

## Об одном вариационном методе восстановления волнового фронта по измерениям датчика Шака–Гартмана

А.В. Разгулин, Е.Ж. Кужамалиев, А.С. Гончаров, А.В. Ларичев\*

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова  
119991, г. Москва, Ленинские Горы

Поступила в редакцию 25.08.2016 г.

На основе решения вариационной задачи предложен новый метод восстановления волнового фронта по его измеренным градиентам. Получена пространственно-частотная передаточная функция реконструктора. Методами численного моделирования изучена точность восстановления при различных пространственных спектрах искажений волнового фронта, проанализирована чувствительность реконструктора при потере данных в некоторых узлах измерительной сетки.

*Ключевые слова:* восстановление волнового фронта, наклон волнового фронта, датчик Шака–Гартмана, функционал невязки, вариационный метод, пространственно-частотная характеристика; wavefront reconstruction, wavefront slope, Shack–Hartmann sensor, discrepancy functional, variational method, spatial-frequency response.

### Введение

В настоящее время методы адаптивной оптики находят все больше различных областей применения, в том числе при создании сверхмощных лазеров [1], диагностических медицинских систем [2–4] и наземных телескопов [5]. Кроме того, методы, изначально применявшиеся для измерения атмосферных турбулентных искажений, к примеру метод Шака–Гартмана [6], начинают использоваться в прецизионной метрологии [7]. Принцип работы датчика волнового фронта Шака–Гартмана состоит в разбиении волнового фронта набором (матрицей) микролинз на соответствующее количество субапертур, в пределах каждой из которых измеряется средний наклон волнового фронта. Для измерения среднего наклона применяют непосредственное определение смещения фокального пятна в фокусе микролинзы методом центроидов [8, 9] или Фурье-демодуляцию гартмановских картин [10, 11].

Таким образом, непосредственно измеряемой величиной для датчика Шака–Гартмана являются средние наклоны по субапертурам, т.е. градиенты волнового фронта. По этим данным необходимо реконструировать измеряемый волновой фронт [12]. Современные датчики типа Шака–Гартмана состоят из большого числа микролинз, их количество может превышать 10000, что позволяет измерять искажения

с широким пространственным спектром с точностью на уровне  $1/100$  длины волны. Однако точность восстановления фазы значительно падает при измерительной апертуре сложной формы и потере данных в некоторых точках (например, в условиях сцинтилляций). Вместе с тем крайне желательно, чтобы восстановление (реконструкция) волнового фронта производилось за приемлемое для конкретного приложения время. Решение данного комплекса задач является крайне актуальным, что привлекает внимание исследователей [11, 13].

В настоящей работе предложен новый метод реконструкции волнового фронта, основанный на вариационном подходе. Получена пространственно-частотная передаточная функция метода, с помощью численного моделирования изучена точность восстановления при различных пространственных спектрах искажений волнового фронта и проанализирована чувствительность метода при потере данных в некоторых узлах сетки.

### 1. Описание вариационного метода

В вариационном методе задача восстановления волнового фронта формулируется в виде задачи минимизации целевого функционала  $J(u)$  среднеквадратичной невязки между наблюдаемыми наклонами волнового фронта  $g_1(x, y)$ ,  $g_2(x, y)$  в пределах квадратной апертуры  $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  со стороны длины  $2\pi$  и соответствующими производными волнового фронта  $u_x(x, y)$ ,  $u_y(x, y)$ :

$$J(u) = \iint_{\Omega} ((u_x - g_1)^2 + (u_y - g_2)^2 + \alpha u^2) dx dy. \quad (1)$$

\* Александр Витальевич Разгулин (razgulin@cs.msu.ru);  
Ернур Жаскайратович Кужамалиев (ernur\_kuz@mail.ru);  
Алексей Сергеевич Гончаров (goncharov@bk.ru); Андрей  
Викторович Ларичев (larichev@optics.ru).

Заметим, что стабилизирующее слагаемое с множителем  $\alpha > 0$  в (1) обеспечивает наименьшую среднеквадратичную норму волнового фронта, устраняя тем самым неоднозначность его восстановления. Учитывая возможную негладкость восстанавливаемого фронта, в качестве множества допустимых функций берется соболевское пространство  $H_{2\pi}^1(\Omega)$   $2\pi$ -периодических по каждому направлению функций. В этом случае равенство нулю первой вариации функционала приводит к интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \langle u_x, \phi_x \rangle_\Omega + \langle u_y, \phi_y \rangle_\Omega + \alpha \langle u, \phi \rangle_\Omega = \\ = \langle g_1, \phi_x \rangle_\Omega + \langle g_2, \phi_y \rangle_\Omega, \end{aligned} \quad (2)$$

которому должен удовлетворять искомый волновой фронт  $u(x, y)$  для произвольных функций  $\phi \in H_{2\pi}^1(\Omega)$ . Здесь и ниже используется обозначение скалярного произведения  $\langle u, v \rangle_\Omega = \iint_\Omega uv \, dx dy$ .

Поскольку при восстановлении волнового фронта доступными являются данные о средних по субапертурам наклонах волнового фронта, то необходимо перейти от континуальной формулировки (2) к ее дискретному варианту на основе проекций на соответствующие конечномерные подпространства допустимого множества  $H_{2\pi}^1(\Omega)$ . В данной работе мы ограничимся рассмотрением подпространства  $S_{2\pi}^1$  кусочно-линейных по каждому направлению сплайнов, являющихся линейными комбинациями функций  $\phi_{k,l}(x, y) = \phi_k(x)\phi_l(y)$ ,  $k = 0, \dots, N_1 - 1$ ,  $l = 0, \dots, N_2 - 1$ , причем  $\phi_k(x) = \max(0, 1 - |x - kh_1|/h_1)$ ,  $k = 1, \dots, N_1 - 1$ ,  $\phi_0(x) = \phi_1(x + h_1) + \phi_1(x + h_1 - 2\pi)$  и аналогично для  $\phi_l(y)$ ,  $h_j = 2\pi/N_j$ ,  $j = 1, 2$ . Представляя далее искомый волновой фронт в виде конечной суммы  $u^h(x, y) = \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{l=0}^{N_2-1} u_{kl} \phi_{kl}(x, y)$  и ограничиваясь в (2) пробными функциями из подпространства  $S_{2\pi}^1 \subset H_{2\pi}^1(\Omega)$ , приходим к матричному уравнению для матрицы коэффициентов  $u = \{u_{kl}\}$ :

$$B_2 \Lambda_1 u + B_1 \Lambda_2 u + \alpha B_1 B_2 u = F^1 + F^2, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} F_{kl}^1 &= \frac{1}{h_1^2 h_2} \int_{y_{l-1}}^{y_{l+1}} \phi_l(y) \int_{x_{k-1}}^{x_k} (g_1(x, y) - g_1(x + h_1, y)) \, dx dy, \\ F_{kl}^2 &= \frac{1}{h_1 h_2^2} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \phi_k(x) \int_{y_{l-1}}^{y_l} (g_2(x, y) - g_2(x, y + h_2)) \, dy dx. \end{aligned}$$

Матрицы  $B_j$ ,  $\Lambda_j$  задаются с помощью матриц Грама [14] рассматриваемых сплайнов и их градиентов:

$$h_{kl} = \frac{\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{l^2}\right) \lambda_k \lambda_l}{\mu_l \lambda_k + \mu_k \lambda_l + \alpha \mu_k \mu_l} = \frac{\frac{16}{h_1^2 h_2^2} \sin^2 \frac{kh_1}{2} \sin^2 \frac{lh_2}{2} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{l^2}\right)}{\frac{1}{3} \left[ \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{kh_1}{2} (2 + \cos lh_2) + \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{lh_2}{2} (2 + \cos kh_1) \right] + \frac{\alpha}{9} (2 + \cos kh_1)(2 + \cos lh_2)}$$

$$\Lambda_j = \frac{1}{h_j^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$B_j = E_j - \frac{h_j^2}{6} \Lambda_j,$$

$E_j$  — единичная матрица соответствующей размерности,  $j = 1, 2$ .

Отметим, что в правой части (3) используются средние значения наклонов по прямоугольникам вида  $[x_k, x_{k+1}] \times [y_l, y_{l+1}]$ , где  $x_k = kh_1$ ,  $y_l = lh_2$ ,  $k = 0, \dots, N_1 - 1$ ,  $l = 0, \dots, N_2 - 1$ . Схема (3) записывается на девятиточечном шаблоне, входящие в ее определение операторы являются трехдиагональными по каждой переменной. Поскольку сеточная функция  $\exp\{ikx\}(\exp\{ily\})$  является собственной для оператора  $\Lambda_1(\Lambda_2)$  с соответствующими собственными значениями  $\lambda_k = \frac{4}{h_1^2} \sin^2\left(\frac{kh_1}{2}\right)$ ,  $k = 0, \dots, N_1 - 1$  ( $\lambda_l = \frac{4}{h_2^2} \sin^2\left(\frac{lh_2}{2}\right)$ ,  $l = 0, \dots, N_2 - 1$ ), то же верно и для операторов  $B_{1,2}$  и соответствующих собственных значений  $\mu_k = 1 - \frac{h_1^2}{6} \lambda_k$ ,  $k = 0, \dots, N_1 - 1$  ( $\mu_l = 1 - \frac{h_2^2}{6} \lambda_l$ ,  $l = 0, \dots, N_2 - 1$ ). Эти свойства позволяют эффективно реализовать решение уравнения (3) методом быстрого дискретного преобразования Фурье.

## 2. Пространственно-частотная характеристика

Исследуем пространственно-частотные характеристики (ПЧХ) вариационной схемы (2), (3), рассматривая в качестве восстанавливаемого волнового фронта гармонику  $e_{kl}(x, y) = \exp\{i(kx + ly)\}$ . Тогда  $g_1 = (e_{kl})_x = ik \cdot e_{kl}$ ,  $g_2 = (e_{kl})_y = il \cdot e_{kl}$ . Непосредственные вычисления показывают, что при  $\phi = \phi_{nm}(x, y)$ ,  $k, l \neq 0$  правая часть (2) принимает вид

$$\begin{aligned} \langle g_1, \phi_x \rangle_\Omega &= h_1 h_2 \frac{\lambda_k \lambda_l}{l^2} e_{kl}(x_n, y_m), \\ \langle g_2, \phi_y \rangle_\Omega &= h_1 h_2 \frac{\lambda_k \lambda_l}{k^2} e_{kl}(x_n, y_m). \end{aligned}$$

В этом случае в силу (2), (3) восстанавливаемый вариационной схемой волновой фронт имеет вид  $u(x, y) = h_{kl} e_{kl}(x, y)$ , где множитель  $h_{kl}$ , характеризующий относительную амплитуду восстановленной гармоники  $e_{kl}(x, y)$ , находится из формулы

Для случая равномерной сетки ( $h = h_1 = h_2$ ) после замены  $\omega_k = kh$ ,  $\omega_l = lh$  имеем

$$h_{kl} = \frac{12 \sin^2 \frac{\omega_k}{2} \sin^2 \frac{\omega_l}{2} \left( \frac{1}{\omega_k^2} + \frac{1}{\omega_l^2} \right)}{\sin^2 \frac{\omega_k}{2} (2 + \cos \omega_l) + \sin^2 \frac{\omega_l}{2} (2 + \cos \omega_k) + \frac{\alpha h^2}{12} (2 + \cos \omega_k) (2 + \cos \omega_l)}$$

Если же, например,  $k \neq 0$ ,  $l = 0$ , то

$$h_{k0} = \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \alpha \mu_k} = \frac{\sin^2 \frac{\omega_k}{2}}{\sin^2 \frac{\omega_k}{2} + \frac{h^2 \alpha}{12} (2 + \cos \omega_k)}$$

На рис. 1 изображена пространственно-частотная характеристика – матрица  $H = \{h_{kl}\}$  – с нормированными координатами  $f_k = \omega_k/2\pi$ ,  $f_l = \omega_l/2\pi$ .

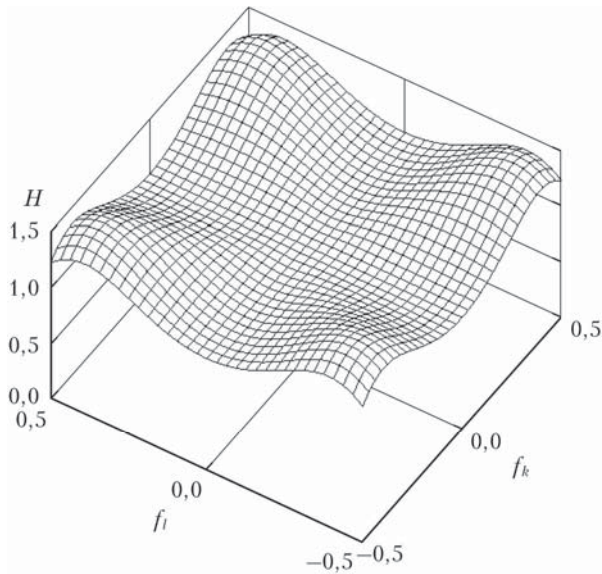


Рис. 1. Поверхность ПЧХ вариационного метода

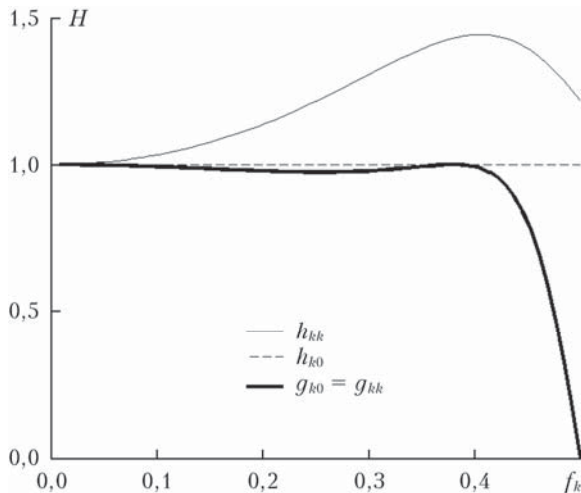


Рис. 2. Сечения ПЧХ вариационного метода (сплошная и пунктирная линии) и метода Симпсона [13] (жирная линия)

На рис. 2 показаны сечение  $h_{k0}$  пространственно-частотной характеристики вдоль направления  $k$  и сечение  $h_{kk}$  вдоль диагонали первой четверти координат.

### 3. Реализация метода и результаты численных экспериментов

Для численной реализации вариационного метода мы использовали его упрощенный вариант, когда значения наклонов известны только в узлах  $(x_k, y_l)$  расчетной сетки, а в остальных точках апертуры используются кусочно-линейные интерполяции

$$g_m(x, y) = \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{l=0}^{N_2-1} g_m(x_k, y_l) \phi_k(x) \phi_l(y), \quad m = 1; 2.$$

В этом случае правая часть (2) принимает вид  $F = B_2 G_1 g_1 + B_1 G_2 g_2$ , где

$$G_j = \frac{1}{2h_j} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$j = 1, 2.$$

Отметим, что выбранный кусочно-линейный способ восполнения данных позволил одновременно естественным образом решить проблему «выбитых» точек, когда данные о наклонах недоступны в некоторых точках измерительной сетки.

Для численного расчета использовалась сетка размером  $128 \times 128$  точек. Исходный волновой фронт формировался двумя способами: набором полиномов Цернике и случайным сигналом, пропущенным через фильтр Баттерворта [15] с заданными значениями порядка фильтра  $n$  и частоты среза  $f_c$ . Далее вычислялась матрица локальных наклонов, на которую накладывалась маска, формирующая круглую апертуру, состоящую из  $P = 12870$  точек. При необходимости с помощью той же маски имитировалась потеря данных в отдельных точках внутри апертуры. После этого проводились реконструкция волнового фронта разработанным методом и сравнение его с исходными значениями фазы в узлах расчетной сетки. Амплитуды исходного и реконструированного волновых фронтов оценивались по их среднеквадратичному отклонению от плоского волнового фронта. Среднеквадратичная ошибка реконструкции измерялась в процентах от амплитуды исходного волнового фронта и рассчитывалась по формуле

$$\sigma = \frac{\sqrt{\frac{1}{P} \sum (u(x_k, y_l) - g(x_k, y_l) - \overline{u(x_k, y_l) - g(x_k, y_l)})^2}}{\sqrt{\frac{1}{P} \sum (u(x_k, y_l) - \overline{u(x_k, y_l)})^2}} \cdot 100\%.$$

Для оценки точности восстановления волнового фронта с различными пространственными неоднородностями фазы был использован следующий метод. Исходный волновой фронт формировался случайным сигналом, пропущенным через фильтр Баттерворта второго, четвертого и десятого порядков, и снималась зависимость  $\sigma$  от частоты среза  $f_c$  (рис. 3).

В данных экспериментах частота среза нормировалась на частоту Найквиста  $f_N$ .

Также была проведена оценка влияния потери данных на точность реконструкции волнового фронта. На рис. 4 представлена зависимость  $\sigma$  от количества  $M$  точек с потерянными данными, исключенных из расчета случайным образом.

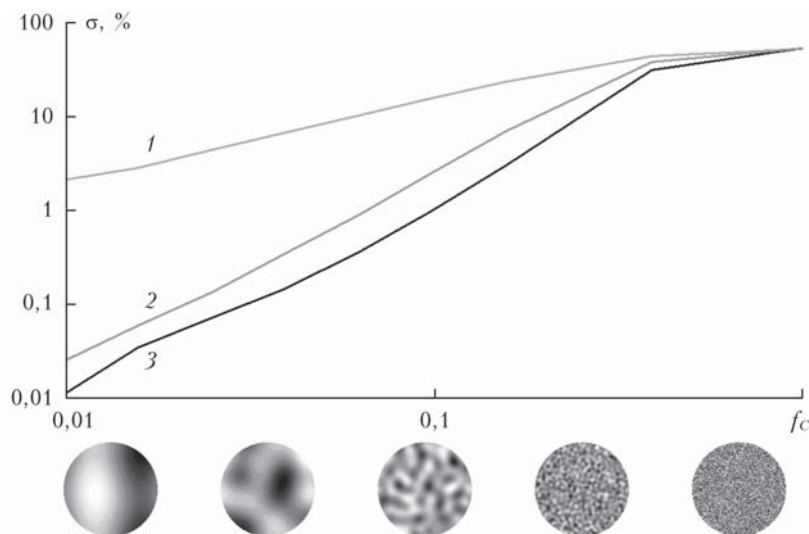


Рис. 3. Зависимость среднеквадратичной ошибки  $\sigma$  реконструкции волнового фронта, сформированного случайным сигналом, пропущенным через фильтр Баттерворта второго, четвертого и десятого порядков (кривые 1, 2, 3 соответственно), от частоты среза  $f_c$  (выраженной в долях частоты Найквиста) и примеры исходного волнового фронта (фильтр 10-го порядка) при значениях частоты среза, равных 0,01; 0,033; 0,1; 0,33 и 1

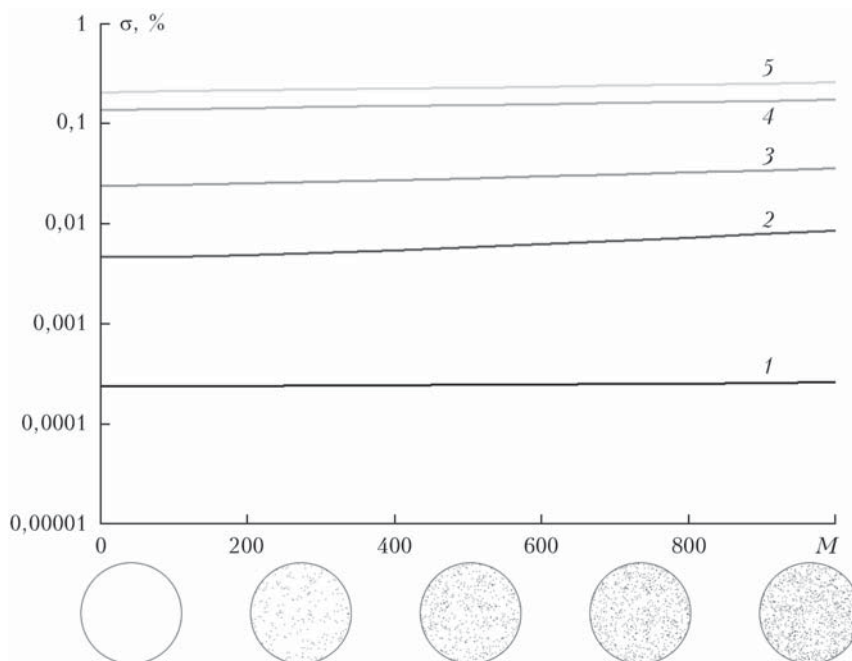


Рис. 4. Зависимость среднеквадратичной ошибки  $\sigma$  реконструкции волнового фронта от количества  $M$  точек с потерянными данными, исключенных из расчета случайным образом, для aberrаций второго (астигматизм и дефокус, кривая 1), третьего (кома и трилистник, 2), четвертого (3), пятого (4) и шестого (5) порядков и примеры маски при значениях  $M$ , равных 0; 250; 500; 750 и 1000

## Заключение

Как видно из результатов численных экспериментов, предложенный метод обеспечивает хорошую точность (0,001–0,2% от среднеквадратичной величины фазовых искажений) реконструкции волнового фронта в широком диапазоне пространственных частот. Анализ результатов, приведенных на рис. 3, показывает, что при реконструкции с высокой точностью необходимо ограничить диапазон пространственных частот значением порядка  $0,1f_N$ . Кроме того, заметно, что точность восстановления практически не увеличивается при увеличении порядка фильтра, начиная с частот приблизительно  $0,8f_N$ . Данный факт говорит о том, что при этих условиях ошибка восстановления обусловлена не столько эффектом наложения частот (алайзинг), сколько особенностями ПЧХ реконструктора. В связи с этим интересно сравнить ПЧХ разработанного реконструктора с ПЧХ реконструктора Симпсона [13] (жирная кривая на рис. 2). Как видно из графиков, ПЧХ реконструктора Симпсона имеет заметный спад на высоких пространственных частотах, но не имеет выброса по диагональному направлению. Таким образом, разработанный реконструктор может несколько подчеркивать отдельные компоненты пространственных частот, что дает свой вклад в ошибку восстановления. В этом плане имеет смысл обобщить разработанный метод на случай гексагональных сеток, что может положительно сказаться на однородности ПЧХ по различным направлениям. К достоинству вариационного метода следует отнести возможность его применения в случае зашумленных измерений наклонов, поскольку эти данные усредняются по ячейкам схемы, снижая тем самым влияние шума. Наличие «выбитых» точек на измерительной сетке оказывает незначительное влияние на ошибку восстановления даже при их числе порядка 10% от общего количества (см. рис. 4). Кроме того, как следует из анализа ПЧХ, в случае  $\alpha \ll 1$  волновые фронты, имеющие наклоны только по одной из осей, могут быть восстановлены сколь угодно точно. Поскольку вариационный метод является прямым (итерации не используются), то он является более устойчивым к погрешностям вычислений и допускает реализацию с использованием быстрого преобразования Фурье. В то же время метод Симпсона использует более точный шаблон, что дает лучший порядок аппроксимации на гладких волновых фронтах, однако требует множества итераций при вычислениях. Этот факт

следует учитывать в приложениях, требующих получение результатов в режиме реального времени.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 15-29-03895 офи\_м и 15-29-03896 офи\_м.

1. Шанин О.И. Адаптивные оптические системы в импульсных мощных лазерных установках. М.: Техносфера, 2012. 200 с.
2. Porter J., Queener H., Lin J., Thorn K., Atwal A.A.S. Adaptive optics for vision science. Wiley-Interscience, 2006. 628 p.
3. Goncharov A.S., Iroshnikov N.G., Larichev A.V., Nikolaeov I.P. The impact of speckle on the measurement of eye aberrations // J. Modern Optics. 2015. V. 62, N 21. P. 1775–1780.
4. Liang J., Grimm B., Goetz S., Bille J.F. Objective measurement of wave aberrations of the human eye the use of a Hartmann–Shack wavefront sensor // J. Opt. Soc. Amer. A. 1994. V. 11, N 7. P. 1949–1957.
5. Антошкин Л.В., Ботыгина Н.Н., Емалеев О.Н., Ковадло П.Г., Коняев П.А., Лукин В.П., Петров А.И., Янков А.П. Адаптивная оптическая система с корреляционным датчиком смещения изображения // Оптика атмосф. и океана. 2002. Т. 15, № 11. С. 1027–1030.
6. Platt B.C., Shack R. History and principles of Shack–Hartmann wavefront sensing // J. Refract. Surg. 2001. V. 17, N 5. P. S573–S577.
7. Chernyshov A., Sterr U., Riehle F., Helmcke J., Pfund J. Calibration of a Shack–Hartmann sensor for absolute measurements of wavefronts // Appl. Opt. 2005. V. 44, N 30. P. 6419–6425.
8. van Dam M.A., Lane R.G. Wave-front slope estimation // J. Opt. Soc. Amer. A. 2000. V. 17, N 7. P. 1319–1324.
9. Sallberg S.A., Welsh B.M., Roggemann M.C. Maximum a posteriori estimation of wave-front slopes using a Shack–Hartmann wave-front sensor // J. Opt. Soc. Amer. 1997. V. 14, N 6. P. 1347–1354.
10. Carmon Y., Ribak E.N. Phase retrieval by demodulation of a Hartmann–Shack sensor // Opt. Commun. 2003. V. 215, N 4. P. 285–288.
11. Talmi A., Ribak E.N. Direct demodulation of Hartmann–Shack patterns // J. Opt. Soc. Amer. A. 2004. V. 21, N 4. P. 632–639.
12. Southwell W. Wave-front estimation from wave-front slope measurements // J. Opt. Soc. Amer. 1980. V. 70, N 8. P. 998–1006.
13. Balik S.W. Highly accurate wavefront reconstruction algorithms over broad spatial-frequency bandwidth // Opt. Express. 2011. V. 19, N 20. P. 18997–19014.
14. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с.
15. Хьюлсман Л.П., Аллен Ф.Е. Введение в теорию и расчет активных фильтров: Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1984. 384 с.

*A.V. Razgulin, E.Zh. Kuzhmaliev, A.S. Goncharov, A.V. Larichev. On a variational method of retrieval the wavefront from Shack–Hartman sensor measurements.*

New method for wavefront reconstruction from measured gradients is proposed on the basis of the solution of variational problem. Spatial frequency transfer function is obtained for its reconstructor. Accuracy of the restoration is studied, by methods of numerical modeling, at different spatial spectra of wavefront distortions. Reconstructor sensitivity is analyzed in the case of data loss in some nodes of measuring grid.