«Оптика атмосферы и океана», **5**, № 5 (1992)

УДК 535.317.1

П.А. Бакут, А.А. Пахомов, А.Д. Ряхин, И.П. Плотников

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ФАЗОВОЙ ПРОБЛЕМЫ ПРИ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ ЧАСТЬ III. АЛГОРИТМЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Дан сравнительный анализ известных алгоритмов решения задачи, на основе которого выявлен и исследован алгоритм, обладающий наилучшими характеристиками.

Определено минимальное число отсчетов, достаточное для восстановления, проведен теоретический и практический анализ устойчивости к шумам и приведены результаты физического эксперимента.

Как было показано в Части II, аналитические решения фазовой проблемы возможны для довольно узкого класса изображений и, в частности, имеющих в своем распределении точечный источник [1].

Известны алгоритмы «прямого» решения фазовой проблемы, основанные на численном решении уравнения автокорреляции (см. Часть I (4)). В [2] рассмотрен алгоритм восстановления квантованных по интенсивности изображений, сводящийся к последовательному перебору всех возможных решений и отбраковке посторонних. Из всех без исключения автокорреляций были восстановлены только истинные решения, однако процедура выделения всех решений слишком сложна, а время работы алгоритма на ЭВМ БЭСМ-6 с массивами 25×25 при 6 градациях в изображении требовала около 2,5 ч. В [3] описана модификация этого алгоритма на случай неквантованных изображений, которая требует также очень больших затрат машинного времени.

Возможны также «теоретические» алгоритмы [4, 5], основанные на нахождении z-образа автокорреляции $R_Q(z_1, z_2) = R_J(z_1, z_2)R_J(z_1^{-1}, z_2^{-1})$, вычислении корней R_Q по каждой из переменных и решении системы линейных уравнений относительно коэффициентов полиномов $R_J(\mathbf{z})$ и $R_J(\mathbf{z}^{-1})$. Главный недостаток этих алгоритмов — трудность и громоздкость факторизации двумерного полинома, а также значительные погрешности в определении корней при наличии шума.

Более реалистичными являются алгоритмы, основанные на итерационном решении уравнения автокорреляции. Принцип их работы следующий: пусть $J^\kappa(\mathbf{n})$ — оценка изображения, соответствующая ей оценка автокорреляции — $Q^\kappa(\mathbf{n})$, тогда ошибка по сравнению с истинной автокорреляцией может быть записана

$$\Delta Q^k(\mathbf{n}) = \sum_{\mathrm{n}} |Q^k(\mathbf{n}) - Q(\mathbf{n})|^2 = ||Q^k - Q|| \ .$$

В дальнейшем меняют $J^\kappa(\mathbf{n})$ таким образом, чтобы свести $\Delta Q^\kappa(\mathbf{n})$ к минимуму.

Методы минимизации $\Delta Q^\kappa(\mathbf{n})$ могут быть различными: в [6] для минимизации используется метод Монте-Карло, в [7, 8] — градиентные методы. Первый недостаток этих алгоритмов — сложность и громоздкость, что ограничивает их применимость малоразмерными изображениями, второй связан с многоэкстремальностью функции $\Delta Q^\kappa(\mathbf{n})$, которая зависит от $(N_1+1)\,(N_2+1)$-переменных изображения.

Обычно подобные функционалы наряду с глобальным экстремумом имеют множество локальных, а «добраться» до глобального можно только перебрав все локальные, причем число локальных экстремумов непредсказуемо и определяется как видом функционала, так и видом изображения.

Стоит упомянуть еще один алгоритм [9, 10] приближенного решения задачи. Для его реализации необходимо взять выборку значений модуля, в два раза более частую, чем требуется по теореме Котельникова, что можно сделать, поместив автокорреляцию в нулевой массив с размерами, равными ее удвоенным размерам, и осуществив обычное ДПФ. Затем в предположении, что значение модуля в каждой избыточной точке зависит только от двух ближайших значений, в основных точках выборки можно определить величины разностей фаз вида $\Delta\varphi_\kappa = \left|\varphi_{\kappa,l} - \varphi_{\kappa+1,l}\right|$, $\Delta\varphi_l = \left|\varphi_{\kappa,l} - \varphi_{\kappa,l+1}\right|$. Далее, строят оценку самой фазы, сшивая $\Delta\varphi_\kappa$ и $\Delta\varphi_l$ и используя неизменность конечного значения фазы при различных путях подхода.

Несмотря на неопределенность в знаке разности фаз и необходимости перебора, в двумерном случае были восстановлены только истинные решения (это еще раз подтверждает важность условия замкнутости). Недостатком алгоритма является низкая точность, связанная с грубостью аппроксимации значений модуля. Однако в качестве метода построения начальной оценки для итерационного алгоритма, который будет рассмотрен, он вполне пригоден.

Итерационные алгоритмы

1. *Оптимальный алгоритм.* Наиболее перспективными с точки зрения авторов методами практического решения задачи являются итепационные алгоритмы, представляющие собой модификацию алгоритма Гершберга — Сакстона [11]. Краткая схема их работы записывается следующим образом:

$$J_{\kappa+1} = \hat{P}_1 \hat{P}_2 \hat{P}_3 J_\kappa, \tag{1}$$

где J_κ — оценка изображения на κ-й итерации; $\hat{P}_1$ — оператор проекции на множество положительных функций; $\hat{P}_2$ — оператор проекции на множество финитных функций (с заданной областью S); $\hat{P}_3$ — оператор проекции на множество функций с заданным модулем Фурье спектра. Из определения оператора проекции [12] непосредственно следуют конкретные виды операторов $\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$:

$$\hat{P}_1 I = \begin{cases} I(\mathbf{n}) & \text{при } I(\mathbf{n}) \geqslant 0, \\ 0 & \phantom{\text{при }} I(\mathbf{n}) < 0, \end{cases} \quad \hat{P}_2 I = \begin{cases} I(\mathbf{n}) & \text{при } \mathbf{n} \in S, \\ 0 & \phantom{\text{при }} \mathbf{n} \notin S, \end{cases} \tag{2}$$

где $I(\mathbf{n})$ — любая действительная функция. Определим вид оператора $\hat{P}_3$. Пусть $f(\mathbf{x}) = |f(\mathbf{x})| \exp\{i\varphi(\mathbf{x})\}$ — произвольный Фурье спектр, а $g(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}) \exp\{i\psi(\mathbf{x})\}$ — Фурье спектр с заданным модулем $A(\mathbf{x})$. Найдем связь $\varphi(\mathbf{x})$ и $\psi(\mathbf{x})$. По определению оператора проекции

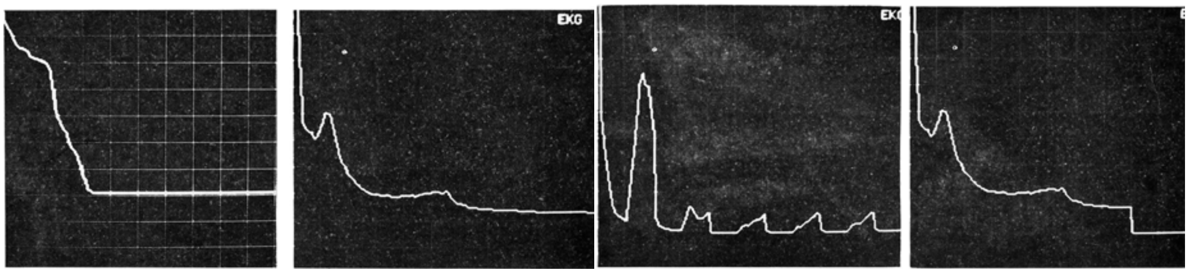
$$\|f - \hat{P}_3 f\|^2 = \|f - g\|^2 = \sum_{\mathbf{x}} \{|f(\mathbf{x})|^2 + A^2(\mathbf{x}) - 2|f(\mathbf{x})| A(\mathbf{x}) \cos[\varphi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})]\} = \min.$$

Минимум достигается при $\varphi(\mathbf{x})=\psi(\mathbf{x})$ и $|f(\mathbf{x})| = A(\mathbf{x})$. Поэтому оператор $\hat{P}_3$ имеет вид

$$\hat{P}_3 J_\kappa = \tilde{J}_\kappa(\mathbf{x}) \frac{A(\mathbf{x})}{|\tilde{J}_\kappa(\mathbf{x})|}, \tag{3}$$

где $\tilde{J}_\kappa(\mathbf{x}) = \hat{F}\{J_\kappa\}$, $\hat{F}$ — оператор Фурье преобразования, $A(\mathbf{x})$ — заданный модуль Фурье спектра.

Поскольку любые виды априорной информации (ограничений) можно рассматривать как замкнутые множества, то работа алгоритма восстановления (1) сводится к последовательному проектированию на эти множества и нахождению элемента, принадлежащего их пересечению. Для анализа сходимости подобных алгоритмов обычно используется утверждение [12], которое гарантирует сходимость к истиному решению, если соответствующие операторам проекции множества выпуклы. Можно показать, что операторам $\hat{P}_1$ и $\hat{P}_2$ соответствуют выпуклые множества, однако множество, соответствующее оператору $\hat{P}_3$ — невыпукло. Это обусловливает необходимость более подробного исследования его сходимости. Детальный теоретический анализ [13] показывает, что ошибка в процессе восстановления уменьшается, т. е. алгоритм сходится. Экспериментальные исследования показали, что первые 10— 30 итераций алгоритм сходится довольно быстро, но затем сходимость резко замедляется и примерно к 50—60 итерациям наступает практически полный застой алгоритма, который продолжается до 2—10 тысяч итераций и более (рис. 1, *а*).



а *б* *в* *г*

Рис. 1. Изменение ошибки восстановления в зависимости от номера итерации при использовании оптимального алгоритма (*а*); алгоритма «встряски» (*б*); при чередовании через 10 итераций оптимального алгоритма и алгоритма «встряски» (*в*); при использовании оптимального алгоритма после 80 итераций алгоритма «встряски» (*г*)

Оценка изображения перестает меняться, а среднеквадратическая ошибка по сравнению с истинным изображением «застывает» на уровне 10—15%. Этот недостаток заставляет искать пути преодоления застоя алгоритма (1), который будем называть «оптимальным», поскольку исправление изображения в нем осуществляется с помощью операторов проекции, т.е. минимальным в смысле нормы образом.

2. *Алгоритм встряски.* Рассматриваемые ниже алгоритмы управления по входу, впервые предложенные Фьенапом [13], не имеют строгого обоснования, однако их применение позволяет преодолеть застой алгоритма (1). Рассмотрим действие нелинейного оператора $\hat{P}_3$. Очевидно, что малые изменения его входа приводят к малым изменениям его выхода. А так как выходом является оценка $I_к(\mathbf{n})$, не удовлетворяющая априорным ограничениям на изображение, поставим задачу: в следующем цикле вместо $J_к(\mathbf{n})$ подать на вход такую оценку $J_{\kappa+1}(\mathbf{n})$, чтобы полученная на выходе оценка $J_{\kappa+1}(\mathbf{n})$ удовлетворяла бы априорным ограничениям. Естественно предположить, что при этом изменение входа должно иметь вид

$$\triangle J_\kappa(\mathbf{n}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{n} \in \Gamma_\kappa, \\ -I_\kappa(\mathbf{n}), & \mathbf{n} \notin \Gamma_\kappa, \end{cases}$$

где Γ_κ — область, в которой $I_\kappa(\mathbf{n}) \geq 0$ и $\mathbf{n} \in S$. Тогда в общем случае $J_{\kappa+1}(\mathbf{n})$ запишется так:

$$J_{\kappa+1}(\mathbf{n}) = J_\kappa(\mathbf{n}) + \beta \Delta J_\kappa(\mathbf{n}) = \begin{cases} J_\kappa(\mathbf{n}), & \mathbf{n} \in \Gamma_\kappa, \\ J_\kappa(\mathbf{n}) - \beta I_\kappa(\mathbf{n}), & \mathbf{n} \in \Gamma_\kappa, \end{cases} \tag{4}$$

где $\beta \in (0, 1)$. Можно также попытаться скомпенсировать нарушения в области изображения на выходе, считая входом оценку $I_\kappa(\mathbf{n})$. Тогда получаем

$$J_{\kappa+1}(\mathbf{n}) = I_\kappa(\mathbf{n}) + \beta \Delta J_\kappa(\mathbf{n}) = \begin{cases} I_\kappa(\mathbf{n}), & \mathbf{n} \in \Gamma_\kappa, \\ I_\kappa(\mathbf{n}) - \beta I_\kappa(\mathbf{n}), & \mathbf{n} \notin \Gamma_\kappa. \end{cases} \tag{5}$$

Комбинация этих методов приводит к третьему выражению для входа:

$$J_{\kappa+1}(\mathbf{n}) = \begin{cases} I_\kappa(\mathbf{n}), & \mathbf{n} \in \Gamma_\kappa, \\ J_\kappa(\mathbf{n}) - \beta I_\kappa(\mathbf{n}), & \mathbf{n} \notin \Gamma_\kappa. \end{cases} \tag{6}$$

Алгоритмы (4), (5), (6) отличаются от оптимального только исправлением в области изображения. При экспериментальном исследовании оказалось, что алгоритмы (4), (5) сходятся еще медленнее, чем оптимальный. А алгоритм (6), который будем условно называть алгоритмом «встряски», ведет себя чрезвычайно интересно. Во-первых, полученная оценка изображения $J_{\kappa+1}(\mathbf{n})$ не удовлетворяет априорным ограничениям, во-вторых, ошибки сначала уменьшаются довольно быстро, затем их уменьшение замедляется, а после 100—500 итераций ошибки резко уменьшаются до значений 0,1—0,01%, в-третьих, сходимость алгоритма сильно зависит от константы β. При $\beta \geq 1$ алгоритм расходится. «Оптимальное» в смысле скорости сходимости значение β из интервала (0, 1) определяется конкретным видом восстанавливаемого изображения.

Недостатком алгоритма встряски является его общая неустойчивость — возможен непредсказуемый рост ошибок (рис. 1, *б*).

3. *Комбинированный алгоритм.* Естественным обобщением рассмотренных алгоритмов является их комбинирование — чередование с целью устранения неустойчивости алгоритма встряски и застоя оптимального алгоритма.

Запишем комбинированный алгоритм в следующем виде:

$$J_{\kappa+1}(\mathbf{n}) = \begin{cases} I_\kappa(\mathbf{n}), & \mathbf{n} \in \Gamma_\kappa, \\ \alpha\{J_\kappa(\mathbf{n}) - \beta I_\kappa(\mathbf{n})\}, & \mathbf{n} \notin \Gamma_\kappa. \end{cases} \tag{7}$$

Здесь при $\alpha = 0$ получаем оптимальный алгоритм, при $\alpha = 1$ — алгоритм встряски. Простейшая схема комбинированного алгоритма выглядит следующим образом:

$$\{K_1 \text{ итераций при } \alpha = 0 + L_1 \text{ итераций при } \alpha = 1\} \times M_1 \text{ раз} + K \text{ итераций при } \alpha = 0. \tag{8}$$

Следует заметить, что возможен и промежуточный вариант при $\alpha \in (0, 1)$, однако, как показало экспериментальное моделирование, этот алгоритм сходится медленнее комбинированного алгоритма (приблизительно как оптимальный, хотя застой у него наступает позже).

Проводились исследования комбинированного алгоритма с целью выбора его параметров K_1, L_1, M_1, β, обеспечивающих максимальную скорость сходимости. При этом вначале находили оптимальное значение β (перебором 3—4 значений из интервала (0, 1), а затем при фиксированном β исследовалась сходимость при различных K_1, L_1, M_1. В результате оказалось, что наилучшее качество восстановления дает сочетание $K_1 = L_1 = 10$ при $M_1 = 1, 2, 3$.

Поведение ошибок при работе комбинированного алгоритма несколько необычно: при $\alpha = 0$ ошибки уменьшаются, при $\alpha = 1$ возрастают, следующий переход к оптимальному алгоритму ($\alpha = 0$) опять приводит к спаду ошибки, но уже ниже того уровня, который был при его предыдущем применении (рис. 1, *в*). Таким образом, при использовании встряски ($\alpha = 1$) ликвидируется застой оптимального алгоритма. Циклическое чередование этих двух алгоритмов приводит к тому, что при завершении всего цикла восстановления ошибки доходят до уровня $10^{-4}-10^{-6}$.

Хорошие результаты дает применение комбинированного алгоритма при $M_1 = 1$, когда вначале применяется $L_1 = 100-150$ итераций при $\alpha = 1$, а затем $K_1 = 20-30$ итераций при $\alpha = 0$. Характерным здесь также является скачок вниз ошибки при $\alpha = 0$ (рис. 1, *г*). Окончательный уровень ошибок такого алгоритма близок к ошибкам обычного комбинированного алгоритма.

Отметим одну особенность: как было показано в Части I, фазовая проблема имеет единственное решение с точностью до эквивалентности, что на практике приводит к восстановлению помимо истинного изображения его аналога, развернутого на 180°. Алгоритм может сходиться либо к одному, либо к другому решению в зависимости от начальной оценки. Однако во время встряски ($\alpha = 1$) ориентация изображения может меняться, и он начнет сходиться к другому решению. При этом довольно редко, но возникает ситуация, когда происходит наложение двух решений: истинного и развернутого. В этом случае восстановить изображение обычно не удается и необходимо заново повторить весь цикл восстановления с новой начальной оценкой.

Вопрос выбора начальной оценки исследовался особо: выбирались начальные оценки с истинным модулем спектра и нулевой или случайной фазой, начальные оценки изображения, распределенные по равномерному закону только в области S изображения и во всем массиве. Наилучшую сходимость показали реализации равномерного закона во всем массиве, поэтому во всех экспериментах использовался только этот и начальной оценки.

Определение размеров изображения (области S) осуществлялось при пороговой фильтрации автокорреляции по уровню 0,1 от максимального ее значения и полученная область автокорреляции при этом в 1,5—1,8 раза больше области изображения S. Моделирование показало, что при ошибке S на 10% в сторону уменьшения алгоритм не работает. При ошибках в сторону увеличения не более 50% алгоритм продолжает работать, но число итераций увеличивается в 5—6 раз. Стоит заметить, что наилучшие результаты дает применение алгоритма при восстановлении компактных изображений, не имеющих тонкой структуры и изрезанного контура. При восстановлении сложных изображений необходимо использовать дополнительную избыточность модуля спектра, чтобы размер изображения был не более четверти всего поля.

Минимальное число отсчетов модуля и анализ устойчивости к шумам

При практическом восстановлении изображения значения модуля спектра известны в конечном числе отсчетов. Однозначность восстановления в этой ситуации проанализирована и доказана в [14], откуда следует, что в общем случае для гарантированного восстановления изображения размером $(N_1+1)(N_2+1)$ достаточно $(2N_1+1)(2N_2+1)$ отсчетов модуля. Поскольку модуль спектра действительного изображения четная функция, то достаточно половины его значения, а с учетом нормирования по энергии $\sum_{\mathbf{n}=0}^{N} J(\mathbf{n}) = 1$ находим достаточное для восстановления число отсчетов: $L = 2N_1N_2+N_1+N_2$. Однако общее число независимых отсчетов изображения с учетом нормировки равно $N_1N_2+N_1+N_2$, что наводит на мысль о том, что число L не является минимальным. Для определения минимального набора значений модуля опять используем метод сведения дискретного двумерного случая к одномерному.

Вытянем изображение $J(n_1, n_2)$ построчно без нулей, поставив ему в соответствие одномерное изображение $T(n)$ по правилу:

$$T n = J_{n_1, n_2}, \text{ где } n = n_1 + n_2 (N_1 + 1).$$

Тогда соответствующая $T(n)$ одномерная автокорреляция Q_l имеет вид (часть I):

$$Q_l = Q_{l_1, l_2} + Q_{N_1-l_1-1, l_2+1},$$

где Q_{l_1,l_2} — двумерная автокорреляция изображения $J(n_1, n_2)$. Общее число элементов одномерной автокорреляции Q_l равно $2(N_1N_2+N_1+N_2)+1$. Размер области одномерного изображения $T(n)$ равен $0 \le n \le N_1N_2+N_1+N_2$, а размер одномерной решетки, на которой заданмодуль спектра $|F\{T\}|$, равен $2(N_1N_2+N_1+N_2)+1$. Отсюда, с учетом нормировки и четности модуля, находим, что минимальный набор отсчетов модуля для определения двумерного изображения $J(n_1, n_2)$ равен $L_{\text{miu}} = N_1N_2+N_1+N_2$. Кроме того, получаем ограничение на максимальный размер K изображения, которое можно восстановить по модулю, заданному в массиве размером M.

Пусть изображение и массив квадратные и $N_1+1 = N_2+1 = K$, а M — размер массива Фурье плоскости и плоскости изображения. Число независимых отсчетов модуля равно $M^2/2$ и минимальный набор должен находиться среди них $L_{\min} \le M^2/2$. Тогда максимальный размер изображения определяется из неравенства:

$$K_{\max}^2 - 1 \leqslant \frac{M^2}{2} \text{ и } K_{\max} \leqslant \frac{2}{3} M.$$

Но на практике с целью ускорения сходимости лучше выбирать $K = M/2 \div M/4$.

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса устойчивости при наличии шума. В одномерном случае справедливо утверждение [15]: для того чтобы одномерная действительная и симметричная последовательность была автокорреляцией (удовлетворяла уравнению (5) из Части I) необходимо и достаточно, чтобы ее Фурье спектр был положителен.

К сожалению, на двумерный случай этот результат не обобщается и справедливо противоположное утверждение.

Утверждение. Мера Лебега подмножества автокорреляций $\{Q_{n_1,n_2}\}$ из множества всех действительных и симметричных последовательностей $\{B^0_{n_1,n_2}\}$ с положительным Фурье спектром равна нулю.

Доказательство. Множество действительных и симметричных последовательностей:

$$B_{n_1,n_2}: \{B_{n_1,n_2} = B_{-n_1,-n_2}\,;\, -N_1 \le n_1 \le N_1\,,\, -N_2 \le n_2 \le N_2\}$$

задается $2N_1N_2 + N_1 + N_2 + 1$ независимыми параметрами. Выделим в этом множестве подмножество $\{B^0_{n_1,n_2}\}$, отличающееся только значениями центральных элементов, которые задаются как:

$$B^0_{0,0} \ge 2 \sum_{-N_1}^{N_1} \sum_{-N_2}^{N_2} |B_{n_1,n_2}|$$

Тогда Фурье образ $F\{B^0_{n_1,n_2}\} = f_{B^0}(x_1, x_2)$ имеет вид

$$f_{B^0}(x_1, x_2) = B^0_{0,0} + 2 \sum_{-N_1}^{N_1} \sum_{-N_2}^{N_2} B_{n_1,n_2} \cos(n_1x_1 + n_2x_2).$$

Из построения $B^0_{n_1,n_2}$ следует, что $f_{B^0}(x_1, x_2) \ge 0$ для любых x_1, x_2. Число независимых параметров множества $B^0_{n_1,n_2}$ — $2N_1N_2+N_1+N_2$.

В то же время число независимых параметров множества автокорреляций совпадает с числом параметров изображения (т.к. должно удовлетворять (5) из Части I) и составляет величину $(N_1+1)(N_2+1) < N_1N_2+N_1+N_2$ при N_1, $N_2 > 1$. Поэтому согласно утверждению 1 (Часть I) мера Лебега подмножества автокорреляции в множестве всех действительных симметричных последовательностей с положительным спектром равна нулю.

Отсюда следует качественный вывод, что двумерная автокорреляция (в отличие от одномерной) является последовательностью очень специфического вида. Поэтому добавление к ней сколь угодно малого шума будет, как правило, приводить к тому, что она перестает быть автокорреляцией.

В этом смысле двумерная фазовая проблема неустойчива — шум будет приводить к отсутствию точного решения.

Однако многочисленные эксперименты показывают, что всегда существует приближенное решение-изображение, автокорреляция которого близка к зашумленной, а изображение оказывается близким к истинному.

Это свойство косвенно подтверждает правильность выбранного итерационного метода восстановления, позволяющего получить приближенное решение при отсутствии точного.

В связи с изложенным возникает вопрос об ошибке восстановления. Из уравнения (5) (Часть I) сразу можно получить очень грубую качественную оценку ошибки восстановления изображения при заданной ошибке автокорреляции (или квадрата модуля): $\delta_J = \sqrt{\delta_Q}$.

В [16] проведен теоретический расчет этой зависимости при использовании неравенства Крамера—Рао, причем фазовая проблема рассматривалась как задача восстановления комплексного гауссовского поля по интенсивности его спектра.

При экспериментальном исследовании шумовых характеристик фазовой проблемы исследовались два вида шумов:

$A^2(\mathbf{x}) = A_0^2(\mathbf{x})\{1 + g \cdot n(\mathbf{x})\}$ — мультипликативный и (9)

$A^2(\mathbf{x}) = A_0^2(\mathbf{x}) + g \cdot n(\mathbf{x})$ — аддитивный, (10)

где $A(\mathbf{x})$ и $A_0(\mathbf{x})$ соответственно искаженный и неискаженный модули спектров; g — изменяемая константа; $n(x)$ — реализация гауссовского процесса с нулевым средним и единичной дисперсией. В первом случае ошибка модуля вводилась как

$$\delta_1 = \left\langle \frac{\sum\limits_{\mathbf{x}} A_0^2(\mathbf{x})\{\sqrt{1 + gn(\mathbf{x})} - 1\}^2}{\sum\limits_{\mathbf{x}} A_0^2(\mathbf{x})} \right\rangle,$$

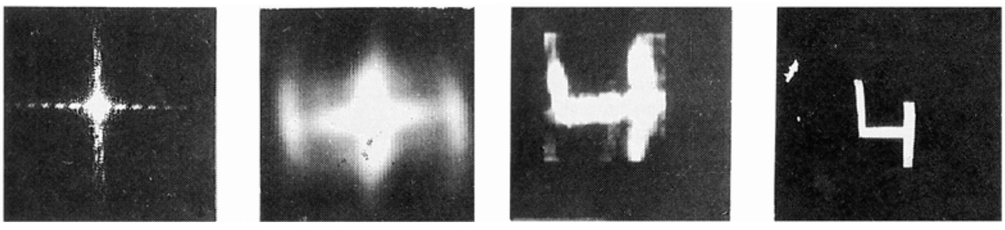
а во втором

$$\delta_2 = \left\langle \frac{\sum\limits_{\mathbf{x}} A_0^2(\mathbf{x}) \left\{ \sqrt{1 + \frac{gn(\mathbf{x})}{A_0^2(\mathbf{x})}} - 1 \right\}^2}{\sum\limits_{\mathbf{x}} A_0^2(\mathbf{x})} \right\rangle.$$

Изучалась зависимость нормированной среднеквадратической ошибки по изображению δ по сравнению с истинным в момент восстановления. Обе зависимости практически идентичны и описываются следующим образом: при малых шумах $10^{-6} < \delta_1,\ \delta_2 < 10^{-3}$ зависимость δ от δ_1, δ_2 пропорциональная $\delta = \delta_1$, $\delta = \delta_2$, при $10^{-3} < \delta_1,\ \delta_2 < 10^{-2}$ зависимость также пропорциональная, но с коэффициентом $\delta = 4\delta_1$, $\delta = 3\delta_2$, при $10^{-2} < \delta_1,\ \delta_2 < 0{,}2$ зависимость приближенно описывается корневым законом — $\delta = \sqrt{\delta_1}$, $\delta = \sqrt{\delta_2}$.

Для исследования устойчивости задачи к влиянию нелинейных шумов фотопленки авторами был поставлен простейший физический эксперимент. Плоская волна, полученная с помощью гелий-неонового лазера $\lambda = 0{,}63$ мкм и коллиматора, была пропущена через маску, играющую роль изображения, с пропусканием в пределах области, по форме, совпадающей с цифрой 4. С помощью собирающей линзы $F = 500$ мм было осуществлено Фурье преобразование излучения, а его интенсивность была зарегистрирована обычным фотоаппаратом в фокусе линзы. При линейном размере маски l элемент разрешения такой системы в Фурье плоскости $\Delta = \frac{\lambda}{l}F$. Для восстановления автокорреляции оцифровка квадрата модуля спектра должна проводиться с шагом d, в два раза меньшим элемента разрешения $d \le \frac{\lambda F}{2l}$.

Для оцифровки спектра авторы пользовались комплексом Р = 1700 с шагом 50 мкм, поэтому размер маски $l \le \frac{\lambda F}{2d} \approx 3{,}15$ мм и было взято значение $l = 3$ мм.



а *б* *в* *г*

Рис. 2

Зарегистрированный на негативе модуль Фурье спектра (рис. 2, *а*) был оцифрован, уменьшен до массива 64×64 и введен в ЭВМ. Затем был произведен переход от оптических плотностей и интенсивностей с подбором коэффициента контраста пленки по максимуму резкости границ автокорреляции.

Восстановленная автокорреляция и изображение после 30-й итерации приведены соответственно на рис. 2, *б*, *в*, а на рис. 2, *г* — истинное изображение, зарегистрированное на когерентной установке.

1. Павлова П. А., Паук В. Н.. Тетерин В. В. //Труды ГОИ. 1988. Т. 70. Вып. 204. С. 55.
2. Демин А. А. //РЭ. 1983. Т. 28. С. 2023.
3. Fiddy M. A., Berenyi H. M. //Opt. Comm. 1986. V. 59. P. 342.
4. Izraelevi1z D., Lim J. S. //ICCASP. 1987. V. 35. P. 51.

5. Gonsalves R.A. //SPIE. 1985. V. 528. P. 20.
6. Nieto-Vesperinas M., Mendes J.A. //Opt. Comm. 1986. V. 59. P. 249.
7. Бакалов В.П. //РЭ. 1985. № 8. С. 1565.
8. Nieto-Vesperinas M. //Opt. Acta. 1986. V. 33. P. 713.
9. Bates R.H.T., Garden K.L. //Optik. 1982. V. 61. P. 247.
10. Bates R.H.T., Garden K.L. //Optik. 1982. V. 62. P. 131.
11. Gerchberg R.V., Saxton W.O. //Optik. 1972. V. 35. P. 237.
12. Youba D.C., Webb H. //IEEE Trans. Med. Imaging. 1982. V. 1 P. 81.
13. Fienup J.R. //Appi. Opt. 1982. V. 21. № 15. P. 2758.
14. Hayes M.H. //IEEE Trans. Acoust. Speech. Sign. Proc. 1982. V. 30. P. 140.
15. Бакут П.А., Пахомов А.А., Ряхин А.Д., Свиридов К.Н., Устинов Н.Д. //ДАН СССР. 1986. Т. 290. С. 89.
16. Cederquist J.N., W acker man C.C. //JOSA. 1987. V. 4. P. 1.

Научно-производственное объединение «Астрофизика»,
Москва

Поступила в редакцию
24 января 1992 г.

P.A. Bakut, A.A. Pakhomov, I.P. Plotnikov, A.D. Ryakhin. **Method of Solution of the Phase Problem in Digital Image Processing. Part 3.**

A comparative analysis of known algorithms for solving the problem is presented and an algorithm processing the best characteristics is revealed. Minimum number of samplings sufficient for making a correct reconstruction is determined. A theoretical and numerical analysis of the algorithm stability with respect to noises is carried out and some experimental results are presented.