«Оптика атмосферы», **4**, № 12 (1991)

УДК 638.56+535

И.Е. Тельпуховский, С.С. Чесноков

МОДАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АТМОСФЕРНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ПРИ ЧИСЛЕННОМ АНАЛИЗЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СВЕТОВОГО ПУЧКА

Предлагается методика формирования пространственных случайно-неоднородных полей показателя преломления турбулентной атмосферы. На примере задачи об уширении и случайных блужданиях пучка малой мощности показано, что удовлетворительная точность прогнозирования его энергетических характеристик может быть достигнута без больших вычислительных затрат.

Проблема компенсации нелинейных и турбулентных искажений световых пучков при распространении в атмосфере представляет большой практический интерес. Возможности аналитического исследования задач нелинейной статистической оптики сравнительно невелики из-за ограничений на статистику поля показателя преломления, уровень его флуктуаций, интенсивность излучения. В связи с этим в настоящее время предъявляются высокие требования к достоверности численного прогнозирования статистики энергетических характеристик светового поля в плоскости наблюдения. В свою очередь, адекватность описания атмосферных неоднородностей на расчетной сетке во многом определяется используемой моделью. В настоящей статье предлагается уточненная модель, позволяющая расширить спектр неоднородностей в низкочастотную пространственную область.

Спектральный метод моделирования атмосферных неоднородностей

Распространение светового пучка в случайно-неоднородной нелинейной среде описывается системой уравнений

$$2i\,\frac{\partial E}{\partial z} = \Delta_\perp E + \tilde{\varepsilon} E + R_0 T E,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} + (\tilde{\mathbf{V}}\Delta)T = EE^*,$$

где $\tilde{\varepsilon}$ — естественные флуктуации диэлектрической проницаемости среды со спектральной плотностью $\Phi_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\varkappa)$; R_0 — параметр нелинейности, определяемый усредненной скоростью среды; $\tilde{\mathbf{V}}$ — случайное поле скоростей. Основным методом решения подобных задач является численный анализ, который позволяет провести исследования в труднодоступной для аналитических расчетов области параметров.

Применение численных методов решения дифференциальных уравнений предполагает замену непрерывных полей на их дискретные аналоги, заданные в узлах расчетной сетки. Возможности ЭВМ ограничивают число узлов сетки и, соответственно, размер расчетной сетки L. Дискретизация в области пространственных и спектральных переменных накладывает определенные ограничения на моделируемые физические поля E, $\tilde{\varepsilon}$.

Наиболее существенная трудность при моделировании поля диэлектрической проницаемости связана с широким диапазоном размеров неоднородностей в турбулентной атмосфере. Наименьший характерный масштаб изменения спектральной плотности флуктуаций есть $\varkappa_0 = \dfrac{2\pi}{L}$. В дискретном спектре гармоники располагаются с шагом $\dfrac{2\pi}{L}$, где L — размер области, на которой моделируется поле. Чтобы воспроизвести изменение спектра на масштабе $\varkappa_0$, нужно по крайней мере несколько гармоник. Это ограничение в области низких частот приводит к тому, что реально на сетке воспроизводится случайное поле с меньшим внешним масштабом. Зависимости «эффективного» внешнего масштаба $L_{эф}$, воспроизводимого на сетке, от числа узлов разбиения M и соотношения L/a_0, рассчитанные методом статистических испытаний по дисперсии смещения центра тяжести пучка, хорошо иллюстрируют это ограничение в области низких частот (рис. 1).

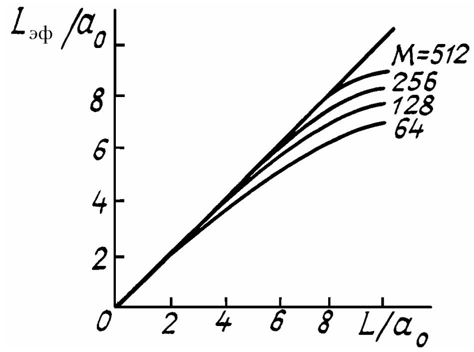

Рис. 1. Зависимости «эффективного» внешнего масштаба от числа узлов разбиения и соотношения L/a_0

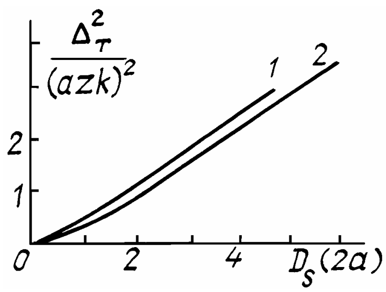

Рис. 2. Турбулентное уширение Δ_τ^2 в зависимости от структурной функции фазы сферической волны: *1* — аналитическая оценка; *2* — метод статистических испытаний

В области высоких частот ограничения пространственного спектра можно оценить в предположении, что моделируемый спектр $\Phi_\varepsilon^{\mathrm{M}}(\varkappa)$ флуктуаций $\tilde{\varepsilon}$ обрывается на частоте Найквиста расчетной сетки, а именно при $\varkappa_N = \pi/\Delta x$, т.е.

$$\Phi_\varepsilon^{\mathrm{M}}(\varkappa) = \begin{cases} 0.33C_\varepsilon^2\varkappa^{-11/3}\exp(-x^2/x_{\mathrm{M}}^2) & \text{при } \varkappa \le \varkappa_{\mathrm{N}} \\ 0 & \text{при } \varkappa > \varkappa_{\mathrm{N}}. \end{cases}$$

Рассмотрим дисперсию флуктуаций уровня плоской волны σ_x^2. В случае модифицированного Колмогоровского спектра [1]

$$\sigma_\varkappa^{(\mathrm{M})2} = \frac{\pi^2 z^3}{12} \cdot 0.033C_\varepsilon^2 \cdot 0.4639\varkappa_{\mathrm{M}}^{7/3}\mu\left(\frac{\varkappa_{\mathrm{N}}}{\varkappa_{\mathrm{M}}}\right),$$

$$\mu = \mu\left(\frac{\varkappa_{\mathrm{N}}}{\varkappa_{\mathrm{M}}}\right) = \gamma(7/6,\ \varkappa_{\mathrm{N}}^2/\varkappa_{\mathrm{M}}^2)/\Gamma(7/6),$$

где $\gamma(\alpha, \beta)$ — неполная гамма-функция. Влияние конечности полосы частот модели определяется множителем μ. При $\varkappa_N/\varkappa_M \ge 2$ $\mu \simeq 0{,}98$. Отсюда, воспользовавшись тем, что $\varkappa_{\mathrm{M}} = 5{,}92/l_0$, получаем $l_0/\Delta x \ge 4$. Таким образом, в области высоких частот диапазон воспроизведения спектра ограничен и составляет примерно половину частоты Найквиста.

Модальное представление атмосферных неоднородностей

Ниже предлагается эффективный метод формирования случайных полей на основе модального представления атмосферных неоднородностей. Наиболее точно такое представление может быть построено на функциях Карунена-Лоэва, имеющих некоррелированные коэффициенты разложения [2], но табличная форма записи и трудоемкость их вычисления приводит к тому, что на практике их обычно заменяют на ортонормированные полиномы Цернике [3].

Для моделирования случайного возмущения фазы $\tilde{\psi}(r, \vartheta)$ на участке Δz воспользуемся представлением ее в виде разложения по полиномам $z_j(\rho,\ \vartheta)$ в пределах некоторой апертуры радиуса R:

$$\tilde{\psi}(\rho,\ \vartheta) = \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\, Z_j(\rho,\ \vartheta),\quad \rho = r/R,$$

где случайные коэффициенты $\tilde{\alpha}_j$ будем считать распределенными по нормальному закону с нулевым средним и дисперсией, определяемой атмосферными условиями на трассе. Для колмогоровского спектра $\tilde{\alpha}_j$ связаны со структурной характеристикой флуктуаций показателя преломления C_n^2 через фридовский радиус корреляции флуктуаций фазы r_0 [2]:

$$\langle\tilde{\alpha}_j\rangle = a_j^2\left(\frac{2R}{r_0}\right)^{5/3},$$

где $r_0 = 1,68(C_n^2 k^2 \Delta z)^{-3/5}$, a_j — весовые множители.

Для определения радиуса апертуры разложения R воспользуемся естественным предположением о том, что при описании случайных блужданий пучка достаточно ограничиться первыми полиномами (j = 2, 3) в разложении фазы. Тогда

$$\tilde{\psi} = \tilde{\alpha}_2 x + \tilde{\alpha}_3 y. \tag{1}$$

Дисперсия случайных чисел $\tilde{\alpha}_2$ и $\tilde{\alpha}_3$ определяется выражением

$$\sigma_{2,3}^2 = 13{,}5 k^3 C_n^2 a_0^4 R^{-1/3} \Delta z.$$

Пусть световой пучок на трассе последовательно проходит N эквидистантно расположенных статистически независимых фазовых экранов. Случайный угол наклона волнового фронта на i-м экране согласно (1) равен $\beta_i = 2\tilde{\alpha}_2^{(i)} / kR$. Среднее значение $\langle \beta_i \rangle = 0$, а его дисперсия $\langle \beta_i^2 \rangle = \dfrac{4\langle \alpha_2^2 \rangle}{k^2 R^2}$. Для однородной турбулентности дисперсию наклона можно представить в виде $\langle \beta_i^2 \rangle = A \dfrac{z}{N}$, где $A = 5,35 a_2^2 C_n^2 R^{-1/3}$ — константа, не зависящая от расстояния и числа экранов.

В плоскости $N\Delta z$ смещение $\rho N = \Delta z(\beta_1 + (\beta_1 + \beta_2) + \ldots + (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_N))$, а среднеквадратическое отклонение пучка равно

$$\sigma^2 = A z^3 S_N, \text{ где } S_N = \frac{1}{N^3} + \frac{2^2}{N^3} + \ldots + \frac{N^2}{N^3}.$$

При $N \to \infty$, что соответствует непрерывно стратифицированной турбулентной среде, $S_N = \dfrac{1}{3}$, или

$$\sigma^2 = \frac{\Delta z^3}{3} A. \tag{2}$$

Сравнивая выражение (2) с выражением для дисперсии смещения центра тяжести пучка, полученным в [4] для Колмогоровского спектра, можно получить, что $R = a_0/2$.

Результаты численного моделирования

Предлагаемая модель апробирована на задаче об уширении и случайных блужданиях пучка в турбулентной атмосфере. Результаты расчетов приведены на рис. 2. Здесь $\Delta_т^2 = a_{эф}^2 - a_д^2$, где $a_{эф}^2$ — квадрат эффективной ширины пучка, $a_д^2$ — квадрат дифракционной ширины коллимированного пучка. Относительное турбулентное уширение приведено в зависимости от параметра $D_s(2a)$, характеризующего турбулентность атмосферы на трассе. Отклонение результатов численного эксперимента связано с тем, что при моделировании случайного поля показателя преломления на основе модального представления мы ограничились 5-ю членами ряда разложения.

Таким образом, предложена модель формирования пространственных случайно-неоднородных полей показателя преломления турбулентной атмосферы, которая позволяет существенно расширить их спектр в область низких частот. Ее реализация сводится к построению случайного набора чисел с заданным коэффициентом корреляции, а не моделированию на всей области случайного поля с заданной корреляционной функцией, что позволяет существенно сократить вычислительные затраты.

1. Кандидов В.П., Леденев В.И. //Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24. № 4. С. 438.
2. Wang I.Y., Markey J.K. //JOSA. 1978. V. 68. № 1. P. 78.
3. Noll J. //JOSA. 1976. V. 66. № 3. P. 207.
4. Кон А.И., Миронов В.Л., Носов В.В. //Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17. № 10. С. 1501.

Московский госуниверситет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
2 октября 1991 г.

I.E. Telpukhovskii, S.S. Chesnokov. **Modal Representation of Atmospheric Inhomogeneities for Numerical Analysis. of the Light Beam Statistical Characteristics.**

A method of generation of the spatial randomly-inhomogeneous field of the refractive index of the turbulent atmosphere is proposed. Using the solution of the problem on the divergence and random wandering of the low-power beam as an example it is shown that the satisfactory accuracy for prediction of the beam power characteristics may be achieved without considerable computational efforts.