<Оптика атмосферы и океана>, **6**, N 1 (1993)

УДК 537.876.23

Е.З. Грибова

ВЕРОЯТНОСТЬ МНОГОЛУЧЕВОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛН ЗА СЛУЧАЙНЫМ ФАЗОВЫМ ЭКРАНОМ

Получена зависимость среднего квадрата числа лучей от расстояния за фазовым экраном. С использованием среднего числа лучей и среднего квадрата числа лучей найдены вероятности одно-, трех- и пятилучевого распространения. Показано, что многолучевость проявляется намного дальше, чем начинается область сильных флуктуаций интенсивности волны.

При распространении оптических волн в случайно-неоднородной среде или за случайным фазовым экраном крупномасштабные (по сравнению с длиной волны) неоднородности показателя преломления действуют как линзы, что приводит к появлению каустик. С формированием каустических особенностей связан ряд интересных явлений. Например, в [1] показано, что область, в которой вероятность появления хотя бы одной каустики заметно отличается от нуля, можно рассматривать как начало области сильных флуктуаций интенсивности волны. В то же время известно [2], что после образования каустики возможно появление многолучевости. При этом в одну точку пространства попадает уже не один, а несколько лучей, имеющих различные начальные координаты.

При описании многолучевого распространения волн необходимо знать статистические свойства многолучевости. Так, в [3] найдена зависимость среднего числа лучей $\langle N(t)\rangle$ за экраном от координаты t, вдоль которой распространяется волна. Помимо того, что важно знать число лучей, попадающих в данную точку (x, t) (здесь мы будем для простоты рассматривать случай только одной поперечной координаты x), величина $\langle N\rangle$ несет и другую информацию о многолучевости: во-первых, позволяет оценить пределы применимости однолучевого приближения, во-вторых, с ее помощью можно найти вероятность трехлучевого распространения $P(3; t)$.

По аналогии с [3], т.е. используя условие нормировки вероятностей и определение средних, можно записать

$$
\begin{aligned}
&P(1; t) + P(3; t) + \ldots + P(N; t) + \ldots = 1\,, \\
&1\,P(1; t) + 3\,P(3; t) + \ldots + N\,P(N; t) + \ldots = \langle N(t)\rangle\,, \\
&1^2 P(1; t) + 3^2 P(3; t) + \ldots + N^2 P(N; t) + \ldots = \langle N^2(t)\rangle\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&1^k P(1; t) + 3^k P(3; t) + \ldots + N^k P(N; t) + \ldots = \langle N^k(t)\rangle\,. \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Здесь вероятность $P(N; t)$ равна относительной длине интервалов поперечной оси x на расстоянии t от экрана, в которые попадают N лучей. Поскольку с увеличением t число лучей N бесконечно нарастает [3], то из (1) следует, что для нахождения вероятностей $P(N; t)$ надо знать все моменты $\langle N^k\rangle$, где $k = 1, 2, \ldots$. Если же пренебречь вероятностью появления семи и более лучей, то первые три уравнения (1) образуют замкнутую систему, и из нее можно найти вероятности $P(1; t)$, $P(3; t)$ и $P(5; t)$, зная только $\langle N(t)\rangle$ и $\langle N^2(t)\rangle$. В [3] найдена связь $\langle N(t)\rangle$ с лагранжевым средним модуля расходимости лучей

$$\langle N(x, t)\rangle = \langle |J(x, t)| \rangle_{\text{Л}}\,.$$

Здесь мы вычислим $<N^2(x, t)>$. Для этого от лагранжевой двухточечной плотности вероятностей для координаты X луча, выходящего из точки (y, t), угла прихода луча V и расходимости лучей J перейдем к эйлеровой:

$$W^{Л}_{X,V,J}(x_1, x_2, \upsilon_1, \upsilon_2, j_1, j_2; y_1, y_2, t) = <\delta(X(y_1, t) - x_1)\,\delta(X(y_2, t) - x_2)\,\delta(V(y_1, t) - \upsilon_1)\,\delta(V(y_2, t) - \upsilon_2)\times$$

$$\times\,\delta(J(y_1, t) - j_1)\,\delta(J(y_2, t) - j_2)>_{Л} = \frac{1}{|j_1 j_2|} < \sum_{n=1}^{N(x_1,t)} \sum_{m=1}^{N(x_2,t)} \delta(y_n(x_1, t) - y_1)\,\delta(y_m(x_2, t) - y_2)\times$$

$$\times\,\delta(\upsilon_n(x_1, t) - \upsilon_1)\,\delta(\upsilon_m(x_2, t) - \upsilon_2)\,\delta(j_n(x_1, t) - j_1)\,\delta(j_m(x_2, t) - j_2)>_{Э}. \quad (2)$$

Будем считать, что $x_2 = x_1 + s$ и введем обозначения для числа лучей, попадающих в точки (x_1, t) и (x_2, t):

$$N(x_1, t) = N,\ N(x_2, t) = M.$$

Проинтегрируем равенство (2) по y_1, y_2 и, учитывая формулу полной вероятности, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W^{Л}(x_1, x_2, \upsilon_1, \upsilon_2, j_1, j_2; y_1, y_2, t)\, dy_1 dy_2 = \frac{1}{|j_1 j_2|} \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{M=1}^{\infty} P(N, M; s, t)\times$$

$$\times \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} W^{Э}_{nm}(\upsilon_1, j_1; x_1, t\,|\,N; \upsilon_2, j_2; x_2, t\,|\,M),$$

где $P(N, M; s, t)$ – вероятность того, что в точке (x_1,t) будет N лучей, а в точке $(x_i + s, t)$ – M лучей; $W^{Э}_{nm}$ – совместная плотность вероятностей эйлеровых полей υ и j в n-м и m-м луче при тех же условиях. Умножим последнее равенство на $|j_1 j_2|$ и проинтегрируем по j_1, j_2, υ_1, υ_2;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |j_1 j_2|\, W^{Л}(x_1, x_2, j_1, j_2; y_1, y_2, t)\, dy_1 dy_2\, dj_1 dj_2 = \sum_{N,M}^{\infty} NMP(N, M; s, t). \quad (3)$$

Видно, что справа стоит корреляционная функция числа лучей

$$K_N(s, t) = <N(x, t)\, N(x + s, t)>.$$

Упростим левую часть с учетом статистической однородности среды. Для этого перейдем к координатам

$$s = x_1 - x_2,\ s_0 = y_1 - y_2,\ q_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

и проинтегрируем по q_0:

$$K_N(s, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |j_1 j_2|\, W^{Л}(s, j_1, j_2; s_0, t)\, ds_0 dj_1 dj_2. \quad (4)$$

По определению

$$W^{Л}(s, j_1, j_2; s_0, t) = <\delta(X(s_0, t) - X(0, t) - s)\,\delta(J(s_0, t) - j_1)\,\delta(J(0, t) - j_2)>.$$

При подстановке $W^{Л}$ в (4) с учетом свойств δ-функции получим

$$K_N(s,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}<|J(0,t)\,J(s_0,t)|\,\delta(X(s_0,t)-X(0,t)-s)>ds_0. \quad (5)$$

Используем выражения для координаты и расходимости геометро-оптического луча за фазовым экраном [3]

$$X(y,t)=y+\upsilon_0(y)\,t\,,$$

$$J(y,t)=1+u(y)\,t\,,\;\; u=\upsilon_0'(y)\,.$$

Тогда, с учетом этих уравнений, усреднение в (5) производится с помощью совместного вероятностного распределения величин $\frac{s-s_0}{t}$, $p_1=u(0)\,t$ и $p_2=u(s_0)\,t$:

$$K_N(s,t)=\frac{1}{t}\int_{-\infty}^{+\infty}|(1+p_1)(1+p_2)|\;W\left(\frac{s-s_0}{t},p_1,p_2;s,t\right)ds_0\,dp_1\,dp_2\,. \quad (6)$$

Нужная нам величина $<N^2(t)>$ получается отсюда при $s=0$.

Будем считать поле $\upsilon_0(y)$ гауссовым с нулевым средним и ковариационной функцией

$$B_{\upsilon_0}(s_0)=\sigma_0^2\exp(-s_0^2/d^2)\,,$$

где d —характерный масштаб неоднородностей экрана. Плотность вероятности трехмерного нормального распределения [4]

$$W(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\,\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sqrt{\Delta}}\exp\left\{-\frac{1}{2\Delta}\left[\frac{\xi_1^2}{\sigma_1^2}(1-R_{23}^2)+\frac{\xi_2^2}{\sigma_2^2}(1-R_{13}^2)+\frac{\xi_3^2}{\sigma_3^2}(1-R_{12}^2)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2\xi_1\xi_2}{\sigma_1\sigma_2}(R_{12}-R_{13}R_{23})+\frac{2\xi_2\xi_3}{\sigma_2\sigma_3}(R_{23}-R_{12}R_{13})+\frac{2\xi_1\xi_3}{\sigma_1\sigma_3}(R_{13}-R_{12}R_{23})\right]\right\},$$

где

$$\Delta=1-R_{12}^2-R_{13}^2+R_{23}^2+2R_{12}R_{13}R_{23}\,.$$

В нашем случае

$$\xi_1=\frac{s-s_0}{t}\,,\;\xi_2=p_1\,,\;\xi_3=p_2\,,\;\sigma_1=\sigma_s\,,\;\sigma_2=\sigma_3=\sigma_p\,,$$

а коэффициенты взаимной корреляции имеют вид

$$R_{12}=R(p_1,s_0)=\frac{t}{\sigma_p\sigma_s}\frac{dB_{\upsilon_0}(s_0)}{ds_0}\,,$$

$$R_{13}=R(p_2,s_0)=R_{12}\,,$$

$$R_{23}=R(p_1,p_2)=-\frac{t^2}{\sigma_p^2}\frac{d^2B_{\upsilon_0}(s_0)}{ds_0^2}\,.$$

причем дисперсии σ_s, σ_p полей s и $p_{1,2}$ также выражаются через функцию $B_{v_0}(s_0)$:

$$\sigma_s^2 = 2(\sigma_0^2 - B_{v_0}(s_0))\,,\ \sigma_p^2 = -t^2 \left.\frac{d^2 B_{v_0}(s_0)}{ds_0^2}\right|_{s_0=0} .$$

Далее нам удобно будет пользоваться новыми безразмерными координатами

$$\eta_0 = \frac{s_0}{d}\,,\ z = \frac{t}{t_0} \equiv t\frac{\sigma_0}{d}\,.$$

Здесь t_0 – характерная фокальная длина [5], т.е. то расстояние от экрана, на котором наблюдаются сильные флуктуации интенсивности волны.

Подставляя теперь функцию $W(\eta_0, p_1\, p_2; z)$ в (6), получим окончательно

$$<N^2(z)> = \frac{1}{8\pi^{3/2} z^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|(1+p_1)(1+p_2)\right| \frac{1}{\sqrt{A_1 A_2}} \exp\left\{-\frac{1}{4z^2 A_4}\left[\eta_0^2 A_0 + \frac{(p_1^2+p_2^2)A_2}{A_1} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\eta_0^2(p_1+p_2) - \frac{2p_1 p_2 A_3}{A_1}\right]\right\} d\eta_0 dp_1 dp_2\,. \qquad (7)$$

Здесь введены обозначения

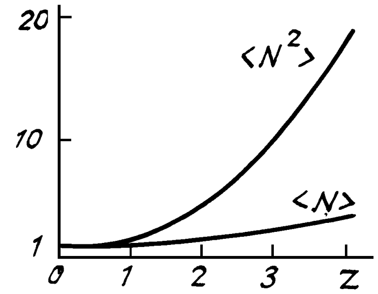
$$A_0 = 1-(2\eta_0^2-1)\,e^{-\eta_0^2}\,,\ A_1 = 1+(2\eta_0^2-1)\,e^{-\eta_0^2}\,,\ A_2 = 1-e^{-\eta_0^2} - \eta_0^2\,e^{-2\eta_0^2}\,,$$

$$A_3 = (1+\eta_0^2\,e^{-\eta_0^2} - 2\,\eta_0^2 - e^{-\eta_0^2})\,e^{-\eta_0^2}\,,\ A_4 = A_2 + A_3\,.$$

График зависимости $<N^2(z)>$, полученный численным интегрированием выражения (7), приведен на рисунке. Там же построен график $<N(z)>$, рассчитанный в соответствии с формулой из [3]:

$$<N(z)> = \Phi\left(\frac{1}{z}\right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, z\, \exp\left(-\frac{1}{2z^2}\right),$$

где $\Phi(\tau)$ – интеграл вероятностей.



Зависимость среднего квадрата $<N^2>$ и среднего $<N>$ числа лучей от расстояния за фазовым экраном

Мы можем теперь найти из системы (1) вероятности одно-, трех- и пятилучевого распространения

$$P(1;z) = \frac{15 - 8\langle N\rangle + \langle N^2\rangle}{8},$$

$$P(3;z) = \frac{-5 + 6\langle N\rangle - \langle N^2\rangle}{4},$$

$$P(5;z) = \frac{3 - 4\langle N\rangle + \langle N^2\rangle}{8}.$$

Например, при $z = 1$, т.е. в области сильных фокусировок, подставляя сюда $\langle N\rangle = 1{,}167$ и $\langle N^2\rangle = 1{,}675$, получаем $P(3; z = 1) = 0{,}08175$, $P(5; z = 1) = 0{,}000875$.

Это означает, что многолучевость проявляется намного дальше, чем возникают сильные выбросы интенсивности волны в окрестностях зарождающихся каустик.

Автор благодарит А.И. Саичева за постановку задачи и полезные обсуждения.

1. Кравцов Ю.А. //ЖЭТФ. 1968. Т. 55. № 3. С. 798–801.
2. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
3. Гурбатов С.Н, Малахов А.Н., Саичев А.И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М: Наука, 1990. 216 с.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973. 832 с.
5. Salpeter E.E. //Astrophys. J. 1967. V. 147. № 2. P. 433–448.

Нижегородский архитектурно- строительный институт

Поступила в редакцию
12 октября 1992 г.

E.Z. Gribova. **Probability of the Optical Wave Multiray Propagation behind a Random Phase Screen**.

Dependence of the mean square of the number of rays on the distance behind a phase screen is obtained. The probabilities of one-, three- and five-ray propagation arc found using the average number of rays and their mean square. It is shown that the multiray character of propagation takes place in a wider range than the region where strong intensity fluctuations of a wave begin.