии с  $f_R = 0,5$  (2); без учета дисперсии с  $f_R = 0$  (3)

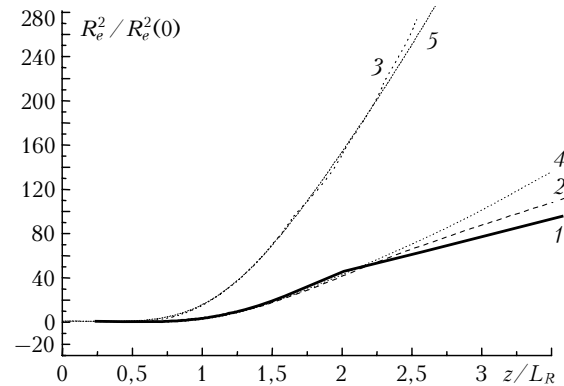


Рис. 2. Квадрат нормированного эффективного радиуса при его распространении в воздухе: 1 – полная модель, численный расчет; модель без учета дисперсии с  $f_R = 0,5$  (кривая 2) и 0 (3) – численный расчет; 4 – кривая функции (16) с  $\tilde{\epsilon} = k_0 n_2 \{1/2 |U|^2\}$ ; 5 – с  $\tilde{\epsilon} = k_0 n_2 \{|U|^2\}$

Нами были проведены численные эксперименты по изучению влияния плазменных неоднородностей на поведение эффективного радиуса пучка. Было установлено, что при «отключении» реальной части плазменных неоднородностей диэлектрической проницаемости в НУШ (3) зависимость эффективного радиуса фемтосекундного лазерного импульса от дистанции не меняется существенным образом. Это свидетельствует о преобладающем механизме дифракции

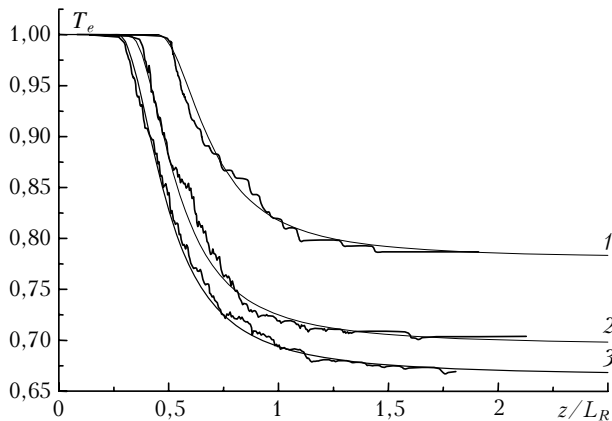


Рис. 3. Коэффициент передачи энергии в зависимости от дистанции распространения: полная модель. Жирные кривые – численный расчет по модели (3)–(4); светлые – расчет по формуле  $T_e(z) = T_e(z_L) + D_a(z_L)\mathfrak{g}(z - z_f) [1 - (1 + q(z - z_f)^2)^{-1}]$  при  $P_1(0) = 5P_{cr}$ ,  $q_1 = 16$ ,  $D_a(z_L)_1 = 0,22$  (1);  $P_2(0) = 10P_{cr}$ ,  $q_2 = 20$ ,  $D_a(z_L)_2 = 0,30$  (2);  $P_3(0) = 15P_{cr}$ ,  $q_3 = 20$ ,  $D_a(z_L)_3 = 0,34$  (3)

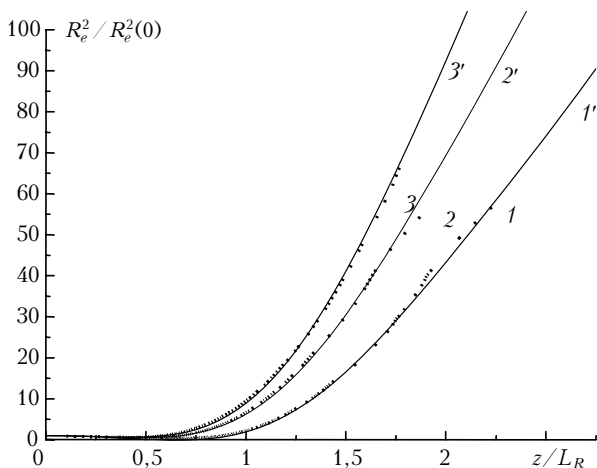


Рис. 4. Квадрат нормированного эффективного радиуса при его распространении в воздухе: 1–3 – полная модель (численный расчет); 1'–3' – графики, построенные исходя из формулы (16) по функции  $D_a(z')$  (см. рис. 3)

перед рефракцией при рассеянии света на локальных фокусах. При таком режиме самовоздействия установлено, что скорость роста эффективного радиуса пучка после выхода из области нелинейной перетяжки при глобальной самофокусировке существенно зависит от затраченной на создание плазмы и поглощенной в ней световой энергии

$$D_a(z) = [E(0) - E(z)]/E(0).$$

Сделаем важные замечания. В формуле (15) правая часть определяется функцией поглощения световой энергии. Единственным существенным допущением при получении соотношения (15) являлась независимость коэффициента  $\gamma$  от номера фокуса, что справедливо для лазерных пучков с сверхкритической мощностью и не связывается со структурой пучка по пространственным координатам. Потому в рамках предложенной модели соотношение (15) верно для широкого класса лазерных пучков и ре-

жимов самовоздействия, в том числе и для пучков с многофиламентационной структурой.

#### 4. Коэффициент распространения

В работе [10] для квадрата эффективного радиуса лазерного пучка  $R_e^2$  во второй зоне получено аппроксимационное выражение с квадратичной зависимостью по  $z$ . Коэффициентом перед  $z^2$  является квадрат коэффициента распространения пучка  $M^2 \geq 1$  [11]. В безразмерных координатах аппроксимационное соотношение имеет вид

$$\bar{R}_e'^2 = R_{ew}'^2 + \frac{(M^2)^2}{4}(z' - z_w')^2, \quad (19)$$

где

$$R_e' = R_e/R_0, \quad R_{ew}' = R_{ew}/R_0, \quad z' = 2z/(k_0 R_0^2).$$

В линейной среде минимальное значение коэффициента  $M^2$  имеет гауссов пучок ( $M^2 = 1$ ), поэтому фактор  $M^2$  часто называют критерием качества пучка в том смысле, что чем выше значения  $M^2$ , тем сильнее отличие расходимости пучка от дифракционной расходимости гауссова пучка  $\theta_0 = (k_0 R_0)^{-1}$ . Полагая, что выполняется условие аппроксимации в точке окончания филаментации  $z_{NL}$ , определяемой из условия прекращения поглощения:

$$\bar{R}_e'^2|_{z=z_{NL}} = R_e'^2|_{z=z_{NL}}, \quad (20)$$

и учитывая формулу (18) для коэффициента распространения  $M^2$  в нелинейной среде, получим следующее соотношение:

$$M^2(\eta, F) \approx \theta_0^{-1} \times$$

$$\sqrt{\left[ \frac{\int_0^\infty G(z'_{NL} - z') D_a(z', \eta, F) dz'}{H_0 + 2\gamma^0 \frac{l_f^2}{l_f^2}} \right] T_e^{-1}(z_{NL}')}, \quad (21)$$

где  $l_f$  – нормированная длина филаментации лазерного пучка:  $l_f = z'_{NL} - z'_f$ , под которой понимается нормированная дистанция с начала филаментации пучка до точки завершения поглощения световой энергии в среде.

Величину  $M^2$  можно найти из экспериментальных данных. Таким образом, для класса самовоздействующих пучков, имеющих глобальный фокус, в режиме одиночной и множественной филаментации в соответствии с формулами (19) и (21) набор величин  $(\bar{R}_{ew}', \bar{z}_w', M^2)$ , сформировавшихся в процессе эволюции пучка, универсально определяет его поведение после глобальной самофокусировки.

Для того чтобы оценить величину  $M^2$  в случае одиночной филаментации, т.е. при режиме распространения лазерного пучка, когда образуется один филамент, аппроксимируем функцию  $D_a$  функцией вида

$$D_a(z') = D_a(z'_{NL})\mathfrak{g}(z' - z'_f) \times$$

$$\times \left\{ 1 - \left[ 1 + q(z' - z_f')^2 \right]^{-1} \right\} \left[ \vartheta(z'_{NL} - z') \right]. \quad (22)$$

На рис. 1 и 3 построена функция  $T_e(z')$  на основе (22) с соответствующими параметрами  $D_a(z'_{NL})$  и  $q$ , выбранными исходя из результатов численного расчета. Из рис. 1, 3 видно, что аппроксимация (22) хорошо согласуется с результатами численного расчета. Используя (22), в соответствии с формулой (21) для  $M^2$  получим следующее соотношение:

$$M^2(D_a(z'_{NL})) \approx \theta_0^{-1} \times \sqrt{\frac{H_0 + \frac{\gamma D_a(z'_{NL})}{D_a(z'_{NL}) - \Delta D_a} \left( D_a(z'_{NL}) - \Delta D_a \left\{ 1 + \ln \left[ \frac{D_a(z'_{NL})}{\Delta D_a} \right] \right\} \right)}{1 - D_a(z'_{NL})}}, \quad (23)$$

где  $\Delta D_a = -\Delta T_e \approx 0,04$  — относительное значение приращения энергии, запасенной в среде при прохождении каждого локального фокуса. В пренебрежении величиной  $\Delta D_a/D_a(z'_{NL}) \ll 1$ , что соответствует условию  $P_0/P_{cr} \gg 1$ , соотношение (23) примет следующий вид:

$$M^2(D_a(z'_{NL})) \approx \theta_0^{-1} \sqrt{\frac{H_0 + \gamma D_a(z'_{NL})}{1 - D_a(z'_{NL})}} \approx \theta_0^{-1} \sqrt{\gamma} \sqrt{0,814 D_a(z'_{NL}) + 2 D_a(z'_{NL})^2}. \quad (23a)$$

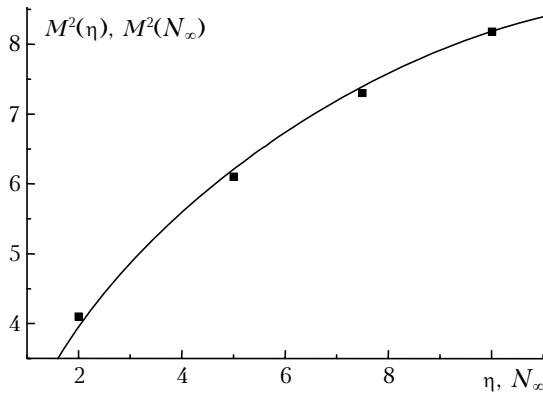


Рис. 5. Коэффициент распространения  $M^2$  во второй пространственной зоне самовоздействия в зависимости от нормированной начальной мощности импульса  $\eta = P_0/P_{cr}$  (численный расчет [9], квадратики) и от  $N_\infty$  при  $F = 2L_R$  (кривая, построенная по формуле (23a))

Введем понятие полного числа фокусов, которое образуется после окончания филаментации, как  $N_\infty = D_a(z'_{NL})/\Delta D_a$ . На рис. 5 представлена зависимость  $M^2$  от параметра  $N_\infty$ .

Видно, что между числом фокусов  $N_\infty$  и начальной мощностью излучения существует приближенное соотношение  $N_\infty \approx \eta$ .

Таким образом, в случае режима одиночной филаментации коэффициент распространения  $M^2$  определяется начальными параметрами  $H_0$  и  $F$  и количеством запасенной в среде энергии  $D_a(z'_{NL})$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке комплексного интеграционного проекта 3.13 Президиума СО РАН, гранта РФФИ № 06-05-64799.

1. Власов С.Н., Таланов В.И. Самофокусировка волн. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1997. 220 с.
2. Sprangle P., Penano J.R., Hafizi B. Propagation of intense short laser pulses in the atmosphere // Phys. Rev. E. 2002. V. 66. P. 046418-1–046418-21.
3. Mechain G., Couairon A., Andre Y.-B., D'Amico C., Franco M., Prade B., Tzortzakis S., Sauerbrey R., Mysyrowicz A. Long-range self-channeling of infrared laser pulses in air: a new propagation regime without ionization // Appl. Phys. B. 2004. V. 79. P. 379–382.
4. Broudeur A., Korn G., Liu X., Du D., Squier J., Mourou G. Self-channeling of high-peak-power femtosecond laser pulses in air // Opt. Lett. 1995. V. 20. N 1. P. 73–75.
5. Луговой В.Н., Прохоров А.М. // Письма в ЖЭТФ. 1968. Вып. 7. С. 153–158.
6. Nibbering E.T.J., Curley P.F., Grillon G., Prade B.S., Franco M.A., Salin F., Mysyrowicz A. Conical emission from self-guided femtosecond pulses in air // Opt. Lett. 1996. V. 21. N 1. P. 62–64.
7. Mlejnek M., Wright E.M., Moloney J.V. Dynamic spectral replenishment of femtosecond pulses propagating in air // Opt. Lett. 1998. V. 23. N 5. P. 382–384.
8. Brabec T., Krausz F. Nonlinear optical pulse propagation in the single-cycle regime // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. P. 3282–3285.
9. Землянов А.А., Гейнц Ю.Э. Интегральные параметры мощного фемтосекундного лазерного излучения при филаментации в воздухе // Оптика атмосф. и океана. 2005. Т. 18. № 7. С. 574–579.
10. Zemlyanov A.A., Geints Y.E. Zonal model of nonstationary self-focusing of femtosecond laser radiation in air: effective beam characteristics evolution // The European Phys. Journ. D-Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics. Publ.online.doi-10.1140/epj/e2007-00008-x.
11. Siegman A.E. Lasers. Oxford University Press: Mill Valley, CA. 1986. 568 p.

*A.D. Bulygin, Yu.E. Geints, A.A. Zemlyanov. Evolution of effective radius of femtosecond laser beam after its global self-focusing in the air.*

The equation for effective radius of laser beam of femtosecond duration at nonstationary self-action was found. Qualitative analysis of its evolution was done for single filamentation regime, and model for beam passing through global nonlinear focus was made. The model is based on numerical investigation results obtained by the authors. Filamentation of a femtosecond laser beam was represented as a process of many local focuses formation along propagation distance. Dependence of laser beam propagation coefficient on its initial parameters and light energy absorbed in a medium was determined.