

Учет дисперсии длин путей рассеянного света в малоугловом приближении теории переноса излучения

В.П. Будак¹, Я.А. Илюшин^{2*}

¹Московский энергетический институт
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

²МГУ им. М.В. Ломоносова
119992, г. Москва, Ленинские горы, ГСП-2

Поступила в редакцию 3.04.2009 г.

Предлагается направление развития малоуглового приближения решения уравнения переноса излучения (УПИ) для плоской геометрии на случай учета дисперсии длин путей рассеянного света в переднюю полусферу направлений визирования. Решение основано на разложении косинуса угла визирования в ряд Тейлора с сохранением двух первых членов без перехода в УПИ к диффузионному приближению. Полученное решение практически совпадает с точным решением в передней полусфере направлений вплоть до глубинного режима.

Ключевые слова: анизотропное рассеяние, малоугловое приближение, распределение длин путей распространения излучения; anisotropic scattering, small angle approximation, photon path distribution function.

Введение

Природные среды, в которых может распространяться световое излучение, характеризуются типичным размером рассеивающих свет неоднородностей, существенно превышающих длины волн видимого света, что согласно теории рассеяния Ми приводит к сильно анизотропному рассеянию света. Для решения задач в случае сильно анизотропного рассеяния используется специальное малоугловое приближение (МУП) [1].

В настоящее время разработаны эффективные алгоритмы решения уравнения переноса излучения (УПИ) для плоской геометрии [2], по эффективности и скорости расчета превышающие МУП, что снизило актуальность таких методов. Тем не менее сохраняется проблема решения УПИ для сильно анизотропного рассеяния, где используются алгоритмы сглаживания индикатрис рассеяния [2, 3]. В то же время возможности современной аппаратуры дистанционного зондирования [4] предъявляют все более высокие требования к точности алгоритмов обработки данных.

В работе [5] указан путь преодоления данной проблемы, основанный на представлении решения в виде суммы МУП и регулярной части. Однако в этой работе используется МУП в форме Goudsmit–Saunderson [6], не позволяющей учесть дисперсию длин путей распространения излучения. Учет ее позволит существенно повысить эффективность данного алгоритма.

Рассмотрим возможности учета дисперсии путей в краевой задаче для плоского мононаправленного (ПМ) источника с нормальным падением на границу плоского слоя

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial L(\tau, \theta, \varphi)}{\partial \tau} + L(\tau, \theta, \varphi) - \\ - \frac{\Lambda}{4\pi} \int x(\theta, \varphi, \theta', \varphi') L(\tau, \theta', \varphi') d\Omega(\theta', \varphi') = 0; \\ L(\tau, \mu)|_{\tau=0, \mu>0} = \delta(1 - \cos\theta)\delta(\varphi), \\ L(\tau, \mu)|_{\tau=\tau_0, \mu<0} = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

где $L(\theta, \varphi)$ — угловое распределение яркости; $x(\theta, \varphi, \theta', \varphi')$ — индикатриса рассеяния; Λ — альbedo однократного рассеяния; τ — оптическая толщина; $\mu = \cos\theta$ — косинус угла рассеяния. В последнем слагаемом в левой части уравнения (1) интегрирование производится по всей сфере направлений.

В основе МУП [1] лежат замена $\mu \approx 1$ при производной по τ в левой части уравнения (1) и пренебрежение вторым граничным условием при $\tau = \tau_0$. В этом случае решение известно [6]:

$$L(\tau, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} Z_k(\tau) P_k(\cos\theta), \quad (2)$$

где $P_k(\cdot)$ — полиномы Лежандра. Коэффициенты разложения (2) в малоугловом приближении выражаются в виде

$$Z_k(\tau) = \exp[-(1 - \Lambda x_k)\tau], \quad (3)$$

x_k — коэффициенты разложения индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра:

* Владимир Павлович Будак (BudakVP@mpei.ru); Ярослав Александрович Илюшин (ilyushin@phys.msu.ru).

$$x(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)x_l P_l(\cos\theta). \quad (4)$$

Отсутствие учета дисперсии длин путей распространения в результате рассеяния на малые углы обусловлено грубостью упрощающего предположения $\mu \approx 1$, игнорирующего малые отклонения рассеянного излучения от первоначального направления распространения. Однако при больших длинах пути распространения излучения в мутной среде эти эффекты могут оказаться существенными. Неоднократно предпринимались попытки преодолеть указанное ограничение путем учета следующих членов разложения [7–9]:

$$\mu \approx 1 - \theta^2/2 + \dots, \quad (5)$$

но математические трудности решения полученных уравнений неизбежно приводили к необходимости их дальнейшего упрощения – преобразования интеграла рассеяния к диффузионному приближению со всеми ему присущими недостатками.

Разделим обе части уравнения (1) на косинус угла распространения излучения μ :

$$\frac{\partial L(\tau, \theta, \varphi)}{\partial \tau} + \frac{1}{\mu} L(\tau, \theta, \varphi) - \frac{\Lambda}{4\pi\mu} \int x(\theta, \varphi, \theta', \varphi') L(\tau, \theta', \varphi') d\Omega(\theta', \varphi') = 0. \quad (6)$$

В области малых углов рассеяния перейдем к разложению μ^{-1} в ряд Тейлора:

$$1/\mu \approx 1 + \theta^2/2 + \dots, \quad (7)$$

ограничиваясь в разложении квадратичным членом по θ . Тогда получим из (6) приближенное уравнение

$$\frac{\partial L}{\partial \tau} + L + \frac{\theta^2}{2} L - \frac{\Lambda}{4\pi} \int x(\theta, \varphi, \theta', \varphi') L(\tau, \theta', \varphi') d\Omega' - \frac{\Lambda}{4\pi} \frac{\theta^2}{2} \int x(\theta, \varphi, \theta', \varphi') L(\tau, \theta', \varphi') d\Omega' = 0. \quad (8)$$

С учетом известной связи полиномов Лежандра с цилиндрическими функциями [10] при $\theta \rightarrow 0$

$$P_k(\cos\theta) \approx J_0(k\theta), \quad (9)$$

разложение (2) в малоугловом приближении асимптотически переходит в преобразование Ганкеля:

$$L(\tau, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} Z(k) J_0(k\theta) k dk, \quad (10)$$

и аналогичное асимптотическое представление справедливо для разложения индикатрисы рассеяния в ряд по полиномам Лежандра (4).

Таким образом, в малоугловом приближении коэффициенты разложений (2) и (4) представляют собой преобразования Ганкеля от углового распределения тела яркости $L(\theta)$ и индикатрисы рассеяния $x_k(\theta)$ соответственно. Поскольку при сильно вытяну-

тых теле яркости и индикатрисе рассеяния в указанных разложениях k коэффициенты мало отличаются от $(k+1)$, можно приближенно принять непрерывные зависимости от индексов этих коэффициентов $x_l = x(l)$ и $Z_k = Z(k)$ соответственно. Подставляя угловое распределение яркости в форме преобразования Ганкеля (10) и аналогичное представление для индикатрисы рассеяния в уравнение (8), получим уравнение для коэффициентов разложения тела яркости Z_k :

$$\frac{\partial Z_k}{\partial \tau} = -Z_k + \Lambda x_k Z_k + \frac{\Delta_{k\perp}}{2} Z_k - \frac{\Delta_{k\perp}}{2} \Lambda x_k Z_k, \quad (11)$$

где поперечный k -лапласиан $\Delta_{k\perp}$ определяется как

$$\Delta_{k\perp} = \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial k} + \frac{\partial^2}{\partial k^2}. \quad (12)$$

При выводе уравнения (11) учтены известные теоремы для преобразования Ганкеля $\mathcal{H}\{\cdot\}$, устанавливающие его свойства относительно интегральной свертки функций и операции дифференцирования

$$\mathcal{H}\{f * g\} = \mathcal{H}\{f\} \mathcal{H}\{g\}, \quad (13)$$

$$\mathcal{H}\{f\theta^2\} = -\Delta_{k\perp} \mathcal{H}\{f\}, \quad (14)$$

символ «*» означает операцию интегральной свертки функций.

Приближенная непрерывная зависимость коэффициентов x_k от индекса k может оказаться недифференцируемой при $k=0$, в результате чего могут возникнуть затруднения при численном решении уравнения (11).

По этой причине рассмотрим подробнее последнее слагаемое левой части уравнения (8), в состав которого входит интегральная свертка углового распределения яркости с индикатрисой рассеяния на сфере направлений. В случае, когда степень анизотропии индикатрисы рассеяния сильно превышает степень анизотропии тела яркости, допустимо приближенное преобразование рассматриваемого слагаемого к виду, обеспечивающему необходимую регуляризацию уравнения (11). Так, для следующей свертки двух функций одного переменного справедливо преобразование

$$t(f * g) = t \int f(t') g(t-t') dt' = \int (t-t') f(t') g(t-t') dt' + \int t' f(t') g(t-t') dt' = (tf) * g + f * (tg), \quad (15)$$

т.е. рассматриваемая свертка представима в форме суммы двух слагаемых.

Двукратным применением формулы (15) можно показать, что

$$t^2(f * g) = t[(ft) * g + f * (gt)] = (ft^2) * g + 2(ft) * (gt) + f * (gt^2) \approx f * (gt^2), \quad (16)$$

где последнее приближенное равенство имеет место в рассмотренном выше случае. Эта формула непосредственно обобщается на двумерный случай, если

в интегралах свертки на сфере направлений в формулах (1)–(8) и в малоугловом приближении перейти к интегрированию в декартовых координатах $\theta_x = \theta \cos \varphi$, $\theta_y = \theta \sin \varphi$, учитывая, что

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi \approx d\theta_x d\theta_y \text{ и } \theta^2 = \theta_x^2 + \theta_y^2.$$

В случае, когда обе функции f и g имеют выраженный максимум при $t = 0$ и быстро стремятся к нулю при отклонении t от нуля, причем одна из этих функций имеет более широкий максимум, чем другая, соответствующее слагаемое в (15) вносит определяющий вклад в сумму. В частности, при $f = \exp(-at^2)$ и $g = \exp(-bt^2)$ несложно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} t(f * g) &= \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} \exp[-abt^2/(a+b)] = \\ &= a \sqrt{\frac{\pi}{(a+b)^2}} \exp[-abt^2/(a+b)] + \\ &+ b \sqrt{\frac{\pi}{(a+b)^2}} \exp[-abt^2/(a+b)] = \\ &= (tf) * g + f * (tg), \end{aligned} \quad (17)$$

причем при $a \gg b$ $(tf) * g \ll f * (tg)$.

Поскольку уже при распространении оптического излучения на несколько длин свободного пробега угловая ширина тела яркости существенно превышает угловую ширину индикатрисы рассеяния, аналогичными выкладками можно показать:

$$\theta^2(x * L) \approx x * (\theta^2 L), \quad (18)$$

что позволяет приближенно записать уравнение (11) в форме

$$\frac{\partial Z_k}{\partial \tau} = -(1 - \Lambda x_k) \left(1 - \frac{\Delta_{k\perp}}{2}\right) Z_k. \quad (19)$$

Отметим, что если в правой части уравнения (19) пренебречь лапласианом $\Delta_{k\perp}$ (по сравнению с единицей), то оставшееся уравнение полностью соответствует уравнению для функции когерентности поля Γ_{11} в марковском приближении, связь которой с яркостью впервые установлена в [11]. При этом его решением является МУП в форме Goudsmit–Saunderson.

При практической реализации оператор Лапласа $\Delta_{k\perp}$ заменяется конечно-разностной аппроксимацией [12]:

$$\Delta_{k\perp} = \frac{Z_{k-1} - 2Z_k + Z_{k+1}}{h^2} + \frac{Z_{k+1} - Z_{k-1}}{2kh^2}, \quad (20)$$

где h – шаг дискретизации, который в целочисленной схеме равен единице.

Граничные условия для решения уравнения (19) принимались следующие:

$$\left. \frac{\partial Z_k}{\partial k} \right|_{k=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial Z_k}{\partial k} \right|_{k=N} = 0, \quad (21)$$

где N – максимальный номер гармоники в разложении рассеянной части излучения.

Граничное условие при $k = 0$ соответствует граничному условию для корреляционной функции поля. Граничное условие при $k = N$ следует из того, что при $k \rightarrow \infty$ коэффициенты $Z_k \rightarrow e^{-\tau}$, что физически соответствует прямому нерассеянному излучению. Граничное условие при $\tau = 0$ соответствует излучению ПМ-источника нормального падения: $Z_k(\tau = 0) = 1$ при всех k .

Пренебрежение лапласианом в правой части уравнения (19) приводит к традиционному МУП для обыкновенного дифференциального уравнения относительно неизвестных коэффициентов разложения тела яркости Z_k . Решения этой задачи, вообще говоря, не удовлетворяют сформулированным граничным условиям, что соответствует характеру классического МУП. Приближенное выражение для неизвестных коэффициентов Z_k будем искать в классе всюду дифференцируемых функций, в том числе при $k = 0$. Поиск приближенного решения в других классах функций требует формулировки иных граничных условий, что, возможно, привело бы к дальнейшему повышению точности. Однако это связано с рядом аналитических трудностей, что не соответствует сформулированной задаче поиска достаточно простого приближенного решения, хорошо описывающего анизотропную часть решения.

Отметим, что в точном решении краевой задачи (1) присутствует δ -сингулярность по углу визирования, которая представляет собой нерассеянную компоненту прямого излучения ПМ-источника $\delta(1 - \cos \theta) \delta(\varphi) \exp(-\tau)$. При переходе к угловому спектру Z_k в уравнении (19) эта сингулярность соответствует $Z_k \rightarrow \exp(-\tau)$ при $k \rightarrow \infty$.

Подставим конечно-разностную аппроксимацию (20) в уравнение (19) и получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которую представим в матричной форме:

$$\frac{d\vec{Z}}{d\tau} = -\vec{\Lambda} \vec{Z}, \quad (22)$$

где $\vec{Z} = [Z_k]$ – столбец неизвестных коэффициентов;

$\vec{\Lambda}$ – трехдиагональная матрица конечно-разностной аппроксимации правой части уравнения (19), первая и последняя строки которой записываются с учетом граничных условий (21).

Решением уравнения (22) является матричная экспонента, расчет которой не представляет труда. Ниже приведены результаты расчетов для слоя среды с индикатрисой рассеяния Henyey–Greenstein [13] с параметром g . На рис. 1 показаны абсолютные значения функции источников из правой части уравнений [5, (5)–(7)] для трех вариантов анизотропной части яркости.

Нетрудно видеть, что полученное решение обеспечивает наименьшие величины функции источников при больших номерах k . На рис. 2 представлены расчеты тел яркости в передней полусфере для различных значений оптических характеристик среды тремя методами.

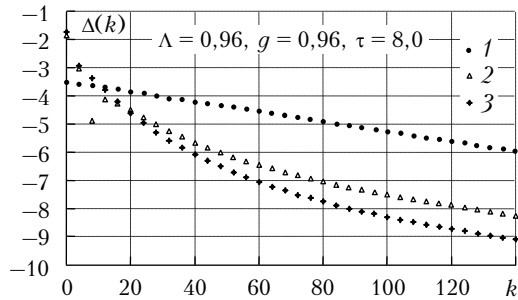


Рис. 1. Абсолютные величины функции источников в уравнении для регулярной части решения из статьи [5] для трех вариантов анизотропной части яркости: 1 – дельта-функция; 2 – классическое МУП; 3 – настоящее решение

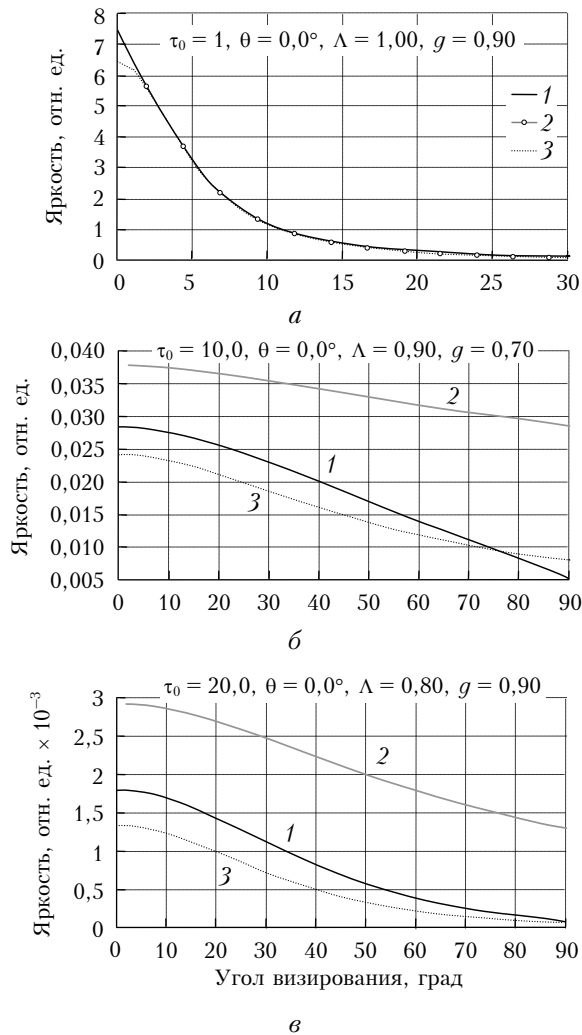


Рис. 2. Сравнение угловых распределений яркости на малой (а), средней (б) и большой (в) оптической глубине: 1 – точное решение [5]; 2 – классическое МУП; 3 – настоящее решение

Отметим, что предложенное в настоящей статье решение практически совпадает с классическим МУП для малых оптических толщин и сильно анизотропного рассеяния, однако с ростом толщины, альбедо однократного рассеяния и сглаживанием индикатрисы рассеяния расхождение МУП с точным решением увеличивается, в то время как предложенное решение мало отличается от точного.

При решении задач оптики мутных сред со значительными оптическими толщинами (океан, облака) предлагаемое решение вследствие простой аналитической формы и высокой точности может иметь самостоятельное применение.

1. Wang M.C., Guth E. On the Theory of Multiple Scattering, Particularly of Charged Particles // Phys. Rev. 1951. V. 84. N 6. P. 1092–1111.
2. Stamnes K., Swanson R.A. A new look at the discrete ordinate method for radiative transfer calculation in anisotropically scattering atmosphere // J. Atmos. Sci. 1981. V. 38. N 2. P. 387–399.
3. Wiscombe W.J. The Delta-M method: rapid yet accurate radiative flux calculations for strongly asymmetric phase functions // J. Atmos. Sci. 1977. V. 34. N 9. P. 1408–1422.
4. Yokota T., Oguma H., Morino I., Inoue G. A nadir-looking ‘SWIR’ sensor to monitor CO₂ column density for Japanese ‘GOSAT’ project // Proc. of the Twenty-Fourth International Symposium on Space Technology and Science (Japan Society for Aeronautical and Space Sciences and ISTS, Miyazaki), 2004. P. 887.
5. Budak V.P., Korkin S.V. On the solution of a vectorial radiative transfer equation in an arbitrary three-dimensional turbid medium with anisotropic scattering // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer. 2008. V. 109. N 2. P. 220–234.
6. Goudsmit S., Saunderson J.L. Multiple Scattering of Electrons // Phys. Rev. 1940. Pt. I. V. 57. P. 24–29; Pt. II. V. 58. P. 36–42.
7. Исмаилов А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.: Мир, 1981. Т. 1. 280 с.; Т. 2. 320 с.
8. Ремизович В.С., Рогозкин Д.Б., Рязанов М.И. Распространение светового сигнала в веществе с крупномасштабными случайными неоднородностями с учетом флуктуации путей фотонов при многократном рассеянии // Изв. АН СССР. Физ. атмосф. и океана. 1982. Т. 18. № 6. С. 623–631.
9. Долин Л.С. О прохождении импульсного светового сигнала через поглощающую среду с анизотропным рассеянием // Изв. вузов. Радиофиз. 1983. Т. 26. № 3. С. 300–309.
10. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965. 588 с.
11. Долин Л.С. О лучевом описании слабо-неоднородных волновых полей // Изв. вузов. Радиофиз. 1964. Т. 7. № 3. С. 559–562.
12. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
13. Henyey L.G., Greenstein J.L. Diffuse radiation in the galaxy // Astrophys. J. 1941. V. 93. N 1. P. 70–83.

V.P. Budak, Ya.A. Ilyushin. Development of small angle approximation of radiative transfer theory taking into account the photon path distribution function.

The development of the small angle approximation (SA) of the radiative transfer equation (RTE) solution for the slab taking into account the photon path distribution function in the forward hemisphere of sighting directions is offered. The solution is based on the expansion of the sighting angle cosine in Taylor series with maintenance of two first terms without RTE conversion to the diffusion approximation. The obtained solution practically coincides with the exact solution in the forward hemisphere of directions up to the deep regime.