

В.И. Кислов

**ОПТИМАЛЬНОЕ ФАЗОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ
ПО КРИТЕРИЮ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА
ПРИ ПЕРЕДАЧЕ ИЗЛУЧЕНИЯ
НА СЛУЧАЙНО РАЗМЕЩЕННЫЙ ПРИЕМНИК**

Для определения оптимального фазового распределения (ФР) поля получено интегральное уравнение, обобщающее закон фазового сопряжения на стохастические оптические поля. Исследования проведены с использованием фазового приближения для функции Грина и методов вариационного исчисления. Предложен энергетический показатель качества оптического передатчика. В отсутствие неоднородной среды распространения оптимизация ФР позволяет частично компенсировать воздействия дифракции, стохастических ошибок наведения и неопределенностей положения приемника и повысить поток мощности на приемнике примерно на 10%.

Эффекты дифракционного рассеяния, неоднородности среды распространения, ошибки наведения и неопределенности положения приемника приводят к уменьшению потока мощности (энергии) излучения на приемнике и существенно ограничивают возможности оптических систем связи [1, 2]. Разрабатываемые в настоящее время управляемые оптические системы [3] позволяют контролировать фазовое распределение поля (ФР) на выходе оптического передатчика и, таким образом, частично компенсировать воздействия нежелательных факторов. Если во внимание принимаются только дифракция и неоднородности среды распространения, то решение задачи передачи максимального потока (в отсутствие нелинейных по полю эффектов) определяется законом фазового сопряжения [2, 3, 4, 5]. В данной статье оптимальное ФР выходного излучения передатчика исследуется с учетом свойств канала связи и характерных для систем связи ошибок наведения и неопределенностей в положении приемника.

Найдем уравнение для определения оптимального ФР поля в плоскости выходной апертуры оптического передатчика системы связи. Прежде получим выражение для потока мощности излучения на приемнике. Распределение поля U в плоскости апертуры приемника запишем в виде интегрального соотношения:

$$U(\mathbf{r}, z; \mathbf{q}) = \int d\mathbf{p} A(\mathbf{p}) G(\mathbf{p}; \mathbf{r}, z) \exp i\{\varphi(\mathbf{p}) + \varphi_q(\mathbf{p}, \mathbf{q})\}, \quad (1)$$

где $A(\mathbf{p})$ — амплитудное распределение поля в плоскости выходной апертуры передатчика, $A(\mathbf{p}) \geq 0$; \mathbf{r} , \mathbf{p} — радиусы-векторы точек в плоскостях апертур приемника и передатчика в цилиндрической системе координат; z — расстояние до приемника; $G(\mathbf{p}, \mathbf{r}, z)$ — функция Грина [2], учитывающая дифракционные эффекты и неоднородности среды распространения: $\varphi(\mathbf{p}) = \varphi_s(\mathbf{p}) + \varphi_c(\mathbf{p})$ — фазовое распределение поля в плоскости выходной апертуры передатчика; $\varphi_s(\mathbf{p})$ — фазовые искажения (ФИ) поля внутри оптического передатчика; $\varphi_c(\mathbf{p})$ — управляемая компонента ФР, вводимая в пучок излучения с помощью фазового корректора с целью компенсации воздействия нежелательных факторов; $\varphi_q(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ — фазовые искажения, которые по результату воздействия на поле эквивалентны ошибкам наведения [1] и представляют собою сумму дисторсии (соответствует ошибке углового наведения), кривизны поля и астигматизма (соответствуют ошибкам фокусировки на приемник); компоненты случайного вектора \mathbf{q} — веса aberrационных полиномов, составляющих случайную функцию $\varphi_u(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.

Поток мощности излучения на приемнике с учетом стохастичности ошибок наведения и неопределенностей положения приемника характеризуется среднестатистическим значением и рассчитывается по формуле

$$W = \langle |U(\mathbf{r}, z; \mathbf{q})|^2 \rangle = \iint d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 A(\mathbf{p}_1) A(\mathbf{p}_2) F(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \exp i\{\varphi(\mathbf{p}_1) - \varphi(\mathbf{p}_2)\}, \quad (2)$$

здесь угловые скобки означают усреднение,

$$F(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = F^*(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) = \langle G(\mathbf{p}_1; \mathbf{r}, z) G^*(\mathbf{p}_2; \mathbf{r}, z) \exp i\{\varphi_q(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}) - \varphi_q(\mathbf{p}_2, \mathbf{q})\} \rangle, \quad (3)$$

звездочка в индексе означает комплексное сопряжение. В формулах (2), (3) ошибки наведения, неопределенности положения приемной апертуры и ее форма учитываются с помощью функции $P(\mathbf{r}, z; \mathbf{q})$ распределения вероятностей ошибки наведения \mathbf{q} и принадлежности точки (\mathbf{r}, z) апертуре приемника. Функция $P(\mathbf{r}, z; \mathbf{q})$ нормирована так, что $\int P(\mathbf{r}, z; \mathbf{q}) d\mathbf{r} d\mathbf{q} / S = 1$, S — площадь апертуры приемника. Когда ошибки наведения отсутствуют и положение приемника в зоне дифракции Френеля достоверно известно,

$$G(\rho_1; \mathbf{r}, z) = (k/2\pi z) \exp i \{ kz + (k/2z)(\rho_1 - \mathbf{r})^2 + \Psi(\rho_1; \mathbf{r}, z) \},$$

при этом

$$\begin{aligned} F(\rho_1, \rho_2) &= (k/2\pi z)^2 \exp i \{(k/2z)(\rho_1^2 - \rho_2^2)\} \int_s d\mathbf{r} \exp i \{-(k/z)(\rho_1 - \rho_2)\mathbf{r} + \Psi(\rho_1; \mathbf{r}, z) - \\ &- \Psi^*(\rho_2; \mathbf{r}, z)\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\Psi(\rho; \mathbf{r}, z)$ — дополнительный в сравнении с однородной средой набег комплексной фазы [2] для сферической волны, прошедшей путь от источника в точке ρ в точку (\mathbf{r}, z) . Связь функции $\Psi(\rho, \mathbf{r}, z)$ непосредственно с неоднородностями среды распространения освещена в ряде работ (см., например, монографию [2] и представленную там подробную библиографию).

Рассмотрим величину потока мощности (2) как функционал фазового распределения φ . Используя метод вариационного исчисления [6] применительно к соотношению (2), для определения оптимального максимизирующего функционал (2) фазового распределения в отсутствие нелинейных по полю эффектов, получаем следующее интегральное уравнение:

$$\varphi(\rho_1) = \operatorname{arctg} \frac{\int d\rho_2 A(\rho_2) \sin(\varphi(\rho_2) - \arg F(\rho_1, \rho_2)) |F(\rho_1, \rho_2)|}{\int d\rho_2 A(\rho_2) \cos(\varphi(\rho_2) - \arg F(\rho_1, \rho_2)) |F(\rho_1, \rho_2)|}; \quad (5)$$

$$F(\rho_1, \rho_2) = |F(\rho_1, \rho_2)| \exp i \arg F(\rho_1, \rho_2); \arg F(\rho_1, \rho_2) = -\arg F(\rho_2, \rho_1).$$

Путем алгебраических преобразований уравнение (5) трансформируется к виду

$$\varphi(\rho_1) = -\arg \int d\rho_2 A(\rho_2) \{ \exp -i\varphi(\rho_2) \} F(\rho_1, \rho_2). \quad (6)$$

Уравнения (5) и (6) обобщают закон фазового сопряжения на стохастические оптические поля. В общем случае при определении потока мощности и функции $F(\rho_1, \rho_2)$ стохастическому и (или) детерминированному усреднению подвергаются воздействия всех тех факторов, которые не могут быть учтены в реальном времени при оптимизации ФР. К таким факторам кроме ошибок наведения и неопределенностей положения приемника относятся, к примеру, случайные ошибки формирования компенсирующего ФР, как правило, неконтролируемые флуктуации амплитудного распределения поля $A(\rho)$ в плоскости выходной апертуры оптического передатчика.

Соотношения (5), (6) являются исходными для изучения оптимального ФР. Найти аналитическое решение полученных уравнений в общем случае не представляется возможным, для численного решения может использоваться метод итерации. В дальнейшем ограничимся исследованиями отдельных частных случаев уравнений (5), (6).

1. Малые остаточные ошибки компенсации. Мерой компенсации нежелательных факторов служит, как это следует из анализа (2), (5), величина

$$\sigma_w^2 = \frac{\iint d\rho_1 d\rho_2 A(\rho_1) A(\rho_2) \{ \varphi(\rho_1) - \varphi(\rho_2) - \arg F(\rho_1, \rho_2) \}^2 |F(\rho_1, \rho_2)|}{2 \iint d\rho_1 d\rho_2 A(\rho_1) A(\rho_2) |F(\rho_1, \rho_2)|}. \quad (7)$$

Значение σ_w^2 связано с потоком мощности приближенной формулой:

$$W \simeq \exp \{ -\sigma_w^2 \} \iint d\rho_1 d\rho_2 A(\rho_1) A(\rho_2) |F(\rho_1, \rho_2)|, \sigma_w^2 \ll 1. \quad (8)$$

Формулы (7), (8) для W и σ_w^2 получены путем выделения из подынтегральной функции в соотношении (2) фазового сомножителя, разложения соответствующей экспоненты в ряд Тейлора по величине фазы до квадратичных слагаемых включительно и обратного преобразования в экспоненту получившегося выражения. Значения σ_w^2 вследствие изменения управляемого фазового распределения $\varphi(\rho)$ однозначно связаны с W : при уменьшении (увеличении) σ_w^2 значение W возрастает (уменьшается). Если ФИ поля имеют источник только внутри передатчика (при этом $\Psi(\rho; \mathbf{r}, z) = 0$; $\varphi_q(\rho, \mathbf{q}) = 0$), то величина (7), рассчитанная для точечного приемника, принимает форму показателя качества σ^2 (средний квадрат остаточных ФИ [3]) для протяженного приемника — форму показателя g^2 (средний квадрат градиента остаточных ФИ [7]). Эти выводы получаются с учетом того, что входящая в формулу (7) и определенная соотношением (4) функция $F(\rho_1, \rho_2) \sim S$ для близкого к точечному приемнику и $F(\rho_1, \rho_2)$ приближается к $\delta(\rho_1 - \rho_2)$ для протяженного приемника. Таким образом, величина σ_w^2 может рассматриваться как энергетический показатель качества оптического передатчика системы связи.

При малых значениях показателя (7) уравнение (6) линеаризуется относительно функции оптимального ФР и принимает вид интегрального уравнения

$$\varphi(\rho_1) \simeq \frac{\int d\rho_2 A(\rho_2) \{ \varphi(\rho_2) - \arg F(\rho_1, \rho_2) \} |F(\rho_1, \rho_2)|}{\int d\rho_2 A(\rho_2) |F(\rho_1, \rho_2)|}. \quad (9)$$

Уравнение (9) можно получить (методом вариации) также на основе соотношения (7) из условия минимальности σ_w^2 . Соотношение (9) сводится к неоднородному интегральному уравнению второго рода, методы решения которого разработаны [8].

Соотношения (7)–(9) дают возможность использовать известные способы [3] исследований управляемых оптических систем для нахождения оптимальных управляющих актиuatorами фазового корректора воздействий, для определения остаточной ошибки и эффективности компенсации с учетом возможностей фазового корректора. Пусть, к примеру, для формирования оптимального ФР используется деформируемое зеркало. В этом случае [3]

$$\varphi_c(\rho) = \sum_i^N \alpha_i R_i(\rho), \quad (10)$$

где $R_i(\rho)$ — функция отклика i -го привода; α_i — амплитуда управляющего воздействия для i -го привода; N — полное число приводов деформируемого зеркала. Подставляя (10) в (7) с учетом связи $\varphi = \varphi_c + \varphi_s$ и минимизируя σ_w^2 как функцию от α_i , для оптимальных значений α_i получаем:

$$\|\alpha_i\| = \|RR\|^{-1}\|R\varphi\|, \quad (11)$$

здесь $\|\alpha_i\|$ и $\|R\varphi\|$ — матрицы-столбцы, $\|RR\|^{-1}$ — обратная матрица,

$$\|RR\| = \left\| \int d\rho_1 d\rho_2 A(\rho_1) A(\rho_2) R_n(\rho_1) \{R_m(\rho_1) - R_m(\rho_2)\} |F(\rho_1, \rho_2)| \right\|, \quad (12)$$

$$\|R\varphi\| = \left\| \int d\rho_1 d\rho_2 A(\rho_1) A(\rho_2) R_m(\rho_1) \{ \varphi_s(\rho_1) - \varphi_s(\rho_2) + \arg F(\rho_1, \rho_2) \} |F(\rho_1, \rho_2)| \right\|, \quad (13)$$

$m, n = 1, 2, \dots, N$. При выполнении условия (11) ошибка компенсации минимальна и равна

$$\begin{aligned} \min \sigma_w^2 = \sigma_{ws}^2 \{ & 1 - \|R\varphi\|^T \|RR\|^{-1} \|R\varphi\| 2 \left(\int d\rho_1 d\rho_2 A(\rho_1) A(\rho_2) \{ \varphi_s(\rho_1) - \varphi_s(\rho_2) + \right. \\ & \left. + \arg F(\rho_1, \rho_2) \}^2 |F(\rho_1, \rho_2)| \right)^{-1} \}. \end{aligned} \quad (14)$$

«Т» в индексе означает операцию транспонирования; σ_{ws}^2 — значение показателя качества в отсутствие компенсации ($\|\alpha_i\| = 0$) величина σ_{ws} рассчитывается по формуле (7) с учетом замены $\varphi(\rho)$ на $\varphi_s(\rho)$. Дальнейшие исследования требуют учета характера (случайные, детерминированные) ФИ поля внутри передатчика и неоднородностей среды, способов измерения характеристик полей и способов управления фазовым корректором.

2. Близкий к точечному приемник излучения. В отсутствие неопределенностей положения приемника и ошибок наведения выражение (4) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} F(\rho_1, \rho_2) \simeq (k/2z)^2 S \exp i \{ & (k/2z)(\rho_1^2 - \rho_2^2) - (k/z) \int_s d\tau \{ (\rho_1 - \rho_2) \tau \} / S + \int_s d\tau [\Psi(\rho_1; \tau, z) - \\ & - \Psi^*(\rho_2; \tau, z)] / S \}. \end{aligned} \quad (15)$$

Формула (15) выведена путем линейного разложения в ряд Тейлора подынтегральной экспоненты в (4), путем интегрирования по τ и обратного преобразования в экспоненту получившегося выражения. Соотношение (15) справедливо, когда $kS^{1/2}D/4z \ll 1$ (D — диаметр апертуры передатчика), а масштаб неоднородностей Ψ больше $S^{1/2}$ и (или) $|\Psi| \ll 1$. После подстановки (15) в (5) или (8) находим следующее решение:

$$\varphi(\rho) \simeq - (k/2z) \rho^2 + (k/z) \int_s d\tau (\rho \tau) / S - \int_s d\tau \operatorname{Re} \Psi(\rho; \tau, z) / S. \quad (16)$$

Для точечного приемника соотношение (16) приводит к известному результату:

$$\varphi(\rho) = - (k/2z) \rho^2 - \operatorname{Re} \Psi(\rho; 0, z).$$

Первое слагаемое в выражении (16) для оптимального ФР описывает оптимальную фокусировку излучения на точечный приемник в однородной среде; второе — связано с несимметрией апертуры приемника и согласует положение энергетического центра пучка с формой апертуры; третье слагаемое

в (16) описывает закон формирования фазового распределения поля на выходе передатчика, оптимально компенсирующего неоднородности среды по критерию максимального потока мощности при передаче излучения на приемник, размещенный в зоне дифракции Френеля.

3. Частичная компенсация дифракционных эффектов. Пусть среда распространения излучения однородна, ошибка наведения и неопределенности в положении приемника отсутствуют. В случае линейной апертуры (пучок в плоскости выходной апертуры передатчика имеет в направлении Y существенно большую ширину, чем в перпендикулярном направлении X , $\rho = (X, Y)$) уравнение (5) с учетом (3), (4) и введенных ограничений принимает следующую форму:

$$\varphi(x_1) = \operatorname{arctg} \frac{\int dx_2 A(x_2) \sin(\varphi(x_2)) [\sin(\omega(x_1 - x_2))/(x_1 - x_2)]}{\int dx_2 A(x_2) \cos(\varphi(x_2)) [\sin(\omega(x_1 - x_2))/(x_1 - x_2)]}, \quad (17)$$

где: $\omega = kD_p D/z^4$, D_p — размер (щелевого) приемника; D — размер апертуры передатчика; $x = 2X/D$. Из уравнения (17) сразу исключена квадратичная компонента оптимальной фазы $(-(kD^2/8z)x^2)$, которая определяет оптимальное фокусное расстояние оптической системы передатчика при фокусировке на точечный приемник. Когда $\omega = 0$, уравнение (17) имеет решение $\varphi(x) = \text{const}$, что согласуется с результатами анализа, проведенного в п. 3. При $\omega \rightarrow \infty$ входящая в (17) функция в квадратных скобках приближается к δ -функции, поэтому решением уравнения (17) является любая функция $\varphi(x)$. При конечных значениях со уравнение (17) имеет кроме очевидного решения $\varphi(x) = \text{const}$ еще несколько решений. Если функция амплитудного распределения $A(x)$ четная, то они разделяются на симметричные $\varphi(x) = \varphi(-x)$ и антисимметричные $\varphi(x) = -\varphi(-x)$. С целью проверки представленных выводов уравнение (17) решалось численно методом итераций. На рис. 1 даны графики функции оптимального ФР в случае однородного амплитудного распределения поля на линейной апертуре с симметричным центральным экранированием. Когда величина ω находится в диапазоне 2 ... 4, оптимальное ФР близко к линейному $\varphi(x) \sim x$, максимальное отклонение фазы от однородной составляет 2 ... 3 радиана или 1/2 ... 1/3 — в единицах длины волны излучения. Относительное увеличение $\delta W/W$ потока мощности излучения в сравнении со случаем однородного ФР достигает 40% и зависит от размера приемника.

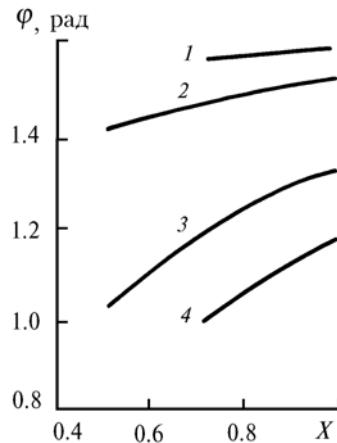


Рис. 1. Оптимальное фазовое распределение, частично компенсирующее дифракционные эффекты; $\varphi(x) = -\varphi(-x)$. Кривая 1 — $\omega = 2.2$; $\delta W/W = 18\%$; 2 — 2.7; 40%; 3 — 2.2; 22%; 4 — 1.9; 4%

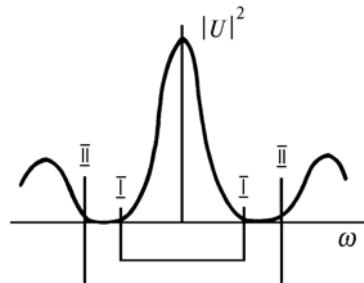


Рис. 2

Эффект максимизации потока мощности излучения при введении близкого к линейному ФР объясняет рис. 2, на котором представлен график интенсивности излучения на апертуре приемника в зависимости от нормированной координаты ω . Если апертура приемника ограничивается точками I, то некоторое смещение приемника вправо или влево, что соответствует введению линейного ФР на апертуре излучателя, не приводит к существенному изменению потока мощности излучения; умень-

шение (увеличение) мощности излучения на правой части апертуры компенсируется почти таким же увеличением (уменьшением) — на левой части. Если апертура приемника ограничивается точками II, то небольшое смещение приемника приводит к увеличению потока мощности излучения. Объясняется это тем, что один из краев апертуры приемника при смещении попадает в область высокой плотности мощности, в то же время другой край апертуры приемника находится в области низкой плотности излучения и при смещениях приемника не выходит за ее границы.

Отметим, что представленные в п. 3 результаты эквивалентны следующему утверждению: для максимизации потока мощности на протяженном приемнике при передаче когерентного излучения через однородную среду требуется непарabolическое формирующее зеркало.

4. Частичная компенсация стохастических неопределенностей положения приемника или ошибок углового наведения. Пусть поле, формируемое линейным излучателем (с бесконечным размером вдоль оси Y), передается через однородную среду на точечный приемник. Положение приемника в направлении оси X известно с точностью до постоянной на отрезке $[-D_p/2, D_p/2]$ функции распределения вероятностей $P(X)$; расстояние до апертуры передатчика z . При этом входящая в (5) и определенная соотношениями (3), (4) функция $F(x_1, x_2) \sim \{\exp i(kD^2 / 8z)(x_1^2 - x_2^2)\} \sin(\omega(x_1 - x_2)) / (x_1 - x_2)$ и уравнение (5) для определения оптимального ФР с учетом неопределенностей положения приемника принимает форму интегрального уравнения (17) при $\omega = kD_p D / 4z$; $x = 2X/D$. Такое же уравнение получается при исследовании компенсации ошибок наведения (в отсутствие неопределенностей положения приемника). В этом случае фазовые искажения поля, эквивалентные ошибкам углового наведения, представляются [1] в виде $\varphi_q(x) = (kq_x D/2)x$, q_x — случайная угловая (в радианах) ошибка наведения, равномерно распределенная на отрезке $[-q_{x0}, q_{x0}]$; $|q_{x0}| \ll 1$; $\omega = k|q_{x0}| D / 2$. Таким образом, представленные в п. 3 результаты анализа уравнения (17) применимы к исследованию частичной компенсации неопределенностей положения точечного приемника или ошибок наведения. Так, для обеспечения максимальной среднестатистической плотности мощности на приемнике при $\omega \approx 2 \dots 4$ целесообразно введение ФР, близкого по форме к дополнительной статической ошибке углового наведения. Однако следует иметь в виду, что результат оптимизации ФР существенно зависит от функции распределения вероятностей $P(\rho, z; q)$, вид которой выявляется при теоретических и (или) экспериментальных [1] исследованиях конкретной системы связи.

Выводы. Для определения фазового распределения (ФР) поля, максимизирующего поток мощности на случайно размещенном приемнике при передаче излучения с ошибкой наведения через неоднородную среду, получено интегральное уравнение, которое обобщает закон фазового сопряжения на стохастические оптические поля. Исследования проведены с использованием функции Грина для поля в неоднородной среде и метода вариационного исчисления. Показано, что оптимальное фазовое распределение может быть представлено в виде суммы трех слагаемых. Одно из них обеспечивает оптимальную фокусировку на приемник в однородной среде. Второе — осуществляет компенсацию неоднородностей среды распространения. Третье — формирует распределение плотности мощности в пучке, согласованное с положением и формой апертуры приемника. В отсутствие неоднородностей среды распространения оптимизация фазового распределения позволяет частично компенсировать дифракционные эффекты, стохастические ошибки наведения и неопределенностии в положении приемника и повысить поток мощности излучения на приемнике на величину $\sim 10\%$.

1. Гальяди Р. М., Карп Ш. Оптическая связь. М.: Связь, 1978. 424 с.
2. Миронов В. Л. Распространение лазерного пучка в турбулентной атмосфере. Новосибирск: Наука, 1981. 247 с.
3. Воронцов М. Л., Корябин А. В., Шмальгаузен В. И. Управляемые оптические системы. М.: Наука, 1988. 272 с.
4. Бакут П. А., Логинов В. А. // Квантовая электроника. 1982. Т. 9. № 6. С. 1167.
5. Лукин В. П., Чарноцкий М. И. // Оптика атмосферы. 1990. Т. 3. № 12. С. 1294.
6. Буслаев В. С. Вариационное исчисление. Л.: Ленинградский университет, 1980. 288 с.
7. Кислов В. И., Тараненко В. Г. // Радиотехника и электроника. 1986. Т. 31. № 11. С. 2187.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1988. 720 с.

Институт общей физики РАН,
Москва

Поступила в редакцию 5 мая 1992 г.

V. I. Kislov. Optimal Field Distribution Determined according to Maximum Flux Criterion in the Case of Radiation Transmission to a Randomly Placed Receiver.

To determine an optimum phase distribution (PD) of a field in the plane of an optical transmitter output aperture the integral equation is obtained which generalizes the law of phase conjugation for a random field. Investigation has been carried out using Green's function for field in an inhomogenous medium and the variational methods. The energy criterion of a transmitter optical quality is proposed. In the absence of medium inhomogeneities the optimization of a PD makes it possible to compensate partially for the influence of diffraction, random variations of receiver arrangement and to increase the radiation flux through the receiver by about 10%.