«Оптика атмосферы и океана», **5**, № 5 (1992)

АДАПТИВНАЯ ОПТИКА

УДК 535.317.1

**П.А. Бакут, А.А. Пахомов, А.Д. Ряхин**

# МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ФАЗОВОЙ ПРОБЛЕМЫ ПРИ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ ЧАСТЬ I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ФАЗОВОЙ ПРОБЛЕМЫ

Проведен теоретический анализ фазовой проблемы и рассмотрены алгоритмы ее практического решения.

Рассмотрены вопросы однозначности решения фазовой проблемы в одномерном и многомерном случаях. Для двумерного дискретного случая разработан новый метод построения всех решений.

Во многих областях прикладной оптики нередки ситуации, когда доступной или неискаженной информацией об искомом пространственно-ограниченном (финитном) распределении является только модуль его Фурье спектра. Такая ситуация, например, возникает в астрономии при использовании методов Лабейри и голограмм интенсивности обработки искаженных турбулентной атмосферой изображений объекта.

Начиная с конца 50-х годов решению этой задачи, известной под названием фазовой проблемы, уделялось большое внимание. К настоящему времени получены как общетеоретические результаты, касающиеся вида и количества решений [1—10], так и конкретные схемы восстановления [11—19]. Однако детальный теоретический анализ двумерного случая фазовой проблемы, в частности для дискретных распределений, до сих пор не завершен. В том числе остается открытым вопрос создания быстрого и устойчивого алгоритма восстановления. В настоящей статье авторы, используя как известные, так и оригинальные результаты, рассматривают эти вопросы применительно к наиболее важной с практической точки зрения области приложения задачи — цифровой обработке оптических изображений.

## Математическая формулировка проблемы

Пусть $J(\mathbf{t})$ — непрерывная положительная функция (распределения изображения), отличная от нуля в конечной области пространства $S$. Ее Фурье образ определим как:

$$f(\mathbf{x}) = \hat{F}\{J\} = \int_S J(\mathbf{t}) \exp\{i\mathbf{x}\mathbf{t}\}\, \mathrm{d}t = A(\mathbf{x}) \exp\{i\varphi(\mathbf{x})\}\ , \tag{1}$$

где $\hat{F}$ — оператор Фурье преобразования; $A(\mathbf{x})$ — известный модуль спектра; $\varphi(\mathbf{x})$ — $\arg f(\mathbf{x})$ — неизвестная фаза.

При обратном Фурье преобразовании $A^2(\mathbf{x})$ получаем уравнение автокорреляции относительно изображения:

$$Q(\mathbf{t}) = \int_S J(\mathbf{t}_1)\, J(\mathbf{t}_1 + \mathbf{t})\, \mathrm{d}\mathbf{t}_1\ , \tag{2}$$

где

$$Q(\mathbf{t}) = F^{-1}\{A^2(\mathbf{x})\}\ .$$

Применяя к (2) обобщенное Фурье преобразование, определенное для комплексных значений переменных $\mathbf{w} = \mathbf{x}+i\mathbf{y}$, получаем еще одно уравнение фазовой проблемы:

$$f_Q(\mathbf{w}) = f(\mathbf{w})\, f(-\,\mathbf{w})\ . \tag{3}$$

При цифровой обработке распределение изображения описывается набором положительных отсчетов вида: $\{J(n_1, n_2)\colon 0 \le n_1 \le N_1,\ 0 \le n_2 \le N_2\}$, автокорреляция $Q$ записывается в виде

$$Q(m_1, m_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} J(n_1, n_2)\, J(n_1 + m_1, n_2 + m_2)\ , \tag{4}$$

а выражение для $f(\mathbf{w})$ приобретает вид

$$f(w_1,\ w_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} J(n_1,\ n_2)\ \exp\{iw_1 n_1 + iw_2 n_2\}\ .$$

При замене переменных $z_1 = \exp\{iw_1\}$, $z_2 = \exp\{iw_2\}$ уравнение (3) записывается как

$$R_Q(\mathbf{z}) = R_J(\mathbf{z})\ R_J(\mathbf{z}^{-1})\ , \tag{5}$$

где $R_J(z) = \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} J(n_1,\ n_2),\ \ z_1^{n_1},\ \ z_2^{n_2}$ — образ изображения, являющийся двумерным полиномом.

Таким образом, приходим к следующим эквивалентным формулировкам фазовой проблемы как задачи восстановления:

1. Фазы $\varphi(\mathbf{x})$ по модулю $A(\mathbf{x})$ (для дискретного случая $\varphi(\mathbf{z}) = \arg R_J(\mathbf{z})$ по $|R_J(\mathbf{z})|$ при $|\mathbf{z}| = 1$):

2. Изображения $J(\mathbf{t})$ из уравнения (2) (для дискретного случая изображения $J(n_1,\ n_2)$ из (4));

3. Неизвестной целой' аналитической функции $f(\mathbf{w})$ из (3) (для дискретного случая — полинома $R_J(z_1,\ z_2)$ из уравнения (5)).

**Однозначность восстановления**

Хорошо известно, что простой сдвиг изображения без изменения его структур и формы $J_1(t_1.\ t_2) = J(t_1+\alpha_1.\ t_2+\alpha_2)$ приводит только к изменению его Фурье фазы на линейный член: $\varphi_1(x_1,\ x_2) = \varphi(x_1,\ x_2) + \alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2$, а Фурье спектр «зеркального» изображения $J_1(t_1,\ t_2) = J(-t_1,\ -t_2)$ является комплексно сопряженным исходному спектру: $\varphi_1(x_1,\ x_2) = -\varphi(x_1,\ x_2)$. Таким образом, из самой постановки задачи следует, что два Фурье спектра $f(x_1,\ x_2)$ и $f(\pm x_1,\ \pm x_2)\ \exp\{i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)\}$ являются эквивалентными решениями фазовой проблемы, т.е. изображение может быть восстановлено с точностью до сдвига и разворота на 180°.

Общий анализ однозначности решения задачи легко провести, анализируя уравнение (3). Здесь первый сомножитель $f(\mathbf{w})$ соответствует истинному изображению, а второй $-f(-\mathbf{w})$ — «зеркальному» изображению, поэтому посторонние решения (неэквивалентные) могут возникать только в том случае, когда эти сомножители «перемешиваются». Пусть исходное изображение является сверткой двух других субизображений: $J(\mathbf{t}) = J_1(\mathbf{t}) * J_2(\mathbf{t})$. Тогда (3) имеет вид $f_Q(\mathbf{w}) = f_1(\mathbf{w}) f_2(\mathbf{w}) f_1(-\mathbf{w}) f_2(-\mathbf{w})$, откуда получаем все решения $f(\mathbf{w}) = f_1(\mathbf{w}) f_2(\mathbf{w})$, $f(\mathbf{w}) = f_1(-\mathbf{w}) f_2(-\mathbf{w})$, $f(\mathbf{w}) = f_1(\mathbf{w}) f_2(-\mathbf{w})$, $f(\mathbf{w}) = f_2(\mathbf{w}) f_1(-\mathbf{w})$. Таким образом, в этом случае задача формально имеет четыре решения, а отличия между ними наглядны, если представить их Фурье спектры в виде (1) (при $y = 0$ и $\mathbf{w} = \mathbf{x}$ — на действительных осях):

$$f(\mathbf{x}) = A_1 e^{i\varphi_1} A_2 e^{i\varphi_2}\ ,\ f(-\ \mathbf{x}) = A_1 e^{-i\varphi_1} A_2 e^{-i\varphi_2}\ ,$$

$$f(\mathbf{x}) = A_1 e^{i\varphi_1} A_2 e^{-i\varphi_2}\ ,\ f(\ \mathbf{x}) = A_1 e^{-i\varphi_1} A_2 e^{i\varphi_2}\ .$$

Модули спектра всех решений одинаковы и равны $A_1(\mathbf{x}) \cdot A_2(\mathbf{x})$. Два первых решения являются эквивалентными истинными решениями, а два вторых — эквивалентными посторонними решениями, т. е. фактически решений два: $J_1(\mathbf{t}) * J_2(\mathbf{t})$ и $J_1(\mathbf{t}) * J_2(-\mathbf{t})$. Если исходное изображение является сверткой $N$ субизображений $J(\mathbf{t}) = J_1(\mathbf{t}) * \ldots * J_N(\mathbf{t})$, то (3) имеет вид

$$f_Q(\mathbf{w}) = f_1(\mathbf{w})\ f_2(\mathbf{w})\ \ldots\ f_N(\mathbf{w}) \cdot f_1(-\ \mathbf{w})\ f_2(-\ \mathbf{w}) \cdots f_N(-\ \mathbf{w})\ .$$

Из (6) легко сконструировать новые решения, имеющие на действительных осях ($\mathbf{w} = \mathbf{x}$) тот же модуль, но другую фазу как $\prod_{i=1}^{N} f_i(\pm\mathbf{w})$. Общее число таких конструкций' равно $2^{N-1}$. При этом все они имеют одну и ту же автокорреляцию. Поскольку для положительно определенных изображений линейные размеры области автокорреляции в два раза превышают размеры области $S$ изображений, постольку все удовлетворяющие условию положительности конструкции являются решениями фазовой проблемы.

Для дискретного случая анализ совершенно аналогичен и следует из сооотношения (5), которое в этом случае приобретает вид:

$$R_Q(\mathbf{z}) = R_1(\mathbf{z})\ R_2(\mathbf{z})\ \ldots\ R_N(\mathbf{z}) \cdot R_1(\mathbf{z}^{-1})\ R_2(\mathbf{z}^{-1})\ \ldots\ R_N(\mathbf{z}^{-1})\ ,$$

а новые решения вида $\prod_{i=1}^{N} R_i(\mathbf{z})$ получаются при замене любого из $R_i(\mathbf{z})$ на $R_i(\mathbf{z}^{-1})$.

Отметим, что в хорошо известном частном случае симметричного изображения $J(\mathbf{t}) = J(-\mathbf{t})$ задача решается однозначно, поскольку $f(-\mathbf{w}) = f(\mathbf{w})$ и $R_J(\mathbf{z}^{-1}) = R_J(\mathbf{z})$. Поэтому в построении новых решений могут принимать участие только множители, соответствующие несимметричным субизображениям, для которых $J_i(-\mathbf{t}) \neq J_i(\mathbf{t})$. $f_i(-\mathbf{w}) \neq f_i(\mathbf{w})$, $R_i(\mathbf{z}^{-1}) \neq R_i(\mathbf{z})$.

Из изложенного следует, что основной вопрос однозначности фазовой проблемы сводится к представимости неизвестного изображения в виде свертки субизображений или к разложимости Фурье спектра на сомножители, каждому из которых соответствует финитная положительная функция.

*1. Одномерный случай.* Как целая функция экспоненциального типа $f(w)$ представима в виде канонического произведения Адамара-Вейерштрасса [21]:

$$f(w) = \exp(\beta_0 + \beta_1 w) \prod_{i}^{\infty} \left(1 - \frac{w}{w_i}\right) \exp\left(\frac{w}{w_i}\right),$$

где $w_i$ — корни уравнения $f(w) = 0$, $\beta_0$ и $\beta_1$ — комплексные константы. Новое решение получается при замене в разложении $f(w)$ корня $w_i$ на $w_i^*$, причем их число в принципе неограничено, однако к новому решению приводят только корни, не лежащие на действительной оси, если соответствующие им изображения удовлетворяют условию положительности.

В дискретном случае $z$-образ $R_J(\mathbf{z})$ является одномерным многочленом $N$-й степени, имеет $N$ корней и может быть представлен в виде

$$R_J(\mathbf{z}) = C \prod_{i=1}^{N} (z - z_i),$$

где $z_i$ — корни уравнения $R_J(z) = 0$, а $C$ — комплексная константа.

Новое решение для случая действительных корней $z_i = z_i^*$ получается при замене в любом из множителей $z_i$ на $z_i^{-1}$ [3].

В случае $z_i \neq z_i^*$ корни необходимо перебрасывать парами, поскольку новое решение состоит из множителей $(z - z_i)\left(z - \frac{1}{z_i^*}\right)$, где $z_i$ — произвольный корень из пары $(z_i, z_i^*)$. При этом число решений $\sim 2^{N_1+N_2}$, где $N_1$ — число действительных корней; $N_2$ — число сопряженных пар корней, не лежащих на окружности $|z| = 1$.

*2. Двумерный случай.* Согласно' [22] существует обобщенный многомерный аналог канонического произведения вида

$$f(\mathbf{w}) = H(\mathbf{w})\, G(\mathbf{w}).$$

Однако конкретный вид $H(\mathbf{w})$ и $G(\mathbf{w})$ не определен и тем более нет гарантии, что в области изображения им будут соответствовать финитные положительные функции. На этом рассмотрение непрерывного случая пока закончим.

В дискретном случае вопрос однозначности сводится к вопросу о разложимости двумерного полинома $R_J(z_1, z_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} J_{n_1 n_2} z_1^{n_1} z_2^{n_2}$ на произведение полиномов меньшей степени. В общем случае подобное разложение не осуществимо.

Для оценки вероятности однозначного решения фазовой проблемы удобно пользоваться аппаратом меры Лебега. В основе анализа лежат два утверждения [8].

Утверждение 1. Пусть соответствие $\hat{Q}$ точек $m$-мерного множества $B^m$ точкам $n$-мерного множества $B^n$ ($\hat{Q}: B^m \to B^n$) непрерывно дифференцируемо и $m < n$. Тогда мера Лебега подмножества, являющегося $\hat{Q}$-образом $B^m$ ($\hat{Q}[B^m]$) в $B^n$, равна нулю.

Другими словами, в $n$-мерном пространстве мера Лебега любого подмножества, определяемого $m$-независимыми параметрами (их выбор может быть различен) равна нулю при $m < n$ (скажем, площадь кривой, зависящей от одного параметра, равна нулю).

Обозначим множество полиномов степени $n$ от $\kappa$ переменных через $P(n, \kappa)$. Отдельный полином $P_n(\mathbf{z})$ из этого множества имеет вид

$$P_n(\mathbf{z}) = \sum_{l_1+l_2+\ldots+l_\kappa \le n} C(l_1 \ldots l_\kappa) z_1^{l_1} z_2^{l_2} \ldots z_\kappa^{l_\kappa}.$$

Число коэффициентов, определяющих полином из $P(n, \kappa)$, обозначим $\alpha(n, \kappa)$, а $R^{\alpha(n, \kappa)}$ — пространство коэффициентов полиномов. Поскольку каждый коэффициент полинома $P_n(\mathbf{z})$ может быть представлен как координата вектора из $R^{\alpha(n, \kappa)}$, то между $P(n, \kappa)$ и $R^{\alpha(n, \kappa)}$ существует взаимноодно-значное соответствие.

Утверждение 2. Подмножество $B$ разложимых полиномов множества $P(n, \kappa)$ соответствует в $R^{\alpha(n, \kappa)}$ множеству с мерой ноль при условии $\kappa > 1$, $n > 1$.

На основе данных утверждений несложно получить ряд важных следствий. Например, в одномерном случае уравнение (5) однозначно разрешимо либо для симметричных изображений, либо для изображений, являющихся сверткой симметричного субизображения и неразложимого более несимметричного субизображения. Поэтому из $N$ параметров, описывающих изображение длины $(N+1)$, только $\left[\frac{N_1+2}{2}\right]$ могут быть независимыми. В то же время множество автокорреляций $\{Q_n; \text{n} - N \le n \le N\}$ содержит $N$ независимых параметров. Следовательно, мера Лебега подмножества однозначно разрешаемых автокорреляций в множестве всех автокорреляций при $N \ge 3$ равна нулю, а фазовая проблема в одномерном случае при $N \ge 3$ решается почти всегда неоднозначно.

В двумерном случае при наличии в разложении $z$-образа только одного несимметричного множителя решение единственно. Из утверждения 2 вытекает, что математическая вероятность появления разложимого двумерного и многомерного полинома равна нулю, следовательно, фазовая проблема в двумерном и многомерном случаях, как правило, решается однозначно. Термины «как правило» и «почти всегда» означают, что данные утверждения верны для каждого элемента множества, исключая меру Лебега подмножества, равную нулю.

Приведенные рассуждения позволяют понять различие между одномерным и многомерным случаями и объяснить успех экспериментов по численному решению двумерного случая задачи. Однако возникает вопрос о методе построения всех возможных решений в двумерном случае, когда исходное изображение изначально является сверткой двумерных или одномерных субизображений. Если в одномерном случае ответ на этот вопрос сводится к определению нулей (5) и построению всех решений путем описанной «переброски» корней, то в двумерном случае факторизовать полином «в лоб» нельзя. Поэтому авторы предлагают «общий метод сведения двумерного дискретного случая к одномерному». Его суть заключается в том, что дискретное изображение $J_{n_1,n_2}$ вытягиваем построчно, т.е. ставим ему в соответствие одномерное изображение $I_n$ по правилу

$$I_n = J_{n_1, n_2} \text{ при } n = n_1 + n_2(N_1 + 1) .$$

Устанавливаем соответствие между значениями автокорреляции $Q_i$ изображения $I_n$ и автокорреляции $Q_{l_1,l_2}$ изображения $J_{n_1,n_2}$. Поскольку $z$-образы обеих автокорреляций удовлетворяют (5), а для $z$-образов изображений (с учетом (7)) справедливо равенство $R_I(z) = R_J(z, z^{N_1+1})$, то имеем

$$R_Q(z) = R_Q(z, z^{N_1+1}) .$$

Согласно (5) и с учетом вида полинома для $R_Q(z, z^{N_1+1})$ справедливо:

$$R_Q(z, z^{N_1+1}) = \left\{ \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} J_{n_1, n_2} z^{n_1 + n_2(N_1+1)} \right\} \left\{ \sum_{m_1=0}^{M_1} \sum_{m_2=0}^{M_2} J_{m_1, m_2} z^{-m_1 - m_2(N_1+1)} \right\} .$$

Записывая аналогичное выражение для $R_Q(z)$, с учетом (8), получаем

$$Q_l = \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} \sum_{m_1=0}^{M_1} \sum_{m_2=0}^{M_2} J_{n_1, n_2} J_{m_1, m_2} \delta\{l - (n_1 - m_1) - (n_2 - m_2)(N_1 + 1)\} .$$

Дальнейший анализ сводится к выявлению условий, при которых аргумент $\delta$—функции обращается в ноль, что можно записать в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} n_1 - m_1 = l_1 - p(N_1 + 1) , \\ n_2 - m_2 = l_2 + p , \end{cases} \qquad (9)$$

где $l_2 = \left[\dfrac{l}{N_1+1}\right]$, $l_1 = l - \left[\dfrac{l}{N_1+1}\right](N_1+1)$, $p$ — дискретный параметр, определяющий диапазон разложения по модулю $(N_1 + 1)$. Из (9) следует система неравенств, определяющих диапазон значений $p$: $0 \le l_1 \le N_1$, $|l_1 - p(N_1 + 1)| \le N_1$. Графическое поведение неравенств показывает, что $p$ может принимать только два значения: 0 и (или) 1.

Поэтому значение одномерной автокорреляции $Q_l$ построчно вытянутого изображения $I_n$ является суммой значений двух автокорреляций $Q_{l_1,l_2}$ [20]:

$$Q_l = Q_{l_1,\, l_2} + Q_{l_1-N_1-1,\, l_2+1}\,, \tag{10}$$

где $l_1 = l - \left[\dfrac{l}{N_1+1}\right](N_1+1)$, $l_2 = \left[\dfrac{l}{N_1+1}\right]$.

Вытягивание по столбцам по правилу $I_n = I_{n_1,n_2}$; $n = n_2+n_1(N_2+1)$ приводит к результату:

$$Q_l = Q_{l_1,\, l_2} + Q_{l_1+1,\, l_2-N_2-1}\,, \tag{11}$$

где

$$l_1 = \left[\frac{l}{N_2+1}\right],\; l_2 = l - \left[\frac{l}{N_2+1}\right](N_2+1)\,.$$

Рассмотрим метод «построчного вытягивания с нулями», который’ сводится к прибавлению к последнему элементу каждой строки двумерного изображения строчки, состоящей из $N_1$ нулей [10]. Подобный метод приводит к тому, что в (10) и (11) остается только одно слагаемое. Правило вытягивания дается в виде

$$I_n = J_{n_1,\, n_2},\;\; n = n_1 + n_2(2N_1+1), \tag{12}$$

а уравнение (8) перейдет в уравнение

$$R_Q(z) = R_Q(z,\; z^{2N_1+1}). \tag{13}$$

Далее, аналогично предыдущему рассмотрению, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} n_1 - m_1 = l_1 - p\,(2N_1+1), \\ n_2 - m_2 = l_2 + p, \end{cases}$$

где $l_2 = \left[\dfrac{l}{2N_1+1}\right]$, $l_1 = l - \left[\dfrac{l}{2N_1+1}\right](2N_1+1)$.

Система неравенств, из которой находится диапазон значений параметра $p$, имеет вид: $0 \le l_1 \le 2N_1$, $|l_1 - p(2N_1+1)| \le N_1$.

Из графического представления этих неравенств следует, что $p$ может принимать только одно значение: либо 0, либо I. Поэтому (10) принимает вид

$$Q_l = Q_{l_1,l_2} \tag{14}$$

и при этом $Q_{l_1-2N_1-2,\, l_2+1} = 0$, либо

$$Q_l = Q_{l_1-2N_1-2,\, l_2+1} \tag{15}$$

и при этом

$$Q_{l_1,\, l_2} = 0\,,\; l_1 = l - \left[\frac{l}{2N_1+1}\right](2N_1+1)\,,\; l_2 = \left[\frac{l}{2N_1+1}\right]$$

Очевидно, что аналоги (14) и (15) справедливы и при постолбцовом вытягивании с нулями.

В самом общем виде построчное вытягивание $J_{n_1,n_2}$ в одномерное изображение может быть записано в виде $I_n = J_{n_1,n_2}$, $n = n_1 + n_2M_1$, откуда следует:

а) $M_1 = N_1 + 1$ — вытягивание без нулей (10);

б) $N_1+1 < M_1 < 2N_1+1$ — промежуточный случай, когда вытягивание происходит с нулями, но их недостаточно для обеспечения равенства нулю одного из слагаемых в (10) и $Q$ будет также являться суммой двух двумерных автокорреляций, одна из которых сдвинута;

в) $M_1 = 2N_1+1$ — получаем либо (14) либо (15);

г) $M_1 > 2N_1+1$ — метод применим, но сложно установить соответствие типа (14) или (15), поскольку аналитически оно не записывается;

д) $1 < M_1 < N_1+1$ — в этом случае $Q_l$ является комбинацией 3-х и более двумерных автокорреляций, однако подобное вытягивание уже бессмысленно, поскольку строчки накладываются друг на друга и восстановить из $I_n$ изображение $I_{n_1,n_2}$ невозможно.

Полученный метод позволяет сформулировать алгоритм нахождения всех решений фазовой проблемы в двумерном дискретном случае:

1. По заданной автокорреляции $Q_{l_1,l_2}$ с областью $S_Q$ $(-L_1 \le l_1 \le L_1,\ -L_2 \le l_2 \le L_2)$ определяется область изображения $S$, как $N_1 = [L_1]+1$, $N_2 = [L_2]+1$.

2. В соответствии с $N_1$, $N_2$ определяется правило вытягивания неизвестного двумерного изображения $J_{n_1,n_2}$ в одномерное $I_n$ либо построчно — $n = n_1+n_2M_1$ $(N_1+1 \le M_1 \le 2N_1+1)$, либо постолбцово — $n = n_2+n_1M_2$ $(N_2+1 \le M_2 \le 2N_2+1)$.

3. В зависимости от выбранного правила вытягивания строится одномерная автокорреляция $Q_l$ одномерного аналога изображения $I_n$.

4. Определяются корни $R_Q(z)$ и выделяются все решения одномерного дискретного случая задачи [3].

5. Полученные одномерные решения отбраковываются по критерию:

а) «свертываемости» в двумерное изображение, если вытягивание было с нулями, при этом они должны иметь в соответствующих местах нулевые значения.

б) если вытягивание было без нулей, то их одномерная автокорреляция $Q_l$ равна сумме двух двумерных, поэтому считаются одномерные автокорреляции полученных решений $Q_l^m$, свертываются в двумерные $\to O_{l_1,l_2}^m$ и проверяется равенство $Q_{l_1,l_2} = O_{l_1,l_2}^m$. При этом посторонние решения этому равенству не удовлетворяют.

В принципе можно доказать, что мера Лебега построенных посторонних решений при описанных ограничениях равна нулю.

Дальнейшему рассмотрению задачи будут посвящены II и III части статьи.


1. W a l k e r A. //Opt. Acta. 1962. V. 10. P. 41.
2. H u i s e r A.M.J., v a n T o o r n P. //Opt. Lett. 1980. V. 5. P. 377.
3. B r u c k Y.M., S o d i n L.G. //Opt. Comm. 1979. V. 70. P. 304.
4. G r i m m i n s T.R., F i e n u p J.R. //JOSA. 1981. V. 71. P. 1026.
5. G r i m m i n s T.R., F i e n u p J.R., H o l s z t y s h i W. //JOSA. 1982. V. 72. P. 610.
6. W a l k e r J.R. //Opt. Acta. 1981. V. 28. P. 735.
7. F r i e d D.L. //RADC-TR-S0. 1980. P. 219.
8. H a y e s M.H., M c C l e l l a n J.H. //Proc. IEEE. 1982. V. 70. P. 197.
9. H a y e s M.H. //IEEE Trans. Acoust. Speech. Sign. Proc. 1982. V. 30. P. 140.
10. C a n t e r a k i s N. //IEEE Trans. Acoust. Speech. Sign. Proc. 1983. V. 31. P. 1256.
11. G e r c h b e r g R.W. //Optik. 1972. V. 35. P. 23.
12. F i e n u p J.R. //Opt. Engineering. 1980. V. 19. P. 297.
13. F i e n u p J.R. //Opt. Engineering. 1979. V. 18. P. 529.
14. F i e l d k a m p G.B., F i e n u p J.R. //SPIE. 1980. V. 231. P. 96.
15. W a l k e r J.R. //Opt. Acta. 1981. V. 28. P. 1017.
16. W a l k e r J.R. //Appl. Opt. 1982. V. 21. P. 3132.
17. B a t e s R.H.T., G a r d e n K.L. //Opt.1982. V. 61. P. 247.
18. B a t e s R.H.T., G a r d e n K.L. //Opt.1982. V. 62. P. 131.
19. F i e n u p J.R. //Appl. Opt. 1982. V. 21. P. 2758.
20. Б а к у т П.А., П а х о м о в А.А., Р я х и н А.Д., С в и р и д о в К.Н., У с т и н о в Н.Д. //ДАН СССР. Т. 290. № 1. С. 89.
21. К о р н Г., К о р н Т. //Справочник по математике. М.; Наука, 1984.
22. Р о н к и н Л.И. //Введение в теорию целых функций многих переменных. М.: Наука, 1971.



Научно-производственное объединение«Астрофизика»,
Москва



Поступила в редакцию
24 января 1992 г.


P.A. B a k u t, A.A. P a k h o m o v, A.D. R y a k h i n. **Methods of Solution of the Phase Problem in Digital Image Processing. Part 1.**


A theoretical analysis of the phase problem is presented and algorithms of its solution are considered. Unambiguity of the phase problem solution in one- and multidimensional cases is analysed. A new technique for constructing all the solutions of the problem in the discrete two-dimensional case is proposed.